O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

ALISHER NAVOIY NOMIDAGI TOSHKENT DAYLAT
O‘ZBEK TILI VA ADABIYOTI UNIVERSITETI

MATEMATIKA VA AXBOROT KOMMUNIKATSIYA
TEXNOLOGIYALARI KAFEDRASI

M.O'.XUDOYBERGANOV

MATEMATIK MANTIQ

FANI BO‘YICHA

O‘QUV – USLUBIY MAJMUA

TOSHKENT-2016

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

ALISHER NAVOIY NOMIDAGI
TOSHKENT DAVLAT O'ZBEK TILI VA ADABIYOTI

O'ZBEK-INGLIZ TARJIMA FAKULTETI

MATEMATIKA VA AXBOROT KOMMUNIKATSIYA TEXNOLOGIYALARI
KAFEDRASI

MATEMATIK MANTIQ

O'QUV-USLUBIY MAJMUA

Toshkent -2016

Mazkur o'quv-uslubiy majmua Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining 2016 yil _________ dagi ___-sonli buyrug'i bilan tasdiqlangan o'quv reja va dastur asosida tayyorlandi.

Tuzuvchi: Matematika va axborot kommunikasiya texnologiyalari kafedrasi mudiri, f.-m.f.n. M.O'.Xudoyberganov

Taqrizchilar: O'zMU Algebra va funksional analiz kafedrasi dosenti, f.-m.f.n., R.Dadajonov
ToshDO'TAU Matematika va AKT kafedrasi o'qituvchisi F.D.Raxmonov

O'quv -uslubiy majmua ToshDO'TAU kengashining 2016 yil 29 avgustdagi 1-sonli qarori bilan tasdiqqa tavsiya qilingan.

MUNDARIJA

So'z boshi

2016 yil 13 maydagi O'zbekiston Respublikasi birinchi prezidenti I.A.Karimovning "Alisher Navoiy nomidagi Toshkent davlat o'zbek tili va adabiyoti universitetini tashkil etish to'g'risida"gi PF-4797 farmonida ko'rsatilgan o'zbek tilining jahon axborot tarmog'ida munosib o'rin egallashini ta'minlash, uning kompyuter uslubini, o'zbek tili va dunyodagi yetakchi xorijiy tillar asosida tarjima dasturlari va lug'atlar, elektron darsliklar yaratish bilan bog'liq ilmiy-metodik ishlanmalar, amaliy tavsiyalar tayyorlash va bu borada erishilgan natijalarni amaliyotga keng tatbiq etish uchun universitetning "5111200 – O'zbek tili va adabiyoti, 5120100 – Filologiya va tillarni o'qitish (o'zbek tili) va 5120900 – O'zbek-ingliz tarjima nazariyasi va amaliyoti ta'lim yo'nalishi o'quv rejalari qayta ishlab chiqildi va tasdiqlandi. Bunda ilgari ushbu ta'lim yo'nalishi o'quv rejalaridagi "Oliy matematika" fani o'rniga "Matematik mantiq" fani kiritilib, undagi mavzular talabalarning kelgusida "Dasturlash asoslari va axborot texnologiyalari" fanini o'rganishda asosiy poydevor bo'ladigan tushunchalar asosida tanlandi. Shuni aytib o'tish joizki bundaga mavzular nafaqat "Matematik mantiq" faniga tegishli bo'lib, unda filologiya yo'nalishi talabalari uchun muhim bo'lgan "Graflar nazariyasi", "Kombinatorika elementlari" va "Ehtimollar nazariyasi va amaliy statistika" kabi fanlarning ba'zi bir mavzulari kiritildi.

Mazkur o'quv uslubiy majmua "Matematik mantiq" fanidan "5111200 – O'zbek tili va adabiyoti, 5120100 – Filologiya va tillarni o'qitish (o'zbek tili), 5120900 – O'zbek-ingliz tarjima nazariyasi va amaliyoti ta'lim yo'nalishlari uchun mo'ljallangan bo'lib, O'zbek-ingliz tarjima fakulteti "Matematika va axborot kommunikasiya texnologiyalari kafedrasi" kafedrasi professor-o'qituvchilari tomonidan ishlab chiqilgan. "Matematik mantiq" fani o'quv uslubiy majmuasini yaratishda yetakchi xorijiy OTMlari o'quv dasturlariga asosiy adabiyotlar ro'yxatiga kiritilgan Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012 va Mendelson E. Introduction to mathematical logic, 6-edition. New York. Taylor&Francis Group, 2015 adabiyotlaridan ham foylalanildi.

"Matematik mantiq" fani universitetning yuqorida keltirilgan barcha ta'lim yo'nalishi o'quv rejalariga asosan 1- semetrda 76 auditoriya soatda o'qitiladi.

Ushbu o'quv uslubiy majmua beshta qismdan iborat bo'lib, ular sillabus, ishchi o'quv reja, namunaviy va ishchi o'quv dastur, modulni o'qitishda foydalaniladigan interfaol ta'lim metodlari, ma'ruza materiallari (ma'ruza matni, adabiyotlar ro'yxati, mustaqil ta'lim mavzulari, glossariy, keyslar banki, nazorat savollari va test savollari) va amaliy mashg'ulotlar materiallari (amaliy topshiriqlar, namuna, adabiyotlar ro'yxati, tarqatma materiallar, keyslar banki, test savollari)dan tashkil topgan.

«Matematik mantiq» fanidan ta'lim texnologiyasi «Diskret matematika va matematik mantiq oliy ta'lim muassasalarida ma'ruza va seminarlarni o'qitish texnologiyasi» o'quv qo'llanmasida bayon etilgan dars mashg'ulotlarida yangi texnologiyalarni qo'llash qonun-qoidalariga tayangan holda ishlab chiqilgan.

Talabalarga bilim berishda zamonaviy ta'lim texnologiyalarining ahamiyati to'g'risida so'z borganda O'zbekiston respublikasining birinchi prezidenti I.A.Karimovning "O'quv jarayoniga yangi axborot va pedagogik texnologiyalarni keng joriy etish, bolalarimizni komil insonlar etib tarbiyalashda jonbozlik ko'rsatadigan o'qituvchi va domlalarga e'tiborimizni yanada oshirish, qisqacha aytganda, ta'lim-tarbiya tizimini sifat jihatidan butunlay yangi bosqichga ko'tarish diqqatimiz markazida bo'lishi darkor" degan so'zlarini tahkidlash o'rinlidir. Bu masala "Barkamol avlod yili" Davlat dasturida ham asosiy yo'nalishlardan biri sifatida e'tirof etilgan.

Majmuada keltirilgan ta'lim texnologiyalarining har biri o'zida o'quv mashg'ulotini o'tkazish shart-sharoiti to'g'risida axborot materiallarini, pedagogik maqsad, vazifa va ko'zlangan natijalarni, o'quv mashg'ulotning rejasi, o'qitishning usul va vositalarini mujassamlashtirgan. Shuningdek, bu o'quv mashg'ulotining texnologik kartasini, ya'ni o'qituvchi va o'quvchining mazkur o'quv mashg'ulotida erishadigan maqsadi bo'yicha hamkorlikdagi faoliyatning bosqichma-bosqich ta'riflanishini ham o'z ichiga oladi.

Majmuaning konseptual asoslari qismida dastlab «Matematik mantiq» fanining dolzarbligi va ahamiyati, mazkur o'quv fanining tarkibiy tuzilishi, o'qitishning usul va vositalarini tanlashda tayanilgan konseptual fikrlar, kommunikasiyalar, axborotlar berilib, so'ngra loyihalashtirilgan, o'qitish texnologiyalari taqdim qilingan.

Hozirgi kunda jahon tajribasidan ko'rinib turibdiki, ta'lim jarayoniga o'qitishning yangi, zamonaviy usul va vositlari kirib kelmoqda va samarali foydalanilmoqda. Jumladan, universitetda innovasion va zamonaviy pedagogik g'oyalar amalga oshirilmoqda: o'qituvchi bilim olishning yagona manbai bo'lib qolishi kerak emas, balki talabalar mustaqil ishlash jarayonining tashkilotchisi, maslahatchisi, o'quv jarayonining menejeri bo'lishi lozim. Ta'lim texnologiyasini ishlab chiqish asosida aynan shu g'oyalar yotadi.

Sillabus

«Matematik mantiq» fanining sillabusi

(2016/2017 o'quv yili)

<table>
<tr><td>Kafedra nomi:</td><td colspan="2">Matematika va axborot kommunikasiya texnologiyalari</td></tr>
<tr><td>O‘qituvchi haqida ma’lumot:</td><td>Xudoyberganov M.O‘.</td><td>Professor-o‘qituvchi elektron manzili
mirzoali@mail.ru</td></tr>
<tr><td>Semestr va o‘quv kursining davomiyligi</td><td colspan="2">I semestr, jami soat 76</td></tr>
<tr><td rowspan="6">O‘quv soatlari hajmi:</td><td>Jami:</td><td>132</td></tr>
<tr><td>shuningdek:</td><td></td></tr>
<tr><td>ma’ruza</td><td>38</td></tr>
<tr><td>seminar</td><td></td></tr>
<tr><td>Amaliy mashg‘ulot</td><td>38</td></tr>
<tr><td>mustaqil ta’lim</td><td>56</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Yo‘nalish nomi va shifri</td><td>5111200</td><td>O‘zbektili va adabiyoti</td></tr>
<tr><td>5120100</td><td>Filologiya va tillarni o'qitish (o'zbek tili)</td></tr>
<tr><td>5129100</td><td>O'zbek-ingliz tarjima nazariyasi va amaliyoti</td></tr>
</table>

Kursning predmeti va mazmuni: Ushbu dastur 5111200 – O‘zbek tili va adabiyoti, 5120100 – Filologiya va tillarni o'qitish (o'zbek tili), 5129100 – O'zbek-ingliz tarjima nazariyasi va amaliyoti ta’lim yo‘nalishi uchun mo‘ljallangan. Mazkur dastur respublikamizda va xorijda chop etilgan darsliklari asosida tuzilgan. O‘zbek tilining jahon axborot tarmog‘ida munosib o‘rin egallashini ta‘minlash, uning kompyuter uslubini, o‘zbek tili va dunyodagi yetakchi xorijiy tillar asosida tarjima dasturlari va lug‘atlar, elektron darsliklar yaratish bilan bog‘liq ilmiy-metodik ishlanmalar, amaliy tavsiyalar tayyorlash va bu borada erishilgan natijalarni amaliyotga keng tatbiq etish uchun matematik mantiq fanining tutgan o‘rni beqiyos.

«Matematik mantiq» fanida mantiq, mulohazalar algebrasi, kvantorlar, predikatlar, isbot, to‘plamlar nazariyasi elementlari, funksiyalar, kombinatorika elementlari, graflar, munosabatlar, binar munosabatlar, ehtimollar nazariyasi elementlarining asosiy tushunchalari va ularga oid bo‘lgan masalalar ko‘riladi.

«Matematik mantiq" kursi kompyuter va kompyuter lingvistikasiga oid barcha fanlar bilan bog‘langan. Kurs mos ta‘lim yo‘nalishi bakalavrlarini tayyorlashda yetakchi o‘rin tutadi.

Kursni o‘qitishning maqsadi va vazifalari: Mazkur kursning maqsadi talabalarda algoritmik va mantiqiy fikrlash qobiliyatini rivojlantirish va matematik lingvistika asoslarini o‘rgatishdan iboratdir. Fanning vazifasi esa, talabalarga diskret matematika va matematik mantiq asoslarini berish, olgan nazariy bilimlarini amaliyotga qo‘llay bilishga o‘rgatishdan va oqibat natijada ularni abstrakt fikrlash madaniyatini yuksak pog‘onalarga ko‘tarishdan iboratdir.

Matematik mantiq elementlari, algoritmlar va ularning murakkablik nazariyasi, graflar va maxsus binar munosabatlar, kombinatorika asoslari, dasturlash asoslari, elektron lug‘atlar va boshqa diskret matematikani tashkil qiluvchi asosiy tushunchalar bilan tanishtirish kursning asosiy vazifasidir.

Kursning tarkibi va mazmuni

№	Mavzular	Ma'ruza soati	Pedagogik va axborot texnologiyalari
1.	To'plamlar va ular ustida amallar. Munosabatlar. Binar munosabatlar. Funksiyalar.	2	munozara
2.	Maxsus binar munosabatlar. Ekvivalentlik munosabati. Tartiblangan to'plamlar.	2	aqliy hujum
3.	Mulhaza. Mantiqiy bog`lovchilar. Formula, qismiy formula. Formulalarning teng kuchliligi. Chinlilik jadvali.	4	slaydlar orqali prezentasiya qilinadi
4.	Mulohazalar algebrasi formulasi-ning normal shakllari. Mulohazalar hisobi. Keltirib chiqarish.	4	munozara
5.	Isbot tushunchasi. Isbotlanuvchi formula ta'rifi. Teorema tushunchasi.	2	munozara
6.	Algoritm tushunchasi va uning xususiyatlari. Tyuring mashinasi. Algoritmlar nazariyasining asosiy gipotezasi	2	aqliy hujum
7.	Rekursiv ta'riflar va tuzilmaviy induksiya. Rekursiv algoritmlar. Rekursiya.	2	slaydlar orqali prezentasiya qilinadi
8.	Markov normal algoritmlari. Hisoblanuvchi funksiyalar	2	munozara
9.	Kombinatorika asoslari. O'rinlashtirishlar va kombinasiyalar. Binomial koeffisiyentlar va ularga oid ayniyatlar.	4	aqliy hujum
10.	Umumlashgan o'rinlashtirishlar va kombinasiyalar. Takrorli kombinatsiyalar. Takrorli o'rin almashtirishlar, o'rinlashtirishlar va gruppalashlar.	4	aqliy hujum
11.	Graflar va graf modellari. Graf terminologiyasi va graflarning maxsus tiplari.	4	slaydlar orqali prezentasiya qilinadi
12.	Graflarning berilish usullari. Bog'*lanishli* graflar. Eng qisqa yo'l muammosi. Graf ustida sodda amallar.	2	slaydlar orqali prezentasiya qilinadi
13.	Ehtimollik ta'rifi. Shartli ehtimollik. Hodisalar bog'liqsizligi. Bernulli formulasi.	2	aqliy hujum
14.	Tasodifiy miqdor va uning taqsimot funksiyasi. Taqsimot funksiyaning xossalari.	2	aqliy hujum
	Jami:	**38**	

Mustaqil ta'lim:	**Amaliy mashg'ulotlarga tayyorgarlik 38 soat**
	1.Sonli funksiyalar. Primitiv rekursiv funksiyalar.
	2.Mulhaza. Mantiqiy bog`lovchilar. Formula, qismiy formula. Formulalarning teng kuchliligi. Chinlilik jadvali.
	3.Bul funksiyalari va ularning berilish usullari. Mantiqiy jo'mraklar. Mantiqiy sxemalarni minimallashtirish.
	4.Mulohazalar algebrasi formulasi-ning normal shakllari. Mulohazalar hisobi. Keltirib chiqarish.
	5.Mulohazalar mantiqining tatbiqlari.
	6.Isbot tushunchasi. Isbotlanuvchi formula ta'rifi. Teorema tushunchasi.
	7.Biriktirilgan (ichma ich joylashgan) kvantorlar.

	8.Algoritm tushunchasi va uning xususiyatlari. Tyuring mashinasi. Algoritmlar nazariyasining asosiy gipotezasi
	9.Rekursiv ta'riflar va tuzilmaviy induksiya. Rekursiv algoritmlar. Rekursiya.
	10.Isbotlashlarning usullari va strategiyasi
	11.Umumlashgan o'rinlashtirishlar va kombinasiyalar. Rekurrent munosabatlarni yechish
	12.Kombinatorika asoslari. O'rinlashtirishlar va kombinasiyalar. Binomial koeffisiyentlar va ularga oid ayniyatlar.
	13.Formal grammatika asosiy tushunchalari.
	14.Umumlashgan o'rinlashtirishlar va kombinasiyalar. Takrorli kombinatsiyalar. Takrorli o'rin almashtirishlar, o'rinlashtirishlar va gruppalashlar.
	15.Rekurrent munosabatlarning tatbiqlari. Chiziqli rekurrent munosabatlarni yechish.
	16.Graflar va graf modellari. Graf terminologiyasi va graflarning maxsus tiplari.
	17.Graflarning berilish usullari. Bog'lanishli graflar. Eng qisqa yo'l muammosi. Graf ustida sodda amallar.
	18.Ehtimollik ta'rifi. Shartli ehtimollik. Hodisalar bog'liqsizligi. Bernulli formulasi.
	19.Tasodifiy miqdor va uning taqsimot funksiyasi. Taqsimot funksiyaning xossalari.

№	Mavzular	Amaliy mashg'ulot soati	Pedagogik va axborot texnologiyalari
1.	To'plamlar va ular ustida amallar. Munosabatlar. Binar munosabatlar. Funksiyalar.	4	aqliy hujum
2.	Maxsus binar munosabatlar. Ekvivalentlik munosabati. Tartiblangan to'plamlar.	4	aqliy hujum
3.	Mulhaza. Mantiqiy bog`lovchilar. Formula, qismiy formula. Formulalarning teng kuchliligi. Chinlilik jadvali.	2	aqliy hujum
4.	Mulohazalar algebrasi formulasi-ning normal shakllari. Mulohazalar hisobi. Keltirib chiqarish.	2	slaydlar orqali prezentasiya qilinadi
5.	Rekursiv ta'riflar va tuzilmaviy induksiya. Rekursiv algoritmlar. Rekursiya.	4	aqliy hujum
6.	Markov normal algoritmlari. Hisoblanuvchi funksiyalar	2	guruhlarda ishlash
7.	Kombinatorika asoslari. O'rinlashtirishlar va kombinasiyalar. Binomial koeffisiyentlar va ularga oid ayniyatlar.	4	aqliy hujum
8.	Umumlashgan o'rinlashtirishlar va kombinasiyalar. Takrorli kombinatsiyalar. Takrorli o'rin almashtirishlar, o'rinlashtirishlar va gruppalashlar.	4	guruhlarda ishlash
9.	Graflar va graf modellari. Graf terminologiyasi va graflarning maxsus tiplari.	2	aqliy hujum
10.	Graflarning berilish usullari. Bog'lanishli graflar. Eng qisqa yo'l muammosi. Graf ustida sodda amallar.	4	aqliy hujum
11.	Ehtimollik ta'rifi. Shartli ehtimollik. Hodisalar bog'liqsizligi. Bernulli formulasi.	4	guruhlarda ishlash
12.	Tasodifiy miqdor va uning taqsimot funksiyasi. Taqsimot funksiyaning xossalari.	2	aqliy hujum
Jami:		**38**	

Maslahatlar va topshiriqlarni topshirish vaqti	Chorshanba	Soat 15^{30}	109
Bilimlarni baholash usullari, mezonlari va tartibi:			
Baholash usullari	Fan bo`yicha baholash oraliq, joriy va yakuniy nazorat ishida amalga oshiriladi. Bundagi joriy nazoratda talabaning amaliy mashg`ulotlardagi ishtiroki, mustaqil misollar yechishi, shuningdek nazariy bilimlarni amaliyotga qo`llay olishiga e'tibor qaratiladi. Oraliq va yakuniy nazorat ishlari yozma ish tarzida o`tkazlib, unda nazariy savollarga javob yozish va misollar yechish talab etiladi. Nazariy savolga javob berish va misollar yechishga bir xil baho y'ni joriy nazoratga qo`yiladigan umumiy bahoning o`rtacha qiymati o`yiladi.		
Baholash mezonlari	Talabaning "Matematik mantiq" fani bo'yicha bilim, ko'nikma va malakalarini baholashda quyidagi mezonlarga asoslaniladi: **a) 86-100 ball** uchun talabaning bilim darajasi quyidagilarga javob berishi lozim: to'plamlar, ular ustida amallarni bajarishni biladigan, munosabatlar, binar munosabatlar, mulhaza, mantiqiy bog'lovchilar, formula, qismiy formula, formulalarning teng kuchliligi, chinlilik jadvali, mulohazalar algebrasi formulasining normal shakllari, mulohazalar hisobi, keltirib chiqarish,rekursiv ta'riflar va tuzilmaviy induksiya, rekursiv algoritmlar, kombinatorika asoslari, o'rinlashtirishlar va kombinasiyalar, binomial koeffisiyentlar va ularga oid ayniyatlar, rekurrent munosabatlarning tatbiqlari, chiziqli rekurrent munosabatlarni yechish, graflar va graf modellari, graf terminologiyasi va graflarning maxsus tiplari, ehtimollik ta'rifi, shartli ehtimollik, hodisalar bog'liqsizligi, Bernulli formulasi, tasodifiy miqdor va uning taqsimot funksiyasi, taqsimot funksiyaning xossalari haqidagi nazariy bilimlarga ega bo'lishi, ushbu nazariy bilimlarni amalda qo'llay olishi, kasbiy sohalarida fanning amaliy imkoniyatlaridan foydalana olishi va ushbu mavzularga oid misollarni mutaqil ravishda ishlay olish ko'nikma va malakalariga ega bo'lishi; **b) 71-85 ball** uchun talabaning bilim darajasi quyidagilarga javob berishi lozim: to'plamlar, ular ustida amallarni bajarishni biladigan, munosabatlar, mantiqiy bog'lovchilar, formula, qismiy formula, formulalarning teng kuchliligi, chinlilik jadvali, mulohazalar algebrasi formulasining normal shakllari, mulohazalar hisobi, rekursiv ta'riflar va tuzilmaviy induksiya, rekursiv algoritmlar, kombinatorika asoslari, o'rinlashtirishlar va kombinasiyalar, binomial koeffisiyentlar va ularga oid ayniyatlar, rekurrent munosabatlarning tatbiqlari, chiziqli rekurrent munosabatlarni yechish, graflar, graf terminologiyasi, ehtimollik ta'rifi, shartli ehtimollik, Bernulli formulasi, tasodifiy miqdor va uning taqsimot funksiyasi, taqsimot funksiyaning xossalari haqidagi nazariy bilimlarga ega bo'lishi, ushbu nazariy bilimlarni amalda qo'llay olishi, kasbiy sohalarida fanning amaliy imkoniyatlaridan foydalana olishi va ushbu mavzularga oid misollarni mutaqil ravishda ishlay olish ko'nikma va malakalariga ega bo'lishi **v) 55-70 ball** uchun talabaning bilim darajasi quyidagilarga javob berishi lozim: to'plamlar, ular ustida amallarni bajarishni biladigan, munosabatlar, binar munosabatlar, mulhaza, mantiqiy bog'lovchilar,		

	formula, qismiy formula, formulalarning teng kuchliligi, chinlili jadvali, mulohazalar algebrasi formulasining normal shakllar mulohazalar hisobi, keltirib chiqarish,rekursiv ta'riflar va tuzilmavi induksiya, rekursiv algoritmlar, kombinatorika asoslari, o'rinlashtirishla va kombinasiyalar, rekurrent munosabatlarning tatbiqlari, chiziql rekurrent munosabatlarni yechish, graflar va graf modellari, ehtimolli ta'rifi, shartli ehtimollik, Bernulli formulasi, tasodifiy miqdor, taqsimo funksiyaning xossalari haqidagi nazariy bilimlarga ega bo'lishi, kasbiy sohalarida fanning amaliy imkoniyatlaridan foydalanish, ushbu mavzularga oid misollarni mutaqil ravishda ishlay olish ko'nikmasiga ega bo'lishi; **g)** fanning nazariy qismini tushunmaydigan, amaliy qo'llash imkoniyatlari juda past, misollarni mutaqil ravishda ishlata olmaydigan talabalarga **0-54 ball** va undan past ball qo'yiladi. 100 ballik sistema asosida quyidagi jadvalga ko'ra reyting nazorati amalga oshiriladi. Maksimal ball – 100 ballSaralash ball – 55 ball JN maks. ball – 4086-100 ball – «5» baho ON maks. ball – 30 71-85 ball – «4» baho YN maks. ball – 30 55-70 ball – «3» baho 0-54 ball – «2» baho
Axborot resurs baza:	
Asosiy adabiyotlar:	1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012. 2. Mendelson E. Introduction to mathematical logic. Sixth edition. New York.Taylor&Francis Group,2015 3. H.T. To'rayev, I. Azizov Matematik mantiq va diskret matematika. 1,2 jild. "Tafakkur-Bo'stoni", Toshkent, 2011y. 4. Kasimov N.X., Dadajonov R.N., Ibragimov F.N. Diskret matematika va matematik mantiq asoslari (o'quv qo'llanma), T., O'zbekiston Milliy universiteti, 2016.
Qo'shimcha adabiyotlar:	5.To'xtasinov M., Diskret matematika va matematik mantik.- T., Universitet, 2005. 6.To'rayev X.T., Matematik mantiq va diskret matematika.- T., O'qituvchi, 2003. 7.Yunusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2003. 8.Mendelson E. Vvedeniye v matematicheskuyu logiku. M.: Nauka, 1984 9.Lavrov I.A., Maksimova L.L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M.: Fiz.-mat. literatura, 1995. 10. Yershov Yu. L., Palyutin Ye. A. Matematicheskaya logika. M.: Nauka, 1987.
Internet resurslar:	1. www.zivo-net.uz 2. http://dimacs.rutgers.edu/ 3. http://epubs.siam.org/sam-bin/dbq/toclist/SIDMA 4. http://www.vsppub.com/journals/jn-DisMatApp.html 5. http://www.uni-bonn.de/logic/world.html 6. http://www.math.uni-bonn.de/people/logic/ 7. http://www.math.uu.se/logik/logic-server/

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

Ro'yxatga olindi:

№ BD-5111200-2.01

2016-yil "8" 08

Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi

2016-yil "25" 08

MATEMATIK MANTIQ

FAN DASTURI

Bilim sohasi: 100 000 – Gumanitar soha

Ta'lim sohasi: 110000 – Pedagogika
120000 – Gumanitar fanlar

Ta'lim yo'nalishlari: 5111200 – O'zbek tili va adabiyoti
5120100 – Filologiya va tillarni o'qitish (o'zbek tili)
5120900 – O'zbek-ingliz tarjima nazariyasi va amaliyoti

Toshkent – 2016

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining 2016-yil «25» 08 dagi «355» – sonli buyrug'ining 2 - ilovasi bilan fan dasturi ro'yxati tasdiqlangan.

Fan dasturi Oliy va o'rta maxsus, kasb-hunar ta'limi yo'nalishlari bo'yicha O'quv-uslubiy birlashmalar faoliyatini Muvofiqlashtiruvchi Kengashning 2016 - yil «8» 08 dagi «3» – sonli bayonnomasi bilan ma'qullangan.

Fanning o'quv dasturi Toshkent davlat o'zbek tili va adabiyoti universitetida ishlab chiqildi.

Tuzuvchilar:

Xudoyberganov M.O'. -fizika-matematika fanlari nomzodi, "Matematika va axborot kommunikasiya texnologiyalari" kafedrasi mudiri

Kasimov N.X. -fizika-matematika fanlari doktori, "Matematika va axborot kommunikasiya texnologiyalari" kafedrasi professori;

Taqrizchilar:

Ibragimov F. - O'zMU, fizika-matematika fanlari nomzodi, "Algebra va funksional analiz" kafedrasi dosenti*(turdosh OTM)*;

Pirmatov Sh. - TDTU, Oliy matematika kafedrasi, fizika-matematika fanlari nomzodi *(kadrlar buyurtmachisi)*.

Fan dasturi Toshkent Davlat o'zbek tili va adabiyoti universiteti Kengashida ko'rib chqilgan va tavsiya qilingan (2016- yil 29 avgustdagi « 1 » - sonli bayonnoma)

Fanning dolzarbligi

O'zbek tilining jahon axborot tarmog'ida munosib o'rin egallashini ta'minlash, uning kompyuter uslubini, o'zbek tili va dunyodagi yetakchi xorijiy tillar asosida tarjima dasturlari va lug'atlar, elektron darsliklar yaratish bilan bog'liq ilmiy-metodik ishlanmalar, amaliy tavsiyalar tayyorlash va bu borada erishilgan natijalarni amaliyotga keng tatbiq etish uchun matematik mantiq fanining tutgan o'rni beqiyos.

«Matematik mantiq» fanida mantiq, mulohazalar algebrasi, kvantorlar, predikatlar, isbot, to'plamlar nazariyasi elementlari, funksiyalar, kombinatorika elementlari, graflar, munosabatlar, binar munosabatlar, ehtimollar nazariyasi elementlarining asosiy tushunchalari va ularga oid bo'lgan masalalar ko'riladi.

«Matematik mantiq" kursi kompyuter va kompyuter lingvistikasiga oid barcha fanlar bilan bog'langan. Kurs mos ta'lim yo'nalishi bakalavrlarini tayyorlashda yetakchi o'rin tutadi.

Fanning o'quv rejasidagi boshqa fanlar bilan o'zaro bog'liqligi va uslubiy jihatdan uzviyligi

"Matematik mantiq" fani matematika va tabiiy-ilmiy fanlar blokiga kiritilgan kurs hisoblanib, 1 kursning 1 semestrida o'qitiladi.

Matematikada matematik mantiq fanining tutgan o'rni beqiyos. Ko'pgina matematik obyektlarni o'rganishda, avvalo ularga mos keladigan matematik modellar tuzib olinadi. Zamonaviy kompyuterlarda dasturlar tuzishda va axborot texnologiyalarining nazariy asoslarida matematik mantiq metodlari keng qo'llaniladi.

«Matematik mantiq» fani matematika va informatikaning boshqa bo'limlaridan foydalanadi va aksincha. Masalan, axborotlar nazariyasi, Ma'lumotlar bazasini boshqarish tizimlari, dasturlash asoslari va kompyuter lingvistikasi bilan chambarchas bog'langan.

Fanning ilm-fan va ishlab chqarishdagi o'rni

"Matematik mantiq" fani talabalarda mantiqiy fikrlashni qobilyatini rivojlantiradi va matematik lingvistika, graflar nazariyasi, kombinatorika elementlarini o'rgatadi va natijada ularni abstrakt fikrlash madaniyatini yuksak pog'onalarga ko'taradi.

Fanni o'qitishda zamonaviy axborot va pedagogik texnologiyalar hamda o'quv mashg'ulotlarini loyihalash

Talabalarning "Matematik mantiq"fanini o'zlashtirishlari uchun o'qitishning ilg'or va zamonaviy usullaridan foydalanish, yangi informasion-pedagogoik texnologiyalarni tadbiq qilish muhim ahamiyatga egadir. Fanni o'zlashtirishda darslik, o'quv va uslubiy qollanmalar, ma'ruza matnlari,tarqatma materiallar, elektron materiallar, keys texnologiyalaridan foydalaniladi. Ma'ruza va amaliy mashg'ulotlarida o'qitshning interaktiv usullari(vizual, muammoli, mualliflik ma'ruzalari, ikki tomonlama tahlil, Inset, klaster, "Venna", Sinkveyn" va boshqalar)dan foydalaniladi.

Fan o'qituvchsi tomonidan pedagogik va modulli texnologiya tamoyillari asosida fan o'quv mashg'ulotlarining loyihalari ishlab chqiladi.

Fan modulining dasturi(module syllabus)

O'quv kursining to'liq nomi:	**Matematik mantiq**	
Kursning qisqacha nomi:	**MM**	**Kod: MM**
Kafedra:	**Matematika va axborot kommunikasiya texnologiyalari"**	
O'qituvch haqida ma'lumot:	F.I.Sh.	E-mail
Semestr va o'quv	**1 semestr, 19 hafta**	

kursining davomiyligi		
O'quv soatlari hajmi:	**Jami:**	**132**
	shuningdek:	
	ma'ruza	38
	amaliy	38
	mustaqil ta'lim	56
O'quv kursining statusi	Matematika va tabiiy- ilmiy fanlar	
Dastlabki tayyorgarlik:	Kurs akademik litsey va kasb-hunar kollejlarida algebra va matematik analiz fanlaridan o'zlashtigan bilimlariga asoslanadi.	

Fanning predmeti va mazmuni: - talabalarga mantiqiy fikrlash, mulohaza yuritish metodlar kombinatorika elementlari va ehtimollar nazariyasining dastlaki tushunchalarini o'rgatish va ular masalalar yechishda qo'llashni o'rgatishga yo'naltirilgan.

Fanni o'qitishdan maqsad - talabalarda algoritmik va mantiqiy fikrlash qobiliyatini rivojlantiris va matematik lingvistika asoslarini o'rgatishdan iboratdir.

Fanning vazifalari - talabalarga diskret matematika va matematik mantiq asoslarini berish, olga nazariy bilimlarini amaliyotga qo'llay bilishga o'rgatishdan va oqibat natijada ularni abstrakt fikrlas madaniyatini yuksak pog'onalarga ko'tarishdan iboratdir.

Matematik mantiq elementlari, algoritmlar va ularning murakkablik nazariyasi, graflar va maxsu binar munosabatlar, kombinatorika asoslari, dasturlash asoslari, elektron lug'atlar va boshqa diskr matematikani tashkil qiluvchi asosiy tushunchalar bilan tanishtirish kursning asosiy vazifasidir.

«Matematik mantiq» o'quv fanini o'zlashtirish jarayonida amalga oshiriladigan masalalar doirasid bakalavr:

- matematikada matematik mantiq fanining tutgan o'rni va uning rivojlanish tarixiy etaplar to'plamlar va ular ustida amallar, munosabatlar, mulohazalar, algoritmlar, kombinatorika, grafla haqida ***bilishi kerak***;
- to'plamlar ustida amallar bajarish, rostlik jadvalidan foydalanish, formulalarni mukamma normal shaklga keltirish, kombinatorik ayniyatlardan foydalanish, graflar ustida amallar bajaris ***ko'nikmalariga ega bo'lishi kerak;***
- to'plamlar nazariyasining asosiy faktlaridan foydalanish, mantiqiy fikrlash prinsiplarini tatbi etish, programmalarni korrektligini tekshirish, olingan nazariy bilimlarni konkret muammolarn yechishga tatbiq etish ***malakasiga ega bo'lishi kerak.***

Kursining tematik tarkibi va mazmuni

t/r	mavzusi	ma'ruza	amaliy	mustaqil ish
1.	To'plamlar va ular ustida amallar. Munosabatlar. Binar munosabatlar. Funksiyalar.	2	4	
2.	Sonli funksiyalar. Primitiv rekursiv funksiyalar.			2
3.	Maxsus binar munosabatlar. Ekvivalentlik munosabati. Tartiblangan to'plamlar.	2	4	
4.	Mulhaza. Mantiqiy bog'lovchilar. Formula, qismiy formula. Formulalarning teng kuchliligi. Chinlilik jadvali.	4	2	4
5.	Bul funksiyalari va ularning berilish usullari. Mantiqiy jo'mraklar. Mantiqiy sxemalarni minimallashtirish.			2
6.	Mulohazalar algebrasi formulasi-ning normal shakllari. Mulohazalar hisobi. Keltirib chiqarish.	4	2	4
7.	Mulohazalar mantiqining tatbiqlari.			2
8.	Isbot tushunchasi. Isbotlanuvchi formula ta'rifi. Teorema tushunchasi.	2		4
9.	Biriktirilgan (ichma ich joylashgan) kvantorlar.			2
	Joriy nazorat (JN)			

10.	Algoritm tushunchasi va uning xususiyatlari. Tyuring mashinasi. Algoritmlar nazariyasining asosiy gipotezasi	2		2
11.	Rekursiv ta'riflar va tuzilmaviy induksiya. Rekursiv algoritmlar. Rekursiya.	2	4	4
12.	Markov normal algoritmlari. Hisoblanuvchi funksiyalar	2	2	
13.	Isbotlashlarning usullari va strategiyasi			2
14.	Umumlashgan o'rinlashtirishlar va kombinasiyalar. Rekurrent munosabatlarni yechish			2
15.	Kombinatorika asoslari. O'rinlashtirishlar va kombinasiyalar. Binomial koeffisiyentlar va ularga oid ayniyatlar.	4	4	4
16.	Formal grammatika asosiy tushunchalari.			2
	Oraliq nazorat (ON)			
17.	Umumlashgan o'rinlashtirishlar va kombinasiyalar. Takrorli kombinatsiyalar. Takrorli o'rin almashtirishlar, o'rinlashtirishlar va gruppalashlar.	4	4	4
18.	Rekurrent munosabatlarning tatbiqlari. Chiziqli rekurrent munosabatlarni yechish.			4
19.	Graflar va graf modellari. Graf terminologiyasi va graflarning maxsus tiplari.	4	2	2
20.	Graflarning berilish usullari. Bog'lanishli graflar. Eng qisqa yo'l muammosi. Graf ustida sodda amallar.	2	4	4
21.	Ehtimollik ta'rifi. Shartli ehtimollik. Hodisalar bog'liqsizligi. Bernulli formulasi.	2	4	4
	Joriy nazorat (JN)			
22.	Tasodifiy miqdor va uning taqsimot funksiyasi. Taqsimot funksiyaning xossalari.	2	2	2
	Yakuniy nazorat(YaN)			
	Jami	**38**	**38**	**56**

Ta'lim berish va o'qitish y	Ma'ruza, amaliy mashg'ulotlar, mustaqil ishlar (aylana stol, keys stadi, master-klaslar)
Mustaqil ishlar	O'quv loyihalar, guruhli taqdimot, referatlar, keyslar, dokladlar, krassvordlar, poster, prospect, esse va h.z.

Maslahatlar va topshiriqlarni topshirish vaqti	Kunlar	Vaqti	Aud.
1.			
2.			
3.			

Bilimlarni baholash usullari, mezonlari va tartibi	
JN va ON ning ballari ishchi dasturda beriladi	
Baholash usullari	Testlar, yozma ishlar, og'zaki so'rov, prezentasiyalar va h.z.
Fan bo'y'icha talabalar bilimini nazorat qilish va baholash	**Nazorat shakllari** Baholash turlari fan xususiyatidan kelib chiqqan holda so'rovlar, og'zaki savol-javob, yozma ish, test sinovlari yoki boshqa ko'rinishda o'tkazilishi mumkin.
86-100 ball	**Fan bo'yicha talabalar bilimini bahalash mezoni**

	- To`plamlar, mulohazalar shuningdek matematik mantiq elementlari to`g``risida to`liq ma`lumotga ega bo`lsa; - Fan bo'yicha mavzu materiallarining nazariy yoki amaliy ahamiyati haqida aniq tasavvurga ega bo'lsa; - Fan doirasida mustaqil erkin fikrlash qobiliyatini namoyon eta olsa; - Berilgan savollarga aniq va tushunarli javob bera olsa; - umumlashgan yechimlarni kompyuterda namoyish qilsa; - Mustaqil topshiriqlarni to'liq va aniq bajargan bo'lsa; - Fanga tegishli qo'shimcha ma'lumotlar, tahliliy hujjatlarni to'liq o'zlashtirgan bo'lsa; - Turli matematik mantiq masalalarni yechib, natijalarni izohlasa.
71-85 ball	- Talaba o'rganilayotgan xodisalar aloqadorligini bilish hamda ob'ekni tafsiflay olish ko'nikmasiga ega bo'lishi bilan birgalikda, qo'yilgan masalalarni sabab va oqibat aloqadorligini ochib bergan holda echa oladi, o'rganilayotgan nazariy bilimlarni amaliyot bilan bog'lay oladi va mustaqil mushohada qilaoladi; - Bilim va ko'nikmalar mazmunini tadbiq qila olish mahorati, bir tipdagi masalalarni echa olish, yozib olish va eslab qolish faoliyatini amalga oshiradi, bilimlarni amaliyotda qo'llay oladi; - Talaba mashg'ulotlarga tayyorlangan, dasturiy materiallarni biladi, mohiyatini tushunadi va tasavvurga ega.
55-70 ball	- Talabaning eshitganlari, ularga berilgan namunalar, taqdim etilgan algoritm va ko'rsatmalar asosida topshiriqlarni bajara oladi, mohiyatini tushunadi; - Talaba qator belgilar asosida ma'lum ob'ekni farqlash bilan birgalikda unga ta'rif bera oladi va o'quv materialini tushuntirib bera oladi va tasavvurga ega.
0-54 ball	- Talaba tasavvurga ega emas; - Talaba dasturiy materiallarni bilmaydi.
Fanga doir vedio ma'ruzalar,vedio roliklar:	
Glossariylar:	
Axborot resurs baza:	

ASOSIY QISM

Fanining nazariy mashg'ulotlari mazmuni

1-modul. Tayanch tushunchalar. Mulohazalar algebrasi.

To'plamlar va ular ustida amallar. Munosabatlar. Binar munosabatlar. Maxsus binar munosabatlar. Ekvivalentlik munosabati. Tartiblangan to'plamlar. Mulhaza. Mantiqiy bog'lovchilar. Formula, qismiy formula. Formulalarning teng kuchliligi. Dizyunktiv va konyunktiv normal formalar. Mukammal dizyunktiv va konyunktiv normal formalar. Chinlilik jadvali. Mulohazalar algebrasi formulasining normal shakllari. Mulohazalar hisobi uchun aksiomalar sistemasi.

Mulohazalar hisobi. Keltirib chiqarish. Isbot tushunchasi. Isbotlanuvchi formula ta'rifi. Teorema tushunchasi. Mulohazalar algebrasi formulasining normal shakllari.

2-modul. Algoritmlar.

Algoritm tushunchasi va uning xususiyatlari. Yechiluvchi va sanaluvchi to`plamlar. Rekursiv algoritmlar. Primitiv rekursiya operatori. Minimizatsiya operatori. Rekursiv funksiyalar. Tyuring mashinasi. Algoritmlar nazariyasining asosiy gipotezasi. Markovning normal algoritmlari. Markov bo'yicha qismiy hisoblanuvchi va hisoblanuvchi funksiyalar. Algoritmik yechilmovchi muammolar. Rekurrent munosabatlarning tatbiqlari. Chiziqli rekurrent munosabatlarni yechish.

3-modul. Kombinatorika.

Kombinatorika asoslari. Kombinatorika haqida umumiy tushunchalar. Kombinatorika predmeti va paydo bo'lish tarixi. Matematik induksiya. Matematik induksiya usuli. Tengliklarni isbotlash. Rekursiv ta'riflar va tuzilmaviy induksiya. Kombinatorikada ko'p qo'llaniladigan usul va qoidalar. O'rinlashtirishlar va kombinasiyalar. Nyuton binomi haqida umumiy ma'lumotlar. Binomial koeffisiyentlar va ularga oid ayniyatlar. Umumlashgan o'rinlashtirishlar va kombinasiyalar. O'rin almashtirishlar. O'rinlashtirishlar. Gruppalashlar. Takrorli kombinatsiyalar. Takrorli o'rin almashtirishlar. Takrorli o'rinlashtirishlar. Takrorli gruppalashlar.

4-modul. Graflar.

Graflar nazariyasining boshlang'ich ma'lumotlari. Graflar va graf modellari. Graf terminologiyasi va graflarning maxsus tiplari. Grafning geometrik ifodalanishi, uchlar. Graflarning berilish usullari. Grafning maxsus turdagi ko'phad yordamida berilishi. Qo'shnilik matritsalari. Insidentlik matritsalari. Grafning abstrakt ta'rifi va u bilan bog'liq boshlang'ich tushunchalar. Qirralar va yoylar insidentligi. Bog'lanishli graflar. Eng qisqa yo'l muammosi. Graf ustida sodda amallar.

5 modul. Ehtimollar nazariyasi

Ehtimollik ta'rifi. Shartli ehtimollik. Hodisalar bog'liqsizligi. Tasodifiy hodisalar, ularning klassifikatsiyasi. Hodisalar ustida amallar. Ehtimollikning statistik ta'rifi. Ehtimollikning klassik ta'rifi. Ehtimollikning geometrik ta'rifi. Bernulli formulasi. Tasodifiy miqdor va uning taqsimot funksiyasi. Taqsimot funksiyaning xossalari. Tasodifiy miqdor tushunchasi. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni. Taqsimot funksiyasi va uning xossalari. Zichlik funksiyasi va uning xossalari

Amaliy mashg'ulotlar

Amaliy mashg'ulotlarini tashkil etish bo'yicha ko'rsatma va tavsiyalar

Amaliy mashg'ulotlarini o'tkazishda quyidagi didaktik tamoyillarga amal qilinadi:

- amaliy mashg'ulotlarining maqsadini aniq belgilab olish;
- o'qituvchining innovasion pedagogik faoliyati bo'yicha bilimlarni chuqurlashtirish imkoniyatlariga talabalarda qiziqish uyg'otish;
- talabada natijani mustaqil ravishda qo'lga kiritish imkoniyatini ta'minlash;
- talabani nazariy-metodik jihatdan tayyorlash.

Amaliy mashg'ulotlar nafaqat aniq mavzu bo'yicha bilimlarni yakunlash, balki talabalatni tarbiyalash manbai hamdir. Shuningdek hamma mavzularga doir va yetarli miqdordagi masalalar yechish nazarda tutiladi.

Amaliy mashg'ulotlarning taxminiy mavzulari:

1. To'plamlar. To'plamlar ustida amallar. Funksiyalar.
2. Munosabatlar. Binar munosabatlar.
3. Maxsus binar munosabatlar. Ekvivalentlik munosabati.
4. Tartiblangan to'plamlar.
5. Mulhaza. Mantiqiy bog`lovchilar. Formula, qismiy formula. Formulalarning teng kuchliligi. Chinlilik jadvali.
6. Mulohazalar algebrasi formulasining normal shakllari. Mulohazalar hisobi. Keltirib chiqarish.
7. Markov normal algoritmlari. Hisoblanuvchi funksiyalar.
8. Rekursiv ta'riflar va tuzilmaviy induksiya.
9. Rekursiv algoritmlar. Rekursiya.

10. Sodda kombinatorik masalalar. O‘rinlashtirishlar va kombinasiyalar.
11. Binomial koeffisiyentlar va ularga oid ayniyatlar.
12. Rekurrent munosabatlarning tatbiqlari. Chiziqli rekurrent munosabatlarni yechish.
13. Graf terminologiyasi va graflarning maxsus tiplari.
14. Graflarning berilish usullari va ular ustida amallar.
15. Eng qisqa yo‘l muammosi.
16. Ehtimollik ta‘rifi. Shartli ehtimollik.
17. Hodisalar bog‘liqsizligi. Bernulli formulasi.

Laboratoriya ishlarini tashkil etish bo‘yicha ko‘rsatmalar

Fan bo‘yicha laboratoriya ishlari namunaviy o‘quv rejada ko‘zda tutilmagan.

Kurs ishini tashkil etish

Fan bo‘yicha kurs ishi namunaviy o‘quv rejada ko‘zda tutilmagan.

Mustaqil ishlarni tashkil etish shakli va mazmuni

Mustaqil ishning maqsadi olingan nazariy bilimlarni mustahkamlash, belgilangan mavzular asosida qo‘shimcha bilim olishdan iborat. Bunda ushbu ishlarni bajaradilar:
- amaliy mashg‘ulotlarga tayyorgarlik;
- nazariy tayyorgarlik ko‘rish;
- uy vazifalarni bajarish;
- o‘tilgan materiallar mavzularini qaytarish;
- mustaqil ish uchun mo‘ljallangan nazariy bilim mavzularini o‘zlashtirish.

Bunda talabalar ma‘ruzalarda olgan bilimlarini amaliy mashg‘ulotlarni bajarishlari bilan mustahkamlashi hamda ba‘zi mavzularni tushunishi hamda ularga oid masalalarni yechishlari kerak.

Mustaqil ish mavzularini o‘zlashtirish ta‘lim jarayonida uzluksiz nazorat qilib boriladi va yozma hisobot sifatida topshiriladi.

Tavsiya etilayotgan mustaqil ishlarning mavzulari

1. Mulohazalar mantiqining tatbiqlari.
2. Biriktirilgan(ichma ich joylashgan) kvantorlar.
3. Isbotlashlarning usullari va strategiyasi.
4. Funksiyalar xossalari.
5. Matrisalar ustida amallar.
6. Saralash va izlash algoritmlar va ularning murakkabligi.
7. Rekursiv ta‘riflar va tuzilmaviy induksiya.
8. Programmaning korrektligi.
9. Umumlashgan o‘rinlashtirishlar va kombinasiyalar.
10. “Bo‘lakla va boshqar” algoritmi va rekurrent munosabatlar.
11. Maksimal oqimni topish algoritmlari.
12. Daraxtlarning tatbiqlari. Binar daraxtlar.
13. Minimal tayanch daraxtlari aniqlash algoritmlari.
14. Formal grammatika asosiy tushunchalari.
15. Sonli funksiyalar. Primitiv rekursiv funksiyalar.
16. Bul funksiyalari va ularning berilish usullari. Mantiqiy sxemalarni minimallashtirish.

Izoh: Mustaqil ta‘lim soatlari hajmlaridan kelib chiqqan holda ishchi dasturda mazkur mavzular ichidan mustaqil ta‘lim mavzulari shakllantiriladi.

Dasturning axborot-uslubiy ta'minoti

Fanni o'qitish jarayonida mavjud nashr qilingan o'quv qo'llanmalari va elektron manbalar, Internet tizimidagi mos ta'lim saytlari ma'lumotlaridan http://www.zionet.uz va shunga o'xshash saytlaridan foydalaniladi. Kompyuter texnikasini qo'llash bilan bog'liq zamonaviy pedagogik va informasion texnologiyalar asoslangan o'qitish metodlari qo'llaniladi. Amaliy mashg'ulotlardaaqliy hujum, klaster, blits-so'rov, guruh bilan ishlash, inset, taqdimot, keys-stadi kabi usul va texnikalardan keng foydalaniladi.

Foydalaniladigan adabiyotlar ro'yxati

Asosiy adabiyotlar

11. Mendelson E. Introduction to mathematical logic. Sixth edition. New York.Taylor&Francis Group,2015
12. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012.
13. H.T. To'rayev, I. Azizov Matematik mantiq va diskret matematika. 1,2 jild. "Tafakkur-Bo'stoni", Toshkent, 2011y.
14. Kasimov N.X., Dadajonov R.N., Ibragimov F.N. Diskret matematika va matematik mantiq asoslari (o'quv qo'llanma), T., O'zbekiston Milliy universiteti, 2016.

Qo'shimcha adabiyotlar

1. To'xtasinov M., Diskret matematika va matematik mantik.- T., Universitet, 2005.
2. To'rayev X.T., Matematik mantik va diskret matematika.- T., O'qituvchi, 2003.
3. Yunusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2003.
4. Lavrov I.A., Maksimova L.L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M.: Fiz.-mat. literatura, 1995.
5. Yershov Yu. L., Palyutin Ye. A. Matematicheskaya logika. M.: Nauka, 1987.

Internet saytlari

1. http://epubs.siam.org/sam-bin/dbq/toclist/SIDMA
2. http://www.vsppub.com/journals/jn-DisMatApp.html
3. http://www.uni-bonn.de/logic/world.html
4. http://www.math.uni-bonn.de/people/logic/
5. http://www.math.uu.se/logik/logic-server/

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
ALISHER NAVOIY NOMIDAGI TOSHKENT DAVLAT O'ZBEK TILI VA ADABIYOTI UNIVERSITETI
MATEMATIKA VA AXBOROT KOMMUNIKATSIYA TEXNOLOGIYALARI KAFEDRASI

RO'YXATGA OLINDI

№ БD 5120900/5120100
5111200 – 2.01
2016-yil " 4 " 09

"TASDIQLAYMAN"
O'quv ishlari bo'yicha prorektor
__________ I. YO'LDOSHEV
2016-yil " 9 " avgust

MATEMATIK MANTIQ
fanining

ISHCHI O'QUV DASTURI

Ta'lim yo'nalishi: 5111200 – O'zbek tili va adabiyoti
5120100 – Filologiya va tillarni o'qitish (o'zbek tili)
5120900 – O'zbek-ingliz tarjima nazariyasi va amaliyoti

Umumiy soat	**106 soat**
Shundan:	
Ma'ruza	38 soat
Amaliy mashg'ulotlari	38 soat
Mustaqil ta'lim	56 soat

Toshkent – 2016

Fanning ishchi dasturi O'zbek tili va adabiyoti, Filologiya va tillarni o'qitish (o'zbek tili) va O'zbek-ingliz tarjima nazariyasi va amaliyoti yo'nalishlari o'quv dasturi va o'quv rejasiga muvofiq ishlab chiqildi.

Tuzuvchilar:

Xudoyberganov M.O'. - fizika-matematika fanlari nomzodi, "Matematika va axborot kommunikatsiya texnologiyalari" kafedrasi mudiri;

Kasimov N.X. - fizika-matematika fanlari doktori, "Matematika va axborot kommunikatsiya texnologiyalari" kafedrasi professori.

Taqrizchilar:

Ibragimov F.N. - fizika-matematika fanlari nomzodi, O'zMU, "Algebra va funksional analiz" kafedrasi dosenti.

Raxmonov F. - "Matematika va axborot kommunikatsiya texnologiyalari" kafedrasi o'qituvchsi

Fanning ishchi o'quv dasturi "Matematika va axborot kommunikasiya texnologiyalari" kafedrasining 2016-yil "26"-avgustdagi majlisida muhokama etilgan va ma'qullangan. (Bayonnoma № 1)

Kafedra mudiri________________ M.Xudoyberganov

Fanning ishchi o'quv dasturi O'zbek-ingliz tarjima fakulteti Kengashining 2016-yil "27"-avgustdagi " 1 "-sonli yig'ilishida muhokama etilgan va foydalanishga tavsiya qilingan.

Fakultet dekani ________________ Sh.R.Usmonova

Mazkur ishchi o'quv dasturi Toshkent Davlat o'zbek tili va adabiyoti universiteti O'quv-uslubiy kengashining 2016-yil "29"-avgustdagi majlisida tasdiqlangan. (Bayonnoma №)

O'quv-uslubiy bo'lim boshlig'i ____________ A.I.Sayfullaev

Fanning dolzarbligi

O‘zbek tilining jahon axborot tarmog‘ida munosib o‘rin egallashini ta‘minlash, uning kompyuter uslubini, o‘zbek tili va dunyodagi yetakchi xorijiy tillar asosida tarjima dasturlari va lug‘atlar, elektron darsliklar yaratish bilan bog‘liq ilmiy-metodik ishlanmalar, amaliy tavsiyalar tayyorlash va bu borada erishilgan natijalarni amaliyotga keng tatbiq etish uchun matematik mantiq fanining tutgan o‘rni beqiyos.

«Matematik mantiq» fanida mantiq, mulohazalar algebrasi, kvantorlar, predikatlar, isbot, to‘plamlar nazariyasi elementlari, funksiyalar, kombinatorika elementlari, graflar, munosabatlar, binar munosabatlar, ehtimollar nazariyasi elementlarining asosiy tushunchalari va ularga oid bo‘lgan masalalar ko‘riladi.

«Matematik mantiq" kursi kompyuter va kompyuter lingvistikasiga oid barcha fanlar bilan bog‘langan. Kurs mos ta‘lim yo‘nalishi bakalavrlarini tayyorlashda yetakchi o‘rin tutadi.

Fanning o‘quv rejasidagi boshqa fanlar bilan o‘zaro bog‘liqligi va uslubiy jihatdan uzviyligi

"Matematik mantiq" fani matematika va tabiiy-ilmiy fanlar blokiga kiritilgan kurs hisoblanib, 1 kursning 1 semestrida o‘qitiladi.

Matematikada matematik mantiq fanining tutgan o‘rni beqiyos. Ko‘pgina matematik obyektlarni o‘rganishda, avvalo ularga mos keladigan matematik modellar tuzib olinadi. Zamonaviy kompyuterlarda dasturlar tuzishda va axborot texnologiyalarining nazariy asoslarida matematik mantiq metodlari keng qo‘llaniladi.

«Matematik mantiq» fani matematika va informatikaning boshqa bo‘limlaridan foydalanadi va aksincha. Masalan, axborotlar nazariyasi, Ma‘lumotlar bazasini boshqarish tizimlari, dasturlash asoslari va kompyuter lingvistikasi bilan chambarchas bog‘langan.

Fanning ilm-fan va ishlab chqarishdagi o‘rni

"Matematik mantiq" fani talabalarda mantiqiy fikrlashni qobilyatini rivojlantiradi va matematik lingvistika, graflar nazariyasi, kombinatorika elementlarini o‘rgatadi va natijada ularni abstrakt fikrlash madaniyatini yuksak pog‘onalarga ko‘taradi.

Fanni o‘qitishda zamonaviy axborot va pedagogik texnologiyalar hamda o‘quv mashg‘ulotlarini loyihalash

Talabalarning "Matematik mantiq"fanini o‘zlashtirishlari uchun o‘qitishning ilg‘or va zamonaviy usullaridan foydalanish, yangi informasion-pedagogoik texnologiyalarni tadbiq qilish muhim ahamiyatga egadir. Fanni o‘zlashtirishda darslik, o‘quv va uslubiy qollanmalar, ma’ruza matnlari,tarqatma materiallar, elektron materiallar, keys texnologiyalaridan foydalaniladi. Ma’ruza va amaliy mashg’ulotlarida o‘qitshning interaktiv usullari(vizual, muammoli, mualliflik ma’ruzalari, ikki tomonlama tahlil, Inset, klaster, "Venna", Sinkveyn" va boshqalar)dan foydalaniladi.

Fan o‘qituvchsi tomonidan pedagogik va modulli texnologiya tamoyillari asosida fan o‘quv mashg‘ulotlarining loyihalari ishlab chqiladi.

Fan modulining dasturi(module syllabus)

O‘quv kursining to’liq nomi:	**Matematik mantiq**

Kursning qisqacha nomi:	MM		Kod: MM
Kafedra:	Matematika va axborot kommunikasiya texnologiyalari”		
O‘qituvch haqida ma’lumot:	Xudoyberganov M.O‘		mirzoali@mail.ru
Semestr va o‘quv kursining davomiyligi	1 semestr, 19 hafta		
O‘quv soatlari hajmi:	Jami:	132	
	shuningdek:		
	ma’ruza	38	
	amaliy	38	
	mustaqil ta’lim	56	
O‘quv kursining statusi	Matematika va tabiiy- ilmiy fanlar		
Dastlabki tayyorgarlik:	Kurs akademik litsey va kasb-hunar kollejlarida algebra va matematik analiz fanlaridan o‘zlashtigan bilimlariga asoslanadi.		

Fanning predmeti va mazmuni: - talabalarga mantiqiy fikrlash, mulohaza yuritish metodlari, kombinatorika elementlari va ehtimollar nazariyasining dastlaki tushunchalarini o‘rgatish va ularni masalalar yechishda qo’llashni o’rgatishga yo’naltirilgan.

Fanni o‘qitishdan maqsad - talabalarda algoritmik va mantiqiy fikrlash qobiliyatini rivojlantirish va matematik lingvistika asoslarini o‘rgatishdan iboratdir.

Fanning vazifalari - talabalarga diskret matematika va matematik mantiq asoslarini berish, olgan nazariy bilimlarini amaliyotga qo‘llay bilishga o‘rgatishdan va oqibat natijada ularni abstrakt fikrlash madaniyatini yuksak pog‘onalarga ko‘tarishdan iboratdir.

Matematik mantiq elementlari, algoritmlar va ularning murakkablik nazariyasi, graflar va maxsus binar munosabatlar, kombinatorika asoslari, dasturlash asoslari, elektron lug‘atlar va boshqa diskret matematikani tashkil qiluvchi asosiy tushunchalar bilan tanishtirish kursning asosiy vazifasidir.

«Matematik mantiq» o‘quv fanini o‘zlashtirish jarayonida amalga oshiriladigan masalalar doirasida bakalavr:

- matematikada matematik mantiq fanining tutgan o‘rni va uning rivojlanish tarixiy etaplari, to‘plamlar va ular ustida amallar, munosabatlar, mulohazalar, algoritmlar, kombinatorika, graflar haqida ***bilishi kerak***;
- to‘plamlar ustida amallar bajarish, rostlik jadvalidan foydalanish, formulalarni mukammal normal shaklga keltirish, kombinatorik ayniyatlardan foydalanish, graflar ustida amallar bajarish ***ko‘nikmalariga ega bo‘lishi kerak;***
- to‘plamlar nazariyasining asosiy faktlaridan foydalanish, mantiqiy fikrlash prinsiplarini tatbiq etish, programmalarni korrektligini tekshirish, olingan nazariy bilimlarni konkret muammolarni yechishga tatbiq etish ***malakasiga ega bo‘lishi kerak.***

Kursining tematik tarkibi va mazmuni

t/r	mavzusi	ma‘ruza	amaliy	mustaqil ish
1.	To‘plamlar va ular ustida amallar. Munosabatlar. Binar munosabatlar. Funksiyalar.	2	4	
2.	Sonli funksiyalar. Primitiv rekursiv funksiyalar.			2
3.	Maxsus binar munosabatlar. Ekvivalentlik munosabati. Tartiblangan to‘plamlar.	2	4	
4.	Mulhaza. Mantiqiy bog`lovchilar. Formula, qismiy formula. Formulalarning teng kuchliligi. Chinlilik jadvali.	4	2	4
5.	Bul funksiyalari va ularning berilish usullari. Mantiqiy jo‘mraklar. Mantiqiy sxemalarni minimallashtirish.			2
6.	Mulohazalar algebrasi formulasi-ning normal shakllari. Mulohazalar hisobi. Keltirib chiqarish.	4	2	4
7.	Mulohazalar mantiqining tatbiqlari.			2

8.	Isbot tushunchasi. Isbotlanuvchi formula ta'rifi. Teorema tushunchasi.	2		4
9.	Biriktirilgan (ichma ich joylashgan) kvantorlar.			2
	Joriy nazorat (JN)			
10.	Algoritm tushunchasi va uning xususiyatlari. Tyuring mashinasi. Algoritmlar nazariyasining asosiy gipotezasi	2		2
11.	Rekursiv ta'riflar va tuzilmaviy induksiya. Rekursiv algoritmlar. Rekursiya.	2	4	4
12.	Markov normal algoritmlari. Hisoblanuvchi funksiyalar	2	2	
13.	Isbotlashlarning usullari va strategiyasi			2
14.	Umumlashgan o'rinlashtirishlar va kombinasiyalar. Rekurrent munosabatlarni yechish			2
15.	Kombinatorika asoslari. O'rinlashtirishlar va kombinasiyalar. Binomial koeffisiyentlar va ularga oid ayniyatlar.	4	4	4
16.	Formal grammatika asosiy tushunchalari.			2
	Oraliq nazorat (ON)			
17.	Umumlashgan o'rinlashtirishlar va kombinasiyalar. Takrorli kombinatsiyalar. Takrorli o'rin almashtirishlar, o'rinlashtirishlar va gruppalashlar.	4	4	4
18.	Rekurrent munosabatlarning tatbiqlari. Chiziqli rekurrent munosabatlarni yechish.			4
19.	Graflar.va graf modellari. Graf terminologiyasi va graflarning maxsus tiplari.	4	2	2
20.	Graflarning berilish usullari. Bog'lanishli graflar. Eng qisqa yo'l muammosi. Graf ustida sodda amallar.	2	4	4
21.	Ehtimollik ta'rifi. Shartli ehtimollik. Hodisalar bog'liqsizligi. Bernulli formulasi.	2	4	4
	Joriy nazorat (JN)			
22.	Tasodifiy miqdor va uning taqsimot funksiyasi. Taqsimot funksiyaning xossalari.	2	2	2
	Yakuniy nazorat(YaN)			
	Jami	**38**	**38**	**56**

Ta`lim berish va o'qitish	Ma'ruza, amaliy mashg'ulotlar, mustaqil ishlar (aylana stol, keys stadi, master-klaslar)		
Mustaqil ishlar	O'quv loyihalar, guruhli taqdimot, referatlar, keyslar, dokladlar, krassvordlar, poster, prospect, esse va h.z.		
Maslahatlar va topshiriqlarni topshirish vaqti	Kunlar	Vaqti	Aud.
1. 5111200 – O'zbek tili va adabiyoti	Haftaning juma kuni	9^{00}-10^{20}	109
2. 5120100 –filologiya va tillarni o'qitish (o'zbek tili)	Haftaning shanba kuni	14^{00}-15^{20}	109
3. 5120900 –O'zbek-ingliz tarjima nazariyasi va amaliyoti	Haftaning shanba kuni	14^{00}-15^{20}	109

<table>
<tr><td colspan="2">Bilimlarni baholash usullari, mezonlari va tartibi</td></tr>
<tr><td colspan="2">JN va ON ning ballari ishchi dasturda beriladi</td></tr>
<tr><td>Baholash usullari</td><td>Testlar, yozma ishlar, og‘zaki so‘rov, prezentasiyalar va h.z.</td></tr>
<tr><td>Fan bo‘y‘icha talabalar bilimini nazorat qilish va baholash</td><td>Nazorat shakllari
Baholash turlari fan xususiyatidan kelib chiqqan holda so‘rovlar, og‘zaki savol-javob, yozma ish, test sinovlari yoki boshqa ko‘rinishda o‘tkazilishi mumkin.</td></tr>
<tr><td>86-100 ball</td><td>Fan bo‘yicha talabalar bilimini bahalash mezoni
- To`plamlar, mulohazalar shuningdek matematik mantiq elementlari to`g``risida to`liq ma`lumotga ega bo`lsa;
- Fan bo'yicha mavzu materiallarining nazariy yoki amaliy ahamiyati haqida aniq tasavvurga ega bo'lsa;
- Fan doirasida mustaqil erkin fikrlash qobiliyatini namoyon eta olsa;
- Berilgan savollarga aniq va tushunarli javob bera olsa;
- umumlashgan yechimlarni kompyuterda namoyish qilsa;
- Mustaqil topshiriqlarni to'liq va aniq bajargan bo'lsa;
- Fanga tegishli qo'shimcha ma'lumotlar, tahliliy hujjatlarni to'liq o'zlashtirgan bo'lsa;
- Turli matematik mantiq masalalarni yechib, natijalarni izohlasa.</td></tr>
<tr><td>71-85 ball</td><td>- Talaba o‘rganilayotgan xodisalar aloqadorligini bilish hamda ob’ekni tafsiflay olish ko‘nikmasiga ega bo’lishi bilan birgalikda, qo‘yilgan masalalarni sabab va oqibat aloqadorligini ochib bergan holda echa oladi, o‘rganilayotgan nazariy bilimlarni amaliyot bilan bog‘lay oladi va mustaqil mushohada qilaoladi;
- Bilim va ko‘nikmalar mazmunini tadbiq qila olish mahorati, bir tipdagi masalalarni echa olish, yozib olish va eslab qolish faoliyatini amalga oshiradi, bilimlarni amaliyotda qo‘llay oladi;
- Talaba mashg‘ulotlarga tayyorlangan, dasturiy materiallarni biladi, mohiyatini tushunadi va tasavvurga ega.</td></tr>
<tr><td>55-70 ball</td><td>- Talabaning eshitganlari, ularga berilgan namunalar, taqdim etilgan algoritm va ko’rsatmalar asosida topshiriqlarni bajara oladi, mohiyatini tushunadi;
- Talaba qator belgilar asosida ma’lum ob’ekni farqlash bilan birgalikda unga ta’rif bera oladi va o‘quv materialini tushuntirib bera oladi va tasavvurga ega.</td></tr>
<tr><td>0-54 ball</td><td>- Talaba tasavvurga ega emas;
- Talaba dasturiy materiallarni bilmaydi.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fanga doir vedio ma‘ruzalar,vedio roliklar:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Glossariylar:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Axborot resurs baza:</td></tr>
</table>

ASOSIY QISM

Fanining nazariy mashg‘ulotlari mazmuni

1-modul. Tayanch tushunchalar. Mulohazalar algebrasi.

To‘plamlar va ular ustida amallar. Munosabatlar. Binar munosabatlar. Maxsus binar munosabatlar. Ekvivalentlik munosabati. Tartiblangan to‘plamlar. Mulhaza. Mantiqiy bog‘lovchilar. Formula, qismiy formula. Formulalarning teng kuchliligi. Dizyunktiv va konyunktiv normal formalar. Mukammal dizyunktiv va konyunktiv normal formalar. Chinlilik jadvali. Mulohazalar algebrasi formulasining normal shakllari. Mulohazalar hisobi uchun aksiomalar sistemasi.

Mulohazalar hisobi. Keltirib chiqarish. Isbot tushunchasi. Isbotlanuvchi formula ta'rifi. Teorema tushunchasi. Mulohazalar algebrasi formulasining normal shakllari.

2-modul. Algoritmlar.

Algoritm tushunchasi va uning xususiyatlari. Yechiluvchi va sanaluvchi to`plamlar. Rekursiv algoritmlar. Primitiv rekursiya operatori. Minimizatsiya operatori. Rekursiv funksiyalar. Tyuring mashinasi. Algoritmlar nazariyasining asosiy gipotezasi. Markovning normal algoritmlari. Markov bo'yicha qismiy hisoblanuvchi va hisoblanuvchi funksiyalar. Algoritmik yechilmovchi muammolar. Rekurrent munosabatlarning tatbiqlari. Chiziqli rekurrent munosabatlarni yechish.

3-modul. Kombinatorika.

Kombinatorika asoslari. Kombinatorika haqida umumiy tushunchalar. Kombinatorika predmeti va paydo bo'lish tarixi. Matematik induksiya. Matematik induksiya usuli. Tengliklarni isbotlash. Rekursiv ta'riflar va tuzilmaviy induksiya. Kombinatorikada ko'p qo'llaniladigan usul va qoidalar. O'rinlashtirishlar va kombinasiyalar. Nyuton binomi haqida umumiy ma'lumotlar. Binomial koeffisiyentlar va ularga oid ayniyatlar. Umumlashgan o'rinlashtirishlar va kombinasiyalar. O'rin almashtirishlar. O'rinlashtirishlar. Gruppalashlar. Takrorli kombinatsiyalar. Takrorli o'rin almashtirishlar. Takrorli o'rinlashtirishlar. Takrorli gruppalashlar.

4-modul. Graflar.

Graflar nazariyasining boshlang'ich ma'lumotlari. Graflar va graf modellari. Graf terminologiyasi va graflarning maxsus tiplari. Grafning geometrik ifodalanishi, uchlar. Graflarning berilish usullari. Grafning maxsus turdagi ko'phad yordamida berilishi. Qo'shnilik matritsalari. Insidentlik matritsalari. Grafning abstrakt ta'rifi va u bilan bog'liq boshlang'ich tushunchalar. Qirralar va yoylar insidentligi. Bog'lanishli graflar. Eng qisqa yo'l muammosi. Graf ustida sodda amallar.

5 modul. Ehtimollar nazariyasi

Ehtimollik ta'rifi. Shartli ehtimollik. Hodisalar bog'liqsizligi. Tasodifiy hodisalar, ularning klassifikatsiyasi. Hodisalar ustida amallar. Ehtimollikning statistik ta'rifi. Ehtimollikning klassik ta'rifi. Ehtimollikning geometrik ta'rifi. Bernulli formulasi. Tasodifiy miqdor va uning taqsimot funksiyasi. Taqsimot funksiyaning xossalari. Tasodifiy miqdor tushunchasi. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni. Taqsimot funksiyasi va uning xossalari. Zichlik funksiyasi va uning xossalari

Amaliy mashg'ulotlar

Amaliy mashg'ulotlarini tashkil etish bo'yicha ko'rsatma va tavsiyalar

Amaliy mashg'ulotlarini o'tkazishda quyidagi didaktik tamoyillarga amal qilinadi:

- amaliy mashg'ulotlarining maqsadini aniq belgilab olish;
- o'qituvchining innovasion pedagogik faoliyati bo'yicha bilimlarni chuqurlashtirish imkoniyatlariga talabalarda qiziqish uyg'otish;
- talabada natijani mustaqil ravishda qo'lga kiritish imkoniyatini ta'minlash;
- talabani nazariy-metodik jihatdan tayyorlash.

Amaliy mashg'ulotlar nafaqat aniq mavzu bo'yicha bilimlarni yakunlash, balki talabalatni tarbiyalash manbai hamdir. Shuningdek hamma mavzularga doir va yetarli miqdordagi masalalar yechish nazarda tutiladi.

Amaliy mashg'ulotlarning mavzulari:

1. To'plamlar. To'plamlar ustida amallar. Funksiyalar.
2. Munosabatlar. Binar munosabatlar.

3. Maxsus binar munosabatlar. Ekvivalentlik munosabati.
4. Tartiblangan to‘plamlar.
5. Mulhaza. Mantiqiy bog`lovchilar. Formula, qismiy formula. Formulalarning teng kuchliligi. Chinlilik jadvali.
6. Mulohazalar algebrasi formulasining normal shakllari. Mulohazalar hisobi. Keltirib chiqarish.
7. Markov normal algoritmlari. Hisoblanuvchi funksiyalar.
8. Rekursiv ta‘riflar va tuzilmaviy induksiya.
9. Rekursiv algoritmlar. Rekursiya.
10. Kombinatorika asoslari. O‘rinlashtirishlar va kombinasiyalar.
11. Binomial koeffisiyentlar va ularga oid ayniyatlar.
12. Umumlashgan o‘rinlashtirishlar va kombinasiyalar.
13. Tashkil etuvchi o‘rinlashtirishlar va kombinasiyalar.
14. Graflar va graf modellari. Graf terminologiyasi va graflarning maxsus tiplari.
15. Graflarning berilish usullari. Bog‘lanishli graflar.
16. Eng qisqa yo‘l muammosi.
17. Ehtimollik ta‘rifi. Shartli ehtimollik.
18. Hodisalar bog‘liqsizligi. Bernulli formulasi.
19. Tasodifiy miqdor va uning taqsimot funksiyasi. Taqsimot funksiyaning xossalari.

Mustaqil ishlarni tashkil etish shakli va mazmuni

Mustaqil ishning maqsadi olingan nazariy bilimlarni mustahkamlash, belgilangan mavzular asosida qo‘shimcha bilim olishdan iborat. Bunda ushbu ishlarni bajaradilar:
- amaliy mashg‘ulotlarga tayyorgarlik;
- nazariy tayyorgarlik ko‘rish;
- uy vazifalarni bajarish;
- o‘tilgan materiallar mavzularini qaytarish;
- mustaqil ish uchun mo‘ljallangan nazariy bilim mavzularini o‘zlashtirish.

Bunda talabalar ma‘ruzalarda olgan bilimlarini amaliy mashg‘ulotlarni bajarishlari bilan mustahkamlashi hamda ba‘zi mavzularni tushunishi hamda ularga oid masalalarni yechishlari kerak.

Mustaqil ish mavzularini o‘zlashtirish ta‘lim jarayonida uzluksiz nazorat qilib boriladi va 3-joriy nazorat sifatida baholanadi. Mavzular bo`yicha savollar oraliq nazorat savollari tarkibiga kiritiladi va talabalarga oldindan beriladi.

Mustaqil ishlarning mavzulari

1. Mulohazalar mantiqining tatbiqlari.
2. Biriktirilgan(ichma ich joylashgan) kvantorlar.
3. Isbotlashlarning usullari va strategiyasi.
4. Funksiyalar xossalari.
5. Matrisalar ustida amallar.
6. Saralash va izlash algoritmlar va ularning murakkabligi.
7. Rekursiv ta‘riflar va tuzilmaviy induksiya.
8. Programmaning korrektligi.
9. Umumlashgan o‘rinlashtirishlar va kombinasiyalar.
10. “Bo‘lakla va boshqar” algoritmi va rekurrent munosabatlar.
11. Maksimal oqimni topish algoritmlari.
12. Daraxtlarning tatbiqlari.
13. Minimal tayanch daraxtlari aniqlash algoritmlari.
14. Formal grammatika asosiy tushunchalari.
15. Sonli funksiyalar. Primitiv rekursiv funksiyalar.
16. Bul funksiyalari va ularning berilish usullari. Mantiqiy sxemalarni minimallashtirish.

Izoh: Mustaqil ta'lim soatlari hajmlaridan kelib chiqqan holda ishchi dasturda mazkur mavzular ichidan mustaqil ta'lim mavzulari shakllantiriladi.

Dasturning axborot-uslubiy ta'minoti

Fanni o'qitish jarayonida mavjud nashr qilingan o'quv qo'llanmalari va elektron manbalar, Internet tizimidagi mos ta'lim saytlari ma'lumotlaridan http://www.zionet.uz va shunga o'xshash saytlaridan foydalaniladi. Kompyuter texnikasini qo'llash bilan bog'liq zamonaviy pedagogik va informasion texnologiyalar asoslangan o'qitish metodlari qo'llaniladi. Amaliy mashg'ulotlardaaqliy hujum, klaster, blits-so'rov, guruh bilan ishlash, inset, taqdimot, keys-stadi kabi usul va texnikalardan keng foydalaniladi.

Foydalaniladigan adabiyotlar ro'yxati

Asosiy adabiyotlar

1. Mendelson E. Introduction to mathematical logic. Sixth edition. New York.Taylor&Francis Group,2015
2. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012.
3. H.T.To'rayev, I.Azizov Matematik mantiq va diskret matematika. 1,2 jild. "Tafakkur-Bo'stoni", Toshkent, 2011y.
4. Kasimov N.X., Dadajonov R.N., Ibragimov F.N. Diskret matematika va matematik *mantiq asoslari (o'quv qo'llanma), T., O'zbekiston Milliy universiteti, 2016.*

Qo'shimcha adabiyotlar

1. To'xtasinov M., Diskret matematika va matematik mantik.- T., Universitet, 2005.
2. To'rayev X.T., Matematik mantik va diskret matematika.- T., O'qituvchi, 2003.
3. Yunusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2003.
4. Lavrov I.A., Maksimova L.L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M.: Fiz.-mat. literatura, 1995.
5. Yershov Yu. L., Palyutin Ye. A. Matematicheskaya logika. M.: Nauka, 1987.

Internet saytlari

1. http://epubs.siam.org/sam-bin/dbq/toclist/SIDMA
2. http://www.vsppub.com/journals/jn-DisMatApp.html
3. http://www.uni-bonn.de/logic/world.html
4. http://www.math.uni-bonn.de/people/logic/
5. http://www.math.uu.se/logik/logic-server/

O'zlashtirish nazorati

№	Reyting nazorat /shakli	1-JN	2-JN	3-JN (MT)	ON	YaN	Ballar yig'indisi
1.	Maksimal ball	15	15	10	30	30	100
2.	Shakli:	yozma, og'zaki, savol-javob	yozma, og'zaki, savol-javob	prezentatsiya, savol-javob	yozma ish	yozma ish	
3.	Muddati (haftalar)	8	16	18	18	19	

***Matematik mantiq* fani bo'yicha o'zlashtirish ko'rsatkichini nazorat qilishda baholash mezonlari:**

a) 86-100 ball uchun quyidagilarga javob berishi lozim:
–to`plamlar, mulohazalar shuningdek matematik mantiq elementlari to`g``risida to`liq ma`lumotga ega bo`lsa;
–fan bo'yicha mavzu materiallarining nazariy yoki amaliy ahamiyati haqida aniq tasavvurga ega bo'lsa;
–fan doirasida mustaqil erkin fikrlash qobiliyatini namoyon eta olsa;
–berilgan savollarga aniq va tushunarli javob bera olsa;
–umumlashgan yechimlarni kompyuterda namoyish qilsa;
–mustaqil topshiriqlarni to'liq va aniq bajargan bo'lsa;
–fanga tegishli qo'shimcha ma'lumotlar, tahliliy hujjatlarni to'liq o'zlashtirgan bo'lsa;
–turli matematik mantiq masalalarni yechib, natijalarni izohlasa.

b) 71-85 ball uchun quyidagilarga javob berishi lozim:
–kursda o'tilgan masalalarni yechish usullarini bilsa;
–fanning mazmunini amaliy ahamiyatini tushungan bo'lsa;
–berilgan vazifa va topshiriqlarni o'quv dasturi doirasida bajarsa;
–fan bo'yicha berilgan savollarga to'g'ri javob bera olsa;
–fan bo'yicha konspektini puxta shakllantirgan bo'lsa;
–fan bo'yicha mustaqil topshiriqlarni to'liq bajargan bo'lsa;
–fanga tegishli ma'lumotlar, qiyosiy tahlillar qilishda kamchiliklarga yo'l qo'ysa.

v) 55-70 ball uchun quyidagilarga javob berishi lozim:
–fan bo'yicha savollarga mujmal va chalkash javoblar bersa;
–ta'riflarni bilmasa va misollarni to'liq va mustaqil ishlay olmasa.

g) quyidagi hollarda 0-54 ball bilan baholanishi mumkin:
–matematik masalalarning mohiyatini tushunmasa;
–oddiy mulohazali masalalarni yechia olmasa;
–asosiy tushunchalarning ta'riflarini bilmasa;
–matematik masalalarni yecha olmasa, funksiya grafiklarini chizishni bilmasa;
–fanning tegishli bo'limi bo'yicha berilgan savollarga javob bera olmasa.

Fanning nazoratlari yozma ish shaklida o'tkazilsa, variantlardagi savollar soni 5 tadan iborat bo'lib, har bir savol uchun maksimal ball nazorat uchun ajratilgan maksimal balni 5 ga bo'lib belgilanadi.

Modulni o'qitishda foydalaniladigan intrefaol ta'lim metodlari

1. "Keys-stadi" metodi

«Keys-stadi» - inglizcha so'z bo'lib, («case» – aniq vaziyat, hodisa, «stadi» – o'rganmoq, tahlil qilmoq) aniq vaziyatlarni o'rganish, tahlil qilish asosida o'qitishni amalga oshirishga qaratilgan metod hisoblanadi. Mazkur metod dastlab 1921 yil Garvard universitetida amaliy vaziyatlardan iqtisodiy boshqaruv fanlarini o'rganishda foydalanish tartibida qo'llanilgan. Keysda ochiq axborotlardan yoki aniq voqyea-hodisadan vaziyat sifatida tahlil uchun foydalanish mumkin. Keys harakatlari o'z ichiga quyidagilarni qamrab oladi: Kim (Who), Qachon (When), Qayerda (Where), Nima uchun (Why), Qanday/ Qanaqa (How), Nima-natija (What).

"Keys metodi" ni amalga oshirish bosqichlari

Ish bosqichlari	Faoliyat shakli va mazmuni
1-bosqich: Keys va uning axborot ta'minoti bilan tanishtirish	✓ yakka tartibdagi audio-vizual ish; ✓ keys bilan tanishish(matnli, audio yoki media shaklda); ✓ axborotni umumlashtirish; ✓ axborot tahlili; ✓ muammolarni aniqlash
2-bosqich: Keysni aniqlashtirish va o'quv topshirig'ni belgilash	✓ individual va guruhda ishlash; ✓ muammolarni dolzarblik iyerarxiyasini aniqlash; ✓ asosiy muammoli vaziyatni belgilash
3-bosqich: Keysdagi asosiy muammoni tahlil etish orqali o'quv topshirig'ining yechimini izlash, hal etish yo'llarini ishlab chiqish	✓ individual va guruhda ishlash; ✓ muqobil yechim yo'llarini ishlab chiqish; ✓ har bir yechimning imkoniyatlari va to'siqlarni tahlil qilish; ✓ muqobil yechimlarni tanlash
4-bosqich: Keys yechimini yechimini shakllantirish va asoslash, taqdimot.	✓ yakka va guruhda ishlash; ✓ muqobil variantlarni amalda qo'llash imkoniyatlarini asoslash; ✓ *ijodiy-loyiha taqdimotini tayyorlash*; ✓ yakuniy xulosa va vaziyat yechimining amaliy aspektlarini yoritish

Keys. Dinamik massivlar bilan ishlaydigan dastur tuzildi. Dastur vazifasi massiv elementlarini siklik ravishda chapga n ta surish. Dastur ishlashi natijasida xatolik kelib chiqdi. Ya'ni ilova xatolik haqida xabar berdi.

Keysni bajarish bosqchilari va topshiriqlar:

- Keysdagi muammoni keltirib chiqargan asosiy sabablarni belgilang (individual va kichik guruhda).
- Dasturni to'g'ri ishlashi uchun bajariladigan ishlar ketma-ketligini belgilang (juftliklardagi ish)

2. "Assesment" metodi

Metodning maqsadi: mazkur metod ta'lim oluvchilarning bilim darajasini baholash, nazorat qilish, o'zlashtirish ko'rsatkichi va amaliy ko'nikmalarini tekshirishga yo'naltirilgan. Mazkur texnika orqali ta'lim oluvchilarning bilish faoliyati turli yo'nalishlar (test, amaliy ko'nikmalar, muammoli vaziyatlar mashqi, qiyosiy tahlil, simptomlarni aniqlash) bo'yicha tashhis qilinadi va baholanadi.

Metodni amalga oshirish tartibi:

"Assesment" lardan ma'ruza mashg'ulotlarida talabalarning yoki qatnashchilarning mavjud bilim darajasini o'rganishda, yangi ma'lumotlarni bayon qilishda, seminar, amaliy mashg'ulotlarda esa mavzu yoki ma'lumotlarni o'zlashtirish darajasini baholash, shuningdek, o'z-o'zini baholash maqsadida individual shaklda foydalanish tavsiya etiladi. Shuningdek, o'qituvchining ijodiy yondashuvi hamda o'quv maqsadlaridan kelib chiqib, assesmentga qo'shimcha topshiriqlarni kiritish mumkin.

3. "Tushunchalar tahlili" metodi

Metodning maqsadi: mazkur metod talabalar yoki qatnashchilarni mavzu buyicha tayanch tushunchalarni o'zlashtirish darajasini aniqlash, o'z bilimlarini mustaqil ravishda tekshirish, baholash, shuningdek, yangi mavzu buyicha dastlabki bilimlar darajasini tashhis qilish maqsadida qo'llaniladi. Metodni amalga oshirish tartibi:

- ishtirokchilar mashg'ulot qoidalari bilan tanishtiriladi;
- o'quvchilarga mavzuga yoki bobga tegishli bo'lgan so'zlar, tushunchalar nomi tushirilgan tarqatmalar beriladi (individual yoki guruhli tartibda);
- o'quvchilar mazkur tushunchalar qanday ma'no anglatishi, qachon, qanday holatlarda qo'llanilishi haqida yozma ma'lumot beradilar;
- belgilangan vaqt yakuniga yetgach o'qituvchi berilgan tushunchalarning to'g'ri va to'liq izohini o'qib eshittiradi yoki slayd orqali namoyish etadi;
- har bir ishtirokchi berilgan to'g'ri javoblar bilan o'zining shaxsiy munosabatini taqqoslaydi, farqlarini aniqlaydi va o'z bilim darajasini tekshirib, baholaydi.

Ma’ruza materiallari

1- ma’ruza: To‘plamlar va ular ustida amallar. Munosabatlar. Binar munosabatlar. Funksiyalar

Reja:

1. To‘plam tushunchasi.To‘plamlar ustida amallar.
2. To‘plamlarning dekart ko‘paytmasi.
3. Munosabatlar. Binar munosabatlar.
4. Funksiyalar

**Kalit so`zlar:** to`plam, bulean, chekli to`plam, unar, binary, element, dekart ko`paytma, simmetrik ayirma, bo`sh to`plam.

To‘plamlar nazariyasining paydo bo‘lishi. Matematikada, shu jumladan, kombinatorika va graflar nazariyasida ham, turli **to‘plamlar** bilan ish ko‘rishga to‘g‘ri keladi. Masalan, kutubxonadagi barcha kitoblar to‘plami, to‘g‘ri burchakli uchburchaklar to‘plami, suvda hayot kechiruvchi tirik organizmlar to‘plami, natural sonlar to‘plami, koinotdagi yulduzlar to‘plami, to‘g‘ri chiziqda yotuvchi nuqtalar to‘plami va hokazo.

To‘plamlar nazariyasiga fan sifatida XIX asrning oxirida matematikani standartlashtirish bo‘yicha o‘z dasturini taklif etgan Kantor[1] tomonidan asos solingan deb hisoblansada, to‘plamlar bilan Kantordan oldinroq Bolsano[2] shug‘ullangan.

Kantor fikricha, istalgan matematik ob’yekt (shu jumladan, to‘plamning o‘zi ham) qandaydir to‘plamga tegishli bo‘lishi shart. Berilgan xossaga ega bo‘lgan barcha ob’yektlar majmuasi uchun umumiy nomni Kantor to‘plam deb tushungan edi. Umuman olganda, to‘plam tushunchasiga qat’iy ta’rif berilmaydi, chunki uni boshqa soddaroq tushuncha orqali ifodalab bo‘lmaydi. Masalan, to‘plamni matematik ibora sifatida tushuntirishda Kantor ham to‘plam so‘ziga sinonim bo‘lgan “majmua” so‘zidan foydalangan.

Umuman olganda, to‘plam so‘zining lug‘aviy ma’nosiga ko‘ra, uni tashkil etuvchilarni bir joyga to‘plash (yig‘ish, jamlash) tushunilsada, matematikada to‘plam deganda bunday yig‘ish talab etilmaydi, balki bu tashkil etuvchilarni birgalikda to‘plam sifatida qarash uchun ularning barchasiga tegishli qandaydir umumiy xossaning (belgining) mavjudligi yetarlidir.

To‘plamni tashkil etuvchilar shu **to‘plamning elementlari** deb ataladi. To‘plamlar nazariyasida to‘plamning elementlari bir-biridan farqli deb hisoblanadi, ya’ni muayyan bir **to‘plamning elementlari takrorlanmaydi**.

To‘plamni tashkil etuvchi elementlar soni chekli yoki cheksiz bo‘lishi mumkin. Birinchi holda **chekli to‘plamga**, ikkinchi holda esa, **cheksiz to‘plamga** ega bo‘lamiz.

To‘plamlarni belgilashda, odatda, lotin yoki grek alifbosining bosh harflari, uning elementlari uchun esa alifboning kichik harflari qo‘llaniladi. To‘plamni tashkil etuvchi

[1] Kantor (Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, 1845 (Sankt Peterburg) - 1918) – olmon matematigi.
[2] Bolsano (Bernard Bolzano, 1781-1848) – chex matematigi va faylasufi.

elementlar figurali qavslar orasiga olinib ifodalanishi mumkin. Masalan, A to'plamning $a,b,c,d,...,z$ elementlardan tuzilganligini $A=\{a,b,c,d,...,z\}$ ko'rinishda yozish mumkin. Ko'pincha (masalan, cheksiz to'plam yoki to'plamning elementlari juda ko'p bo'lgan holda) to'plamni belgilashda figurali qavslar orasida, avvalo, to'plamni tashkil etuvchi elementning umumiy belgisi yozilib, undan so'ng "|" yoki ":" belgisi qo'yiladi, keyin esa, ifodalanayotgan to'plamning barcha elementlariga xos shartlar yoziladi. Bunda, yozuvni murakkablashtirmaslik maqsadida, ba'zi qisqartirishlarga yoki tushuntiruvchi so'zlarning qavslardan tashqarida yozilishiga yo'l qo'yiladi. Masalan, toq natural sonlar to'plamini B deb belgilasak, uni $B=\{m\,|\,m=2n-1\}$, bunda n – natural son, yoki $B=\{m\,|\,m=2n-1, n\in N\}$[3] ko'rinishda yozish mumkin.

To'plamlarning aksiomatik nazariyasi haqida tushunchalar. XX asrning boshiga kelib, Kantorning matematikani standartlashtirish bo'yicha dasturining asosi bo'lgan va "to'plamlarning sodda nazariyasi" deb ham ataluvchi to'plamlar nazariyasi mukammal emasligi ma'lum bo'ldi. To'plamlarning sodda nazariyasini o'rganish jarayonida Rassel[4] **paradoksga**[5] kelib qoldi. Kantorning to'plamlar nazariyasi ichki ziddiyatga ega ekanligi **Rassel paradoksi** sifatida ifodalangan[1].

Rassel paradoksi. Faraz qilaylik, K – o'zini element sifatida o'zida saqlamagan barcha to'plamlar to'plami bo'lsin. U holda, K – o'zini element sifatida saqlaydimi? Agar bu savolga "ha" deb javob berilsa, K to'plamning aniqlanishiga ko'ra, u Kning elementi bo'lmasligi kerak – ziddiyat. Agar "yo'q" deb javob berilsa, yana K to'plamning aniqlanishiga ko'ra, u to'plam sifatida Kning elementi bo'lishi kerak – yana ziddiyat.

Hozirgi zamon to'plamlar nazariyasi **aksiomalar**[6] tizimiga asoslangandir. Qandaydir aksiomalarga asoslangan nazariya **aksiomatik nazariya** deb yuritiladi. To'plamlarning aksiomatik nazariyasida bunday aksiomalar tizimi sifatida standart tizim hisoblangan Sermelo[7]-Frenkel[8] aksiomalari tizimini keltirish mumkin. To'plamlar nazariyasida, ko'pincha, bu tizimga **tanlash aksiomasi** deb ataluvchi aksiomani ham qo'shib olib, **tanlash aksiomasi qatnashgan Sermelo-Frenkel aksiomalari tizimi** bilan ish ko'riladi. Bu aksiomalar tizimidan tashqari boshqa aksiomalar tizimlaridan ham foydalaniladi. Masalan, fon Neyman[9]-Berneys[10]-Gyodel[11] tizimi.

Quyida tanlash aksiomasi qatnashgan Sermelo-Frenkel aksiomalari tizimiga kiruvchi ba'zi aksiomalarni keltiramiz.

Hajmiylik aksiomasi. Ikkita A va B to'plamlar faqat va faqat aynan bir xil elementlardan iborat bo'lsagina **teng** bo'ladi.

Bo'sh to'plam aksiomasi. Birorta ham elementga ega bo'lmagan to'plam, ya'ni **bo'sh to'plam**, mavjud. Bo'sh to'plam uchun $\varnothing$ belgisi qo'llaniladi.

Juftlik aksiomasi. Ixtiyoriy A va B to'plamlar uchun shunday C to'plam mavjudki, bu to'plam elementlari faqat A va B to'plamlardan iboratdir (ya'ni, A va B to'plamlar C ning yagona elementlaridir). C to'plam $\{A,B\}$ ko'rinishda belgilanadi. Ushbu $\{A,B\}$ ifoda A va Bning **tartiblanmagan juftligi** deb ataladi. Agar A va B to'plamlar teng bo'lsa, u holda C bitta elementdan iboratdir[3].

Tanlash aksiomasi. Bo'sh bo'lmagan va o'zaro kesishmaydigan to'plamlar majmuasidagi har bir to'plamdan bittadan "vakil"-element tanlab, shu elementlar to'plami C

---

[3] N – natural sonlar to'plami (kitobning oxiridagi asosiy belgilashlarga qarang).
[4] Rassel (Bertrand Arthur William Russell, 1872-1970) – mashhur ingliz faylasufu, 1950 yilda adabiyot sohasida Nobel mukofotiga sazovar bo'lgan.
[5] Paradóks (grekcha παράδοξος so'zi kutilmagan, tushunarsiz, g'ayrioddiy, taajjubli ma'nolarini beradi) – mantiqiy nuqtai nazardan formal ravishda to'g'ri fikrlab bir-biriga zid bo'lgan natijalarni hosil qilish.
[6] Aksioma – isbotsiz qabul qilinadigan tasdiq.
[7] Sermelo (Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo, 1871-1953) – olmon matematigi.
[8] Frenkel (Adolf Abraham Halevi Fraenkel, אברהם הלוי (אדולף) פרנקל, 1891-1965) – olmon va isroil matematigi.
[9] Fon Neyman (John von Neymann, 1903 (Budapesht) – 1957) – AQSh matematigi, iqtisodchisi.
[10] Berneys (Paul Isaak Bernays, 1888 (London) – 1977) – Shveysariya matematigi.
[11] Gyodel (Kurt Gödel, 1906 (Brno) – 1978) – AQSh matematigi.

ni tuzish mumkin. X to'plam shu majmuaning qanday elementi bo'lishidan qat'iy nazar X va C to'plamlar faqatgina bitta umumiy elementga ega bo'ladi.

Albatta, bu aksiomalar (xuddi shuningdek, tanlash aksiomasi qatnashgan Sermelo-Frenkel aksiomalari tizimining boshqa aksiomalari ham) bizga o'z-o'zidan oydin bo'lgan tasdiqlarga o'xshab tuyiladi, chunki bizning tafakkurimiz to'plamlar majmuasini chekli deb tassavvur qilishga o'rgangan. To'plamlar majmuasi chekli bo'lgan holda, masalan, tanlash aksiomasini tushunish qiyin emas. Tanlash aksiomasi cheksiz to'plamlar uchun qo'llansa, ba'zan, tortishuvlarga sabab bo'luvchi juda qiziq tasdiqlar vujudga keladi. Bu fikrni tasdiqlash maqsadida Banax[12]-Tarskiy[13] paradoksi (sharning ikkilanishi) va Xausdorf[14] paradoksi mavjudligini ta'kidlaymiz.

Yuqorida keltirilgan aksiomalardan, jumladan, hajmiylik aksiomasidan, to'plamlar bo'yicha ko'plab tasdiqlarni isbotlashda foydalanamiz. Hajmiylik aksiomasini boshqacha ifodalash ham mumkin. A to'plamning har bir elementi B to'plamda ham mavjud va, aksincha, B to'plamning har bir elementi A to'plamda ham mavjud bo'lsa, u holda A va B to'plamlar tengdir. A va B **to'plamlarning tengligini** $A=B$ yoki $B=A$ ko'rinishda ifodalaymiz. Aslida, $A=B$ bo'lsa, u holda A va B to'plamlar aynan bitta to'plamning har xil belgilanishidir. Masalan, o'nlik sanoq tizimidagi yozuvining oxirgi raqami 1, 3, 5, 7 yoki 9 raqamlaridan biri bo'lgan natural sonlar to'plamini A bilan, birni qo'shganda ikkiga qoldiqsiz bo'linadigan natural sonlar to'plamini esa B bilan belgilasak, u holda $A=B$ bo'ladi. $A=B$ yozuv to'plamlardagi elementlarning qaysi tartibda joylashishiga bog'liq emas. Albatta, to'plamdagi elementlarni qaysi tartibda qo'yish masalasi ham dolzarbdir.

A va B to'plamlar teng bo'lmasa, u holda bu holat $A \neq B$ yoki $B \neq A$ ko'rinishda ifodalanadi.

To'plamlar nazariyasida quvvat eng muhim tushunchalardan biri bo'lib, u to'plamlarni taqqoslashda katta ahamiyatga egadir. To'plamning quvvati tushunchasi, uning chekli yoki cheksiz bo'lishiga qarab ta'riflanadi. Quvvat tushunchasi to'g'risida batafsil ma'lumotni to'plamlar nazariyasiga bag'ishlangan manbalardan topish mumkin (masalan, [30-33]). Kombinatorika va graflar nazariyasida, asosan, chekli to'plamlar bilan ish ko'riladi. Shu sababli, to'plamning quvvati tushunchasini faqat chekli to'plamlar uchun keltirish bilan chegaralanamiz.

Chekli to'plamning elementlari soniga shu **to'plamning quvvati** deyiladi. Berilgan A to'plamning quvvati $|A|$ ko'rinishda belgilanadi.

1- m i s o l. Ushbu to'plamlar berilgan bo'lsin: $A=\{a\}$, $B=\{a,b\}$, $C=\{a,b,c,d,e\}$, $D=\{1,2,3,...,n\}$, $E=\{m \mid m=2z\}$, $F=\{2,3,5,7,...,p,...\}$, bu yerda n – natural son, z – butun son, p – tub son. Berilgan oltita to'plamdan to'rttasi – A, B, C va D to'plamlar chekli, E va F to'plamlar esa cheksiz to'plamlardir. Bundan tashqari, $|A|=1$, $|B|=2$, $|C|=5$ va $|D|=n$. ■

Berilgan A to'plamga a element tegishliligi $a \in A$ yoki $A \ni a$ ko'rinishda belgilanadi va "a tegishli A" deb o'qiladi. "Tegishli" iborasining o'rniga, ba'zan, "qarashli" yoki "ta'luqli" iborasi ham qo'llaniladi. Qandaydir b ning A to'plamga tegishli emasligi, ya'ni b ning A to'plam elementi bo'lmasligi $b \overline{\in} A$, $b \notin A$ yoki $A \overline{\ni} b$ ko'rinishda yoziladi. Masalan, $A=\{2,4,6,8,10\}$ to'plam uchun $4 \in A$, $6 \in A$, va $10 \in A$ (bularni umumlashtirib, $4,6,10 \in A$ ko'rinishda yozish ham mumkin), lekin $12 \notin A$ va $14 \notin A$ (ya'ni, $12, 14 \notin A$).

Tabiiyki, turli to'plamlar uchun umumiy elementlar mavjud bo'lishi mumkin. Masalan, $A=\{2,4,6,8,10\}$ va $B=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ to'plamlarda 2, 4, 6, 8 elementlar ikkala to'plamda ham mavjuddir.

---

[12] Banax (Banach Stefan, Банах Стефан, 1892-1945) – Polsha va Ukraina matematigi.
[13] Tarskiy (Tarski Alfred, 1902-1983) – Polsha va AQSh mantiqchisi va matematigi.
[14] Xausdorf (Felix Hausdorff, 1868-1942) –olmon matematigi.

Agar B to'plamning har bir elementi A to'plamda ham bor bo'lsa, u holda B to'plam A to'plamning **qism to'plami** deb aytiladi. B to'plam A to'plamning qism to'plami ekanligi $B \subseteq A$ yoki $A \supseteq B$ ko'rinishda belgilanadi. Tabiiyki, bu belgilashlar A va B to'plamlarning teng bo'lgan holini ham nazarda tutadi. $A \subseteq B$ va $B \subseteq A$ bo'lishidan $A = B$ kelib chiqadi. Bu tenglik to'plamning o'zi o'zining qism to'plami bo'la olishi mumkinligini ko'rsatadi, ya'ni $A \subseteq A$ (yoki $A \supseteq A$) ko'rinishdagi yozuv ham ma'noga egadir. Har qanday to'plamning o'zi o'zining qism to'plami bo'la olishi to'plamlarning **refleksivlik** xossasi deb ataladi.

B to'plamning hamma elementlari A to'plamda bor bo'lib, shu bilan birga A to'plamda B ga kirmagan element(lar) ham topilsa, u holda B to'plam A to'plamning **xos qism to'plami** deyiladi. B to'plam A to'plamning xos qism to'plami bo'lishi $B \subset A$ yoki $A \supset B$ ko'rinishda belgilanadi.

Ta'kidlash kerakki, $A \subset A$ yoki $A \supset A$ deb yozish mumkin emas (qiyoslang: a haqiqiy son bo'lsa, u holda $a < a$ yoki $a > a$ yozuv not'g'ri). Shuning uchun, bu holatni ifodalash maqsadida, har qanday to'plam "o'zi o'zining xosmas qismi" degan iboradan foydalaniladi.

To'plamlar nazariyasida bo'sh to'plam har qanday bo'sh bo'lmagan A to'plamning qism to'plami deb qaraladi, ya'ni $\varnothing \subset A$. Tabiiyki, bo'sh to'plamning quvvati nolga teng, ammo bo'sh to'plamni yagona element sifatida saqlovchi to'plamning quvvati birga tengdir, ya'ni $|\varnothing| = 0$, lekin $|\{\varnothing\}| = 1$.

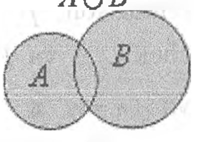
Qandaydir a tasdiqning o'rinli bo'lishidan boshqa b tasdiqning o'rinli bo'lishi kelib chiqsa, bu holat $a \Rightarrow b$ deb belgilanadi. Masalan, $(A \subseteq B$ va $B \subseteq A) \Rightarrow A = B$. Agar a va b tasdiqlar uchun $a \Rightarrow b$ va $b \Rightarrow a$ bo'lsa, bu tasdiqlar **o'zaro ekvivalent tasdiqlar** deb ataladi. a va b tasdiqlarning o'zaro ekvivalentligi $a \Leftrightarrow b$ deb belgilanadi (masalan, [1] kitobning mulohazalar algebrasi qismiga qarang).

2- misol. $\boldsymbol{N}$ natural sonlar to'plami $\boldsymbol{R}$ haqiqiy sonlar to'plamining qism to'plamini tashkil etadi: $\boldsymbol{N} \subseteq \boldsymbol{R}$. ■

3- misol. Nukus shahridagi barcha talabalar to'plami O'zbekistondagi barcha talabalar to'plamining qism to'plamidir. ■

4- misol. O'nli sanoq tizimidagi yozuvining oxirgi raqami 0, 2, 4, 6 yoki 8 raqamlaridan biri bo'lgan natural sonlar to'plami ikkiga qoldiqsiz bo'linadigan natural sonlar to'plamining qism to'plamidir. ■

5- misol. $A = \{a,b,c,d,e,\}$ to'plam uchun $B = \{a\}$, $C = \{a,b\}$ to'plamlarning har biri xos qism to'plamdir. ■



1- shakl

To'plamlarning birlashmasi. Har qanday ikkita to'plamning barcha elementlaridan, ularni takrorlamasdan, tuzilgan to'plamga shu **to'plamlarning birlashmasi** (yoki **yig'indisi**) deb aytiladi.

Bu ta'rifdan ko'rinib turibdiki, to'plamlarning umumiy elementlari shu to'plamlarning birlashmasiga faqat bir martadan kiritiladi. Berilgan to'plamlarning birlashmasidagi har qanday element shu to'plamlarning hech bo'lmaganda bittasiga tegishlidir. A va B to'plamlarning birlashmasi $A \cup B$ kabi belgilanadi. Bu yerda " A va B to'plamlarga birlashma amalini qo'llab (yoki A va B to'plamlar ustida birlashma amali bajarilib), $A \cup B$ to'plam hosil qilindi" deyish mumkin. 1- shaklda A va B to'plamlar doiralar ko'rinishida, $A \cup B$ to'plam esa bo'yab tasvirlangan.

1- misol. $A = \{a,b\}$, $B = \{a,b,c\}$ va $C = \{e,f,k\}$ bo'lsin. U holda $E = A \cup B = \{a,b,c\}$, $E \cup C = \{a,b,c,e,f,k\}$, $C \cup B = \{a,b,c,e,f,k\}$, $A \cup C = \{a,b,e,f,k\}$ bo'ladi. ■

2- misol. O'zbekiston Respublikasining yoshi 16dan 25gacha bo'lgan fuqarolari to'plamini A bilan, yoshi 21dan 30gacha bo'lgan fuqarolari to'plamini esa B bilan belgilasak, A va B to‘plamlarning $A\bigcup B$ birlashmasi O‘zbekiston Respublikasining yoshi 16dan 30gacha bo‘lgan fuqarolari to‘plamini tashkil etadi. ■

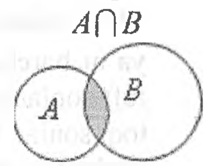
3- misol. $\boldsymbol{N}\bigcup\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}$. ■

Shuni ta’kidlash kerakki, to‘plamlar bilan bog‘liq tushunchalar va ular ustidagi amallar, mos ravishda, sonlar bilan bog‘liq tushunchalar va oddiy arifmetik amallar bilan qiyoslanadi. Jumladan, to‘plamlar yig‘indisini (birlashmasini) topish amali sonlarni qo‘shish amali bilan qiyoslanadi. Bunday qiyoslashlar, ko‘pincha, bir-biriga o‘xshash natijalarning mavjudligini ko‘rsatadi, ba’zan esa ular to‘plamlarning farqli xususiyatlarga egaligini namoyon etadi. Masalan, ixtiyoriy A va B to‘plamlar uchun $A\subseteq B$ bo‘lsa, u holda $A\bigcup B=B$ va $B\bigcup A=B$ bo‘ladi, lekin, ixtiyoriy a va b sonlar uchun $a\leq b$ bo‘lgan holda $a+b=b$ va $b+a=b$ tengliklar bajarilmasligi mumkin, ular faqat $a=0$ bo‘lsagina o‘rinlidir.

To‘plamlarning kesishmasi. Har qanday ikkita to‘plamning barcha umumiy elementlaridan tuzilgan to‘plamga **to‘plamlarning kesishmasi** (yoki **ko‘paytmasi**) deyiladi.

Berilgan A va B to‘plamlarning kesishmasi $A\bigcap B$ kabi belgilanadi. Bu yerda “ A va B to‘plamlarga kesishma amalini qo‘llab, $A\bigcap B$ to‘plam hosil qilindi” deyish mumkin. 2- shaklda A va B to‘plamlar doiralar ko‘rinishida, $A\bigcap B$ to‘plam esa bo‘yab tasvirlangan. To‘plamlar ustidagi amallarning yuqorida ta’kidlangan o‘ziga xos xususiyatlari to‘plamlar ko‘paytmasini (kesishmasini) topishda ham namoyon bo‘ladi. Masalan, $A\subseteq B$ bo‘lsa, u holda $A\bigcap B=A$ va $B\bigcap A=A$ bo‘ladi.

Bitta ham umumiy elementga ega bo‘lmagan ikkita to‘plamlarning kesishmasi bo‘sh to‘plam bo‘lishi tabiiydir. Kesishmasi bo‘sh bo‘lgan to‘plamlar o‘zaro kesishmaydigan, kesishmasi bo‘sh bo‘lmagan to‘plamlar esa o‘zaro kesishadigan to‘plamlar deb ataladi.



2- shakl

4- misol. $A=\{a,b,c\}$, $B=\{a,b,c,d\}$, $C=\{e,f,k\}$ bo‘lsa, u holda $D=A\bigcap B=\{a,b,c\}$, $D\bigcap C=\varnothing$, $A\bigcap C=\varnothing$, $B\bigcap C=\varnothing$, $D\bigcap B=\{a,b,c\}$ bo‘ladi. ■

5- misol. 2- misolda aniqlangan A va B to‘plamlarga kesishma amalini qo‘llasak, O‘zbekiston Respublikasining yoshi 21dan 25gacha bo‘lgan fuqarolari to‘plami ($A\bigcap B$ to‘plam) hosil bo‘ladi. Bu yerda A va B to‘plamlar o‘zaro kesishadigan to‘plamlardir. ■

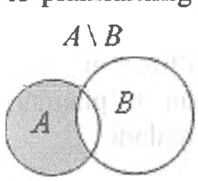
6- misol. $\boldsymbol{N}\bigcap\boldsymbol{R}=\boldsymbol{N}$. ■

7- misol. Butun dunyoda 2005 yilda tug‘ilgan bolalar to‘plamini T_5 bilan, 2006 yilda tug‘ilgan bolalar to‘plamini esa T_6 bilan belgilasak, u holda $T_5\bigcap T_6=\varnothing$ bo‘ladi. Demak, T_5 va T_6 to‘plamlar o‘zaro kesishmaydigan to‘plamlardir. ■

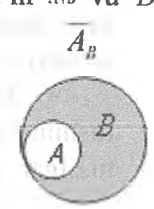
To‘plamlarning ayirmasi. Ixtiyoriy A va B to‘plamlar berilgan bo‘lsin. A to‘plamning B to‘plamda bo‘lmagan barcha elementlaridan tuziladigan to‘plamni hosil qilish A **to‘plamdan** B **to‘plamni ayirish** deb, tuzilgan to‘plam esa, shu A va B **to‘plamlarning ayirmasi** deb ataladi.

$A\backslash B$ to‘plamdan B to‘plamni ayirish natijasida hosil bo‘lgan to‘plam, ya’ni $A\backslash B$ va B to‘plamlarning ayirmasi $A\backslash B$ yoki $A-B$ ko‘rinishida belgilanadi. Bu yerda “ A to‘plamdan B to‘plamni ayirish amalini qo‘llab, $A\backslash B$ to‘plam hosil qilindi” deyish mumkin. 3- shaklda A va B to‘plamlar doiralar ko‘rinishida, $A\backslash B$ to‘plam esa bo‘yab tasvirlangan.

Ixtiyoriy A va B to‘plamlar uchun $A\bigcap B=\varnothing$ bo‘lsa, u holda $A\backslash B=\varnothing$ va $B\backslash A=\varnothing$ bo‘lishi ta’rifdan bevosita kelib chiqadi.



3- shakl



4- shakl

8- misol. 1- misoldagidek, $A=\{a,b\}$, $B=\{a,b,c\}$, $C=\{e,f,k\}$ bo‘lsa, u holda $A\backslash B=\varnothing$, $B\backslash A=\{c\}$, $B\backslash C=\varnothing$ bo‘ladi. ■

9- misol. A va B to‘plamlar 2- misoldagidek aniqlangan bo‘lsin. U holda, $A\backslash B$ to‘plamdan B to‘plamning ayirmasi $A\backslash B$ O‘zbekiston Respublikasidagi yoshi 16dan

21gacha bo'lgan fuqarolari to'plamini, B to'plamdan $A\B$ to'plamning ayirmasi $B\setminus A$ esa O'zbekiston Respublikasining yoshi 25dan 30gacha bo'lgan fuqarolari to'plamini anglatadi. ■

10- misol. $\boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{N}$ ayirma tarkibida natural sonlar qatnashmagan barcha haqiqiy sonlar to'plamidan iboratdir va $\boldsymbol{N}\setminus\boldsymbol{R}=\varnothing$. ■

To'ldiruvchi to'plam. Faraz qilaylik, $A\B$ va B to'plamlar berilgan va $A\subseteq B$ bo'lsin. Bu holda B to'plamning A to'plamga kirmagan barcha elementlaridan tashkil topgan $B\setminus A$ to'plam A **to'plamning** B **to'plamgacha to'ldiruvchi to'plami** deb ataladi.

A to'plamning B to'plamgacha to'ldiruvchi to'plami, odatda, $\overline{A}_B$ ko'rinishda belgilanadi. Bu yerda "$\overline{A}_B$ to'plam A to'plamni B to'plamgacha to'ldiradi" yoki "A to'plamni B to'plamgacha to'ldirish amalini qo'llab, $\overline{A}_B$ to'plam hosil qilindi" deyish mumkin. 4- shaklda A to'plam kichik doira, B to'plam katta doira ko'rinishida, $\overline{A}_B$ to'plam esa bo'yab tasvirlangan.

To'plamlar ustidagi yuqorida keltirilgan birlashma, kesishma va to'ldiruvchi to'plam tushunchalari ta'riflarini bevosita qo'llab, $A\cup\overline{A}_B=B$, $A\cap\overline{A}_B=\varnothing$, $A\setminus\overline{A}_B=A$ va $\overline{A}_B\setminus A=\overline{A}_B$ tengliklarni hosil qilish qiyin emas.

11- misol. Barcha juft sonlar to'plamini $A=\{2,4,...,2n,...\}$ $(n\in\boldsymbol{N})$ deb belgilasak, A to'plamni $\boldsymbol{N}$ to'plamgacha to'ldirish amalini qo'llab $\overline{A}_N=\{1,3,...,2n-1,...\}$ to'plamni, ya'ni barcha toq sonlar to'plamini hosil qilamiz. Demak, barcha toq sonlar to'plami barcha juft sonlar to'plamini natural sonlar to'plamigacha to'ldiradi. Xuddi shunga o'xshash, barcha toq sonlar to'plamini natural sonlar to'plamigacha to'ldirish amalini qo'llab, barcha juft sonlar to'plamini hosil qilish mumkin. ■

Universal to'plam va bulean[15] tushunchalari. To'plamlar nazariyasida, odatda, to'plamlar orasidagi turli munosabatlarni hisobga olishga to'g'ri keladi. Masalan, qaralayotgan to'plamlarning barchasi qandaydir boshqa bir to'plamning qism to'plami bo'lishi mumkin. Bu holda qaralayotgan barcha to'plamlarni o'zida qism to'plam sifatida saqlovchi to'plamga **universal to'plam** deb aytiladi.

Universal to'plam, odatda, $\boldsymbol{U}$ deb belgilanadi. Universal to'plamni **universum** deb ham atashadi [1].

Shuni ta'kidlash kerakki, universal to'plam tushunchasi nisbiy tushunchadir. Masalan, O'zbekiston sharoitida aholi bilan bog'liq qandaydir masala qaralayotgan bo'lsa, u holda O'zbekiston aholisi to'plamini universal to'plam deb qarash mumkin. O'z navbatida, O'zbekiston aholisi to'plami dunyo aholisi to'plamining qism to'plamidir.

Universal to'plamning ta'rifiga binoan, uning hamma qism to'plamlari orasida ikkita xosmas qismi bor: bittasi universal to'plamning o'zi, ikkinchisi esa bo'sh to'plam. Tabiiyki, universal to'plamning qolgan barcha qism to'plamlari xos qism to'plamlaridir.

Ko'pincha, berilgan "A to'plamning universal to'plamgacha to'ldiruvchisi" deyish o'rniga, qisqa qilib, berilgan "A to'plamning to'ldiruvchisi" deb aytiladi va $\overline{A}$ ko'rinishda belgilanadi. Bu yerda "$\overline{A}$ to'plam A to'plamni to'ldiradi" yoki "$\overline{A}$ to'plam A to'plamdan to'ldirish amalini qo'llab hosil qilindi" deyish mumkin.

To'plamlar nazariyasida bulean tushunchasi kiritilgan bo'lib, u muhim tushunchalardan biri hisoblanadi. Berilgan A to'plamning barcha qism to'plamlaridan tuzilgan to'plam A **to'plamning buleani** (A **to'plam uchun bulean**) deb ataladi.

A to'plamning buleani 2^A ko'rinishda belgilanadi.

12- misol. To'rtta elementga ega $A=\{a,b,c,d\}$ to'plam uchun 2^A bulean o'n oltita element-to'plamlardan iborat bo'ladi:

$$2^A=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},$$
$$\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},\{a,b,c,d\}\}.$$

---

[15] Bu ibora ingliz matematigi va mantiqchisi Jorj Bul (George Boole, 1815-1864) sharafiga shunday nomlangan.

Ravshanki, $|A|=4$ va $|2^A|=16$. ■

Nazorat savollari:

1. *To'plamlar nazariyasining asosiy tushunchalari nimadan iborat?*
2. *To'plamlar ustida qanday amallar bajariladi?*
3. *Qanday to'plamga to'plamlar algebrasi deb aytiladi?*
4. *Qaysi holda ikkita to'plam teng bo'ladi?*
5. *Chekli to'plamning quvvati deganda nima tushiniladi?*
6. *Xos va xosmas qism to'plamlarning bir-biridan farqi nimada?*
7. *Qanday to'plamga to'plamlarning kesishmasi deb aytiladi?*
8. *O'zaro kesishmaydigan to'plamlar deganda nimani tushunasiz?*
9. *Qanday to'plamlarga o'zaro kesishadigan to'plamlar deb aytiladi?*
10. *To'plamlarning ayirmasi nima?*
11. *Qanday to'plamga universal to'plam deb aytiladi?*
12. *Bulean deganda nimani tushunasiz?*

Adabiyotlar:

1. Mendelson E. Introduction to mathematical logic. Sixth edition. New York.Taylor&Francis Group,2015
2. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012.
3. H.T. To'rayev, I. Azizov Matematik mantiq va diskret matematika. 1,2 jild. "Tafakkur-Bo'stoni", Toshkent, 2011y.

2- ma'ruza: Maxsus binar munosabatlar. Ekvivalentlik munosabati. Tartiblangan to'plamlar.

Reja:

1. Maxsus binar munosabatlar.
2. Ekvivalentlik munosabati.
3. Tartiblangan to'plamlar.

**Kalit so`zlar:** munosabat, kichik, kata, juftlik, refleksivlik, tranzitivlik,simmetriklik, tartiblangan to`plam.

Fundamental tushunchalardan biri bo'lgan **munosabatlar** tushunchasi predmetlar va tushunchalar orasidagi aloqani ifodalaydi. Quyidagi to'liqsiz gaplar munosabatlarga misol bo'la oladi:

............kichik ....dan, ...teng ....ga,

...........bo'linadi ....ga va hokazo.

Bundan keyin munosabatlar tushunchasi to'plamlar nazariyasi nuqtai nazaridan turib o'rganiladi.

Munosabatlar tushunchasini aniqlash uchun **tartiblangan juftlik** tushunchasiga aniqlik kiritaylik. Ma'lum tartibda joylashgan ikki predmetdan tuzilgan elementga tartiblangan juftlik deyiladi. Matematikada tartiblangan juftlik quyidagi xususiyatlarga ega bo'ladi deb farz qilinadi[2]:

1) Har qanday (istalgan) x va y predmetlar uchun ma'lum obyekt mavjud, qaysikim $<x,y>$ kabi belgilanadi, x va y larning tartiblangan juftligi deb o'qiladi. Har bir x va y predmetlarga yagona tartiblangan $<x,y>$ juftlik mos keladi.

2) Ikkita $<x,y>$ va $<u,v>$ tartiblangan juftliklar berilgan bo'lsin. Agar $x=u$ va $y=v$ bo'lsa, u vaqtda $<x,y>=<u,v>$ bo'ladi.

Tartiblangan juftlik $<x,y>$ quyidagi to'plamdir

$$<x,y>=\{\{x\},\{x,y\}\},$$

ya'ni shunday ikki elementli to'plamdirki, uning bitta elementi $\{x,y\}$ tartibsiz juftlikdan iborat, ikkinchisi esa $\{x\}$ shu tartibsiz juftlikning qaysi a'zosi birinchi hisoblanishi kerakligini ko'rsatadi.

Tartiblangan juftlik $<x,y>$ ning x predmeti birinchi koordinatasi, y predmeti bo'lsa, ikkinchi koordinatasi deb aytiladi.

Tartiblangan juftliklar terminida tartiblangan n-liklarni aniqlash mumkin. x,y va z predmetlarning tartiblangan uchligi $<x,y,z>$ quyidagi tartiblangan juftliklar shaklida aniqlanadi: $<<x,y>,z>$. Xuddi shunday $x_1,x_2,...$ va x_n predmetlarning tartiblangan n-ligi $<x_1,x_2,...,x_n>$, ta'rifga asosan, $<<x_1,x_2,...,x_{n-1}>,x_n>$ tarzda aniqlanadi.

Elementlari tartiblangan juftliklardan iborat bo'lgan to'plamga tartiblangan juftliklar to'plami deb aytiladi.

Binar munosabatni tartiblangan juftliklar to'plami sifatida aniqlaymiz. Agar ρ biror munosabatni ifodalasa, u vaqtda $<x,y>\in\rho$ va $x\rho y$ ifodalarni o'zaro almashuvchi ifodalar deb hisoblaymiz. $x\rho y$ ifodani "predmet x predmet y ga nisbatan ρ munosabatda" deb o'qiladi.

Quyidagi $x=y$, $x<y$, $x\equiv y$ belgilar xudi $x\rho y$ ifodadan kelib chiqqan.

n-ar munosabati tartiblangan n-liklar to'plami sifatida aniqlanadi. 3-ar munosabatni ko'pincha adabiyotda ternar munosabat deb ham yuritiladi.

Misollar. 1. $\{<2,4>,\ <5,6>,\ <7,6>,\ <8,8>\}$ tartiblangan juftliklar to'plami binar munosabatga misol bo'la oladi.

2.Agar ρ ayniyat munosabatini bildirsa, u vaqtda $<x,y>\in\rho$ degani $x\equiv y$ ni bildiradi.

3.Agar ρ onalik munosabatini bildirsa, u vaqtda <Xurshida, Iroda>$\in\rho$ simvol Xurshida Irodaning onasi ekanligini bildiradi.

4.Ternar munosabatiga butun sonlar to'plamidagi qo'shish amali misol bo'la oladi. $5=2+3$ yozuvini $<5,2,3>\in +$ shaklida ham yozish mumkin.

Bundan keyin binar munosabat termini o'rniga qisqalik uchun munosabat terminini ishlatamiz.

$\{x/x\in A\}$ cimvolini quyidagicha tushunish kerak: { Shunday x lar to'plamiki, $x\in A$ }.

{ x/ ayrim y uchun $<x,y>\in\rho$ } to'plami ρ munosabatning aniqlanish sohasi deyiladi va D_ρ cimvoli bilan belgilanadi. {y/ ayrim x uchun $<x,y>\in\rho$ } to'plami ρ munosabatning qiymatlar sohasi deyiladi va R_ρ simvoli bilan belgilanadi. Boshqacha qilib aytganda, ρ munosabatning aniqlanish sohasi shu ρ munosabatning birinchi koordinatalaridan tuzilgan to'plamga aytiladi, ikkinchi koordinatalaridan tuzilgan to'plamga esa, qiymatlar sohasi deb aytiladi.

1-ta'rif. *Agarda X to'plamning istalgan x elementi uchun $x\rho x$ bo'lsa, u vaqtda ρ munosabatiga X to'plamidagi refleksiv munosabat deb aytiladi; agarda $x\rho y$ dan $y\rho x$ kelib chiqsa, u holda ρ - simmetrik munosabat deb aytiladi; agarda $x\rho y$ va $y\rho z$ dan $x\rho z$ kelib chiqsa, u vaqtda ρ - tranzitiv munosabat deb aytiladi.*

Shu ko'rsatilgan uchala xossaga ega bo'lgan munosabatlar matematikada ko'p uchragani uchun, ularga maxsus nom qo'yilgan.

2-ta'rif. *Agarda biror to'plamdagi munosabat refleksiv, simmetrik va tranzitiv xossalarga ega bo'lsa, u vaqtda bunday munosabatga shu to'plamdagi ekvivalentlik munosabati deyiladi.*

Agarda ρ munosabati X to'plamdagi ekvivalentlik munosabati bo'lsa, u vaqtda $D_\rho = X$.

Misollar. Quyidagi har bir munosabat ma'lum to'plamdagi ekvivaletlik munosabatiga misol bo'la oladi:

1.Istalgan to'plamdagi tenglik munosabati.

2.Yevklid tekisligining hamma uchburchaklar to'plamidagi o'xshashlik munosabati.

3.Butun sonlar to'plamidagi n moduli bo'yicha taqqoslama munosabati.

4.O'zbekistonda yashovchi odamlar to'plamidagi “bir uyda yashovchilar” munosabati.

Ekvivalentlik munosabati shunday asosiy xususiyatga egaki, u to'plamni kesishmaydigan qism to'plamlarga bo'ladi. Keyingi misolga, masalan, “bir uyda yashovchilar” munosabati O'zbekistonni bir-biri bilan kesishmaydigan “bir uyda yashovchilar” qism to'plamlariga bo'ladi. Bu aytilganlarni quyidagicha umumlashtirish mumkin.

ρ X to'plamdagi ekvivalentlik munosabati bo'lsin. U vaqtda X to'plamining A qism to'plami faqat shundagina ekvivalentlik sinfi yoki ekvivalentlik ρ - sinfi deb aytiladi, qachonki A to'plamining shunday x elementi topilib, $A = \{y / x \rho y\}$ bo'lsa.

Shunday qilib, X to'plamning shunday x elementi mavjud bo'lsaki, $A = \rho[\{x\}]$ tenglik bajarilsa, u vaqtda A to'plam ekvivalentlik sinfi bo'la oladi.

Agarda ρ munosabati to'g'risida hyech qanday anglashmovchilik tug'ilmaydigan bo'lsa, u vaqtda X to'plami $[x]$ shaklida belgilanadi, ya'ni $\rho[\{x\}] = [x]$ va x yuzaga keltirgan ekvivalentlik sinfi deb aytiladi.

Funksiya tushunchasini oldingi bo'limlarda o'rganilgan terminlarda aniqlaymiz. Funksiyaning grafigi tartiblangan juftliklar to'plamidan iborat. Funksiya bilan uning grafigi o'rtasida hyech qanday farq yo'q. Funksiya shunday munosabatki, uning ikki xil elementining birinchi koordinatalari hyech qachon teng bo'lmaydi.

Shunday qilib, f munosabati quyidagi talablarni qanoatlantirgandagina funksiya bo'la oladi:

1. f ning elementlari faqatgina tartiblangan juftliklardan iborat.
2. Agar $< x, y >$ va $< x, z >$ f elementlari bo'lsa, u vaqtda $y = z$.

Misol: 1. $\{<1,2>, <2,2>, <3,4>$ funsksiyadir. $D_s = \{1,2,3\}$ $R_s = \{2,4\}$.

2. $\{<3,4>, <3,5>, <4,6>\}$ munosabati funksiya bo'la olmaydi, chunki $<3,4>$ va $<3,5>$ elementlarining birinchi koordinatalari teng.

3. $\{< x, x^2 + x + 1 > / x \in R\}$ funksiyadir, chunki agar $x = u$ bo'lsa, u vaqtda $x^2 + x + 1 = u^2 + u + 1$.

4. $\{< x^2, x > / x \in R\}$ funksiya bo'la olmaydi, chunki uning $<1,1>$, $<1,-1>$ elementlari mavjud.

Agar f - funksiya va $< x, y > \in f$ bo'lsa, ya'ni $x f y$ bo'lsa, u vaqtda x funksiyaning argumenti deb aytiladi va y ni f funksiyaning x dagi qiymati yoki x elementining obrazi deyiladi.

y ni belgilash uchun xf, $f(x)$, fx yoki x^f simvollarni ishlatadilar. $f(x)$ cimvolni $f(x) = f[\{x\}]$ deb, ya'ni x elementining f-obrazlari to'plami deb qarash mumkin.

Ikki f va g funksiyalar bir xil elementlardan tuzilgan bo'lsa, bunday funksiyalar teng bo'ladi $(f = g)$, ya'ni boshqacha qilib aytganda, $D_f = D_g$ va $f(x) = g(x)$ bo'lsagina, $f = g$ bo'ladi. Shunday qilib, funksiya berilgan bo'lishi uchun aniqlanish sohasi va shu sohaning har bir elementi uchun uning qiymati berilishi kerak.

1-ta'rif. *Agar biror X to'plamdagi x va y elementlari uchun $y \rho x$ munosabat o'rniga $x \rho y$ munosabat o'rinli bo'lishini ko'rsatuvchi munosabatga tartiblash munosabati deb aytiladi.*

Tartiblash munosabati yordamida elementlarni qaytartibda qo'yish masalasini hal etish mumkin. Haqiqiy sonlar to'plami uchun $<$, $\leq$, $>$, $\geq$ munosabatlari tartiblash munosabatlariga misol bo'la oladi. To'plamlar sistemasi uchun xuddi shunday rolni $\subset$, $\subseteq$ munosabatlar o'ynaydi.

2-ta'rif. *Agar X to'plamining istalgan x va y elementlari uchun bir vaqtda $x\rho y$ va $y\rho x$ bajarilishidan $x=y$ kelib chiqsa, bunday ρ munosabat antisimmetrik munosabat deb aytiladi.*

3-ta'rif. *X to'plam ichida refleksivlik, antisimmetrik va tranzitivlik xossalariga ega bo'lgan ρ munosabatga X to'plamdagi qisman tartiblash munosabati deb aytiladi.*

Har qanday refleksiv va tranzitiv munosabatga tartiblash munosabati deb aytiladi.

Qisman tartiblash munosabati $\leq$ simvoli bilan belgilanadi. Agar $\leq$ munosabati X to'plamni qisman tartiblasa, u vaqtda X to'plamning istalgan x va y elementlari uchun $x\leq y$ munosabati bajarilishi ham mumkin, bajarilmasligi ham mumkin.

Xuddi shunday, agar $x\leq y$ va $x\neq y$ bo'lsa, u vaqtda $x<y$ deb yoziladi va x y dan kichik deb aytiladi.

4-ta'rif. *X to'plamning har qanday x elementi uchun $x\rho x$ munosabat bajarilmasa, u vaqtda ρ X to'plamdagi irrefleksiv munosabat deb aytiladi.*

Agar $\leq$ munosabati X to'plamdagi qisman tartiblash munosabati bo'lsa, u vaqtda $<$ munosabati X to'plamidagi irrefleksiv va tranzitiv munosabat bo'ladi.

5-ta'rif. *ρ munosabat qisman tartiblash munosabati bo'lsin. ρ munosabatning aniqlanish sohasiga qarashli har qanday ikki xil x va y elementlari uchun $e\, x\rho y$ yoki $e\, y\rho x$ o'rinli bo'lsa, bunday munosabatga chiziqli (oddiy) tartiblash munosabati deb aytiladi.*

Haqiqiy sonlarni qiymatiga qarab tartiblash chiziqli tartiblash munosabatiga misol bo'la oladi.

6-ta'rif. *Agar biror X to'plamda qisman tartiblash munosabati berilgan bo'lsa, bunday to'plamga qisman tartiblangan to'plam deb aytiladi va u $<x,\leq>$ tartiblangan juftlikdan iborat bo'ladi.*

Agar X to'plamda oddiy tartiblash munosabati berilgan bo'lsa, u vaqtda X oddiy tartiblangan to'plam deb aytiladi va u ham $<x,\leq>$ tartiblangan juftlikdan iborat bo'ladi. Bu yerda $\leq$ X to'plamini oddiy (chiziqli) tartiblaydi.

Masalan, agar f to'plamlar sistemasi bo'lsa, u vaqtda $<f,\subseteq>$ qisman tartiblangan to'plam bo'ladi.

$f:x\rightarrow x^1$ funksiyasi X to'plamining $\leq$ tartiblash munosabatiga va X^1 to'plamining $\leq^1$ tartiblash munosabatiga nisbatan shundagina tartibini saqlaydigan funksiya bo'ladi, qachonki $x\leq y$ dan $f(x)\leq^1 f(y)$ kelib chiqsa, X va X_1 to'plamlar o'rtasidagi o'zaro bir qiymatli bog'lanish $<x,\leq>$ va $<x^1,\leq^1>$ ga qisman tartiblangan to'plamlar o'rtasidagi izomorfizm deb aytiladi. Agar shunday bog'lanish mavjud bo'lsa, u vaqtda ko'rsatilgan qisman tartiblangan to'plamlar izomorfdir.

X to'plamning hamma x lari uchun $y\leq x$ bo'lsa, u vaqtda X to'plamning y elementi X to'plamning qisman tartiblash munosabati $\leq$ ga nisbatan eng kichik elementi deb aytiladi. Agar shunday element mavjud bo'lsa, u yagonadir.

X to'plamning hyech bir x elementi uchun $x<y$ munosabati bajarilmasa, u vaqtda X to'plamning u elementi shu to'plamning qisman tartiblash $\leq$ munosabatiga nisbatan minimal (eng kichik) elementi deb aytiladi. Minimal element berilgan to'plamda bir nechta bo'lishi mumkin.

Agar har qanday $x\in y$ uchun $x\leq y$ bo'lsa, u vaqtda X to'plamning y elementi shu to'plamning $\leq$ munosabatiga nisbatan eng katta elementi deb aytiladi. Agar shunday element mavjud bo'lsa, u ham yagonadir.

X to'plamning hyech bir x elementi uchun $x>y$ munosabati bajarilmasa, u vaqtda X to'plamning u elementi shu to'plamning $\leq$ munosabatiga nisbatan **maksimal** elementi deb aytiladi.

Agar X to'plamning har bir bo'sh emas qism to'plami eng kichik elementga ega bo'lsa, u vaqtda $<x,\leq>$ qisman tartiblangan to'plamga to'liq tartiblangan to'plam deb aytamiz. Masalan, $\{0,1,2,...\}$.

Agar $<x,\leq>$ qisman tartiblangan va $A \subseteq X$ bo'lsin. U vaqtda istalgan $a \in A$ uchun $a \leq x$ bajarilsa, X to'plamning x elementi A to'plamning yuqori chegarasi deb aytiladi.

Xuddi shunday, agar istalgan $a \in A$ uchun $x \leq a$ bajarilsa, x elementi A to'plamning quyi chegarasi deb aytiladi.

Agar M tartiblangan to'plam bo'lsa, u holda uning M^1 qism to'plami ham tartiblangan bo'ladi. Agar bu tartiblangan to'plam chiziqli bo'lsa, u vaqtda M^1 qism to'plam M to'plamning **zanjiri** deyiladi.

$l = |M^1| - 1$ ga zanjirning uzunligi deb aytiladi. Bu yerda $|M^1|$- chiziqli tartiblangan M^1 qism to'plamning **quvvati**. l uzunlikdagi har bir zanjir $1,2,...,l+1$ butun sonli zanjirga izomorfdir.

M to'plamning eng katta elementini m_i bilan va eng kichik elementini m_0 bilan belgilaymiz.

M tartiblangan to'plam m_i elementining **balandligi** $d(m_i)$ deb $m_0 < m_1 < m_2 < ... < m_i$ (M to'plamning) zanjirlar uzunligining maksimumiga (l_{max}) aytiladi. M tartiblangan to'plam uzunligi $d(M)$ deb M to'plamdagi zanjirlar uzunligining maksimumiga aytiladi, ya'ni tartiblangan M to'plamning uzunligi $d(M)$ uning elementlari balandligi $d(m_i)$ ning maksimumiga teng bo'ladi.

$$d(M) = \max d_i(m_i), \quad m_i \in M.$$

Nazorat savollari:

1. *Munosabatlar tushunchasi nimani ifodalaydi?*
2. *Binar munosabat deb nimaga aytamiz?*
3. *Ekvivalentlik munosabati. Qanday munosabatlarga refleksiv, simmetrik va tranzitiv munosabatlar deb aytiladi?*
4. *Funksiya tushunchasi. Funksiyalar superpozisiyasi deb nimani tushunasiz?*
5. *Tartiblash munosabatini tushuntiring?*
6. *Panjara haqida tushunchalar. Panjaraning distributivlik va dedekindlik kriteriyalari nimalardan iborat?*

Adabiyotlar:

1. Mendelson E. Introduction to mathematical logic. Sixth edition. New York.Taylor&Francis Group,2015.
2. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012.
3. H.T. To'rayev, I. Azizov Matematik mantiq va diskret matematika. 1,2 jild. "Tafakkur-Bo'stoni", Toshkent, 2011y.

3- ma'ruza: Mulhaza. Mantiqiy bog`lovchilar. Formula, qismiy formula.

Reja:

1. Mulohaza. Chin (yolg'on)mulohaza.

2. Qiymatlar satri. Inkor, kon'yunksiya, diz'yunksiya.

3. Propositsional o`zgaruvchilar.

4. Fikrlar algebrasining formulasi.

Kalit so`zlar: mulohaza, chinlik jadvali, formula, konyksiya, inkor, fikr, mantiqiy funksiya, implikatsiya.

Matematik mantiqning ushbu mulohazalar algebrasi deb atalgan bo'limida asosiy tekshirish obyektlari bo'lib gaplar xizmat qiladi. Matematik mantiq har bir gapning ma'nosiga qarab, uning chin, haqqoniy, to'g'ri yoki yolg'on, noto'g'ri bo'lishi bilangina qiziqadi.

Masalan: 1. “Toshkent - O'zbekistonning poytaxti”, “Oy yer atrofida aylanadi” degan gaplar - chindir.

2.“Yer oydan kichik”, “3 > 5” degan gaplarning har biri yolg'ondir.

Shuni ham aytish kerakki, ko'pgina gaplarning chin yoki yolg'onligini darhol aniqlash qiyin. Masalan, “Bugungi tun kechagidan qorong'iroq”, degan gap qaysi vaqtda va qaysi joyda aytilishiga qarab chin ham, yolg'on ham bo'lishi mumkin.

1. Oldimga kel. 2. Uyda bo'ldingmi? 3. Yangi yil bilan. 4. Agar oldin bilsam edim - gaplar chin yoki yolg'on qiymat qabul qilmaydilar.

Shunday qilib, matematik mantiq: “Har bir gap chin yoki yolg'on bo'lish xossasiga ega” deb qabul qiladi.

1-ta'rif. *Faqat chin yoki yolg'on qiymat qabul qila oladigan darak gaplarga mulohazalar deb aytamiz.*

Demak, har bir mulohaza ma'lum holatda chin yoki yolg'on qiymatga ega. Bundan keyin, chin qiymatni qisqacha “**ch**” va yolg'on qiymatni “**yo**” bilan belgilaymiz.

Mulohazalarni belgilash uchun, asosan, lotin alfavitining kichik harflari ishlatiladi:

$$a, b, c, ..., u, v, ..., x, y, z$$

Ma'lum mulohazalar borki, hamma mumkin bo'lgan holatlarda (vaziyatlarda) chin qiymatni (yolg'on) qabul qiladilar. Bunday mulohazalarga absolyut chin (yolg'on) mulohazalar deb aytiladi.Mulohazalar algebrasida odatda, konkret mulohazalar bilangina emas, balki har qanday istalgan mulohazalar bilan shug'ullanadilar. Bu esa o'zgaruvchi mulohaza tushunchasiga olib keladi. Agar o'zgaruvchi mulohazani x deb belgilasak, u holda x konkret mulohazalarning istalganini ifodalaydi. Shuning uchun x ikki: “**ch**” va “**yo**” qiymatli o'zgaruvchini ifodalaydi.

$x_1, x_2, ..., x_n$ ta o'zgaruvchi mulohaza berilgan bo'lsin. Bularning har qaysisi chin va yolg'on qiymatlarni qabul qiladi. Shuning uchun quyidagi qiymatlar satrini tuzish mumkin:

yo, yo, ..., yo,
ch, yo, ..., yo,
yo, ch, ..., yo,
....
ch, ch, ..., ch.

Demak, o'zgaruvchilar soni n ta bo'lsa, u vaqtda $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$ ta qiymatlar satriga ega bo'lamiz.

$x_1, x_2 : 2^2 = 4$ ta qiymatlar satri.

$x_1, x_2, x_3 : 2^3 = 8$ ta qiymatlar satri.

Matematik mantiqda “emas”, “yoki”, “va”, “agar..., u vaqtda”, “shunda va faqat shundagina...., qachon....” so'zlar (bog'lovchilar) mulohazalar orasidagi mantiqiy amallar deyiladi. Bu amallar yordamida elementar mulohazalardan murakkab mulohaza quriladi.

Mulohazalar ustidagi bu amallar matematik mantiqning elementar qismi bo'lgan mulohazalar mantiqi yoki mulohazalar algebrasi deb ataluvchi qismida o'rganiladi. Har ikkala termin ("mulohazalar mantiqi" va "mulohazalar algebrasi") sinonim sifatida ishlatiladi, chunki ular mantiqning ma'lum qismini ikki nuqtai nazardan ifodalaydi: bu ham mantiq (o'z predmetiga ko'ra), ham algebra (o'z metodiga ko'ra).

Demak, fikrlar to'plami Φ da shunday

$$\mu = \mu(A) \ *$$

funksiya aniqlanib,

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 \ \ agar \ \ \grave{A} - chin \ \ fikr \ \ bo'lsa, \\ 0, \ agar \ \ \grave{A} - yolg'on \ fikr \ \ bo'lsa \end{cases}$$

bo'lar ekan. $\mu = \mu(A)$ mantiqiy funksiya, μ_0 ga esa ($\mu_0 = \mu(A_0)$, $A_0 \in \Phi$) mantiqiy qiymat deyiladi. [1](2-bet)

Odatda, fikrlar bir-birlari bilan turli usullarda bog'lanib, yangi murakkab fikrlarni yuzaga keltiradi. Albatta, bunday fikrlarning murakkabligi ularning bog'lanishlariga bog'liq bo'ladi. Quyida shunday bog'lanishlarni (mantiqiy amallarni) qaramaymizki, bunda murakkab fikrning chinligi, unda qatnashgan fikrlarning chinligi orqali bir qiymatli aniqlanadigan bo'lsin.

Endi fikrlar ustida bajariladigan mantiqiy amallarni keltiramiz.

1^0. Inkor amali. Biror A fikrni qaraylik. A chin bo'lganda yolg'on, A yolg'on bo'lganda chin bo'ladigan fikr A fikrning inkori deyiladi. Uni A fikr oldiga ushbu $\rceil$ ishorani qo'yish bilan belgilanadi va « A emas» deb o'qiladi. [1](3-4-bet)

Demak, A fikr, ($\rceil$A) esa uning inkori. Bu holda

$$A\text{-chin bo'lganda } \mu(A) = 1, \ \ \mu(\rceil A) = 0$$

$$A\text{-yolg'on bo'lganda } \mu(A) = 0, \ \ \mu(\rceil A) = 1$$

bo'ladi.

2^0. Kon'yunksiya amali. Ikki A va B fikrlarni qaraylik. A va B fikrlar bir vaqtda chin bo'lgandagina chin bo'ladigan fikr A va B larning kon'yunksiya bog'lanishidan sodir bo'lgan fikr (qisqacha A va B fikrlarning kon'yunksiyasi) deyiladi. Uni $(A \wedge B)$ kabi belgilanib, « A kon'yunksiya B » deb o'qiladi. [1](4-bet)

Bu holda A va B fikrlar $(A \wedge B)$ ning kon'yunktiv hadlari deyiladi.

(Kon'yunksiya mantiqiy amal, so'zlashuvlarda «va» bog'lovchisini ifodalaydi).

Ravshanki,

$$\mu(A) = 1, \ \mu(B) = 1 \ \ bo'lganda \ \ \mu(A \wedge B) = 1$$

$$\mu(A) = 1, \ \mu(B) = 0 \ \ bo'lganda \ \ \mu(A \wedge B) = 0$$

$$\mu(A) = 0, \ \mu(B) = 1 \ \ bo'lganda \ \ \mu(A \wedge B) = 0$$

$$\mu(A) = 0, \ \mu(B) = 0 \ \ bo'lganda \ \ \mu(A \wedge B) = 0$$

bo'ladi.

3^0. Diz'yunksiya amali. A va B fikrlarning kamida bittasi chin bo'lgandagina chin bo'ladigan fikrlarning diz'yunktiv bog'lanishidan sodir bo'lgan fikr (qisqacha A va B fikrlarning diz'yunksiyasi) deyiladi.

Uni $(A \vee B)$ kabi belgilanib, « A diz'yunksiya B » deb o'qiladi. A va B fikrlar $(A \vee B)$ ning diz'yunktiv hadlari deyiladi. (Diz'yunksiya mantiqiy amali so'zlashuvlarda «yoki» bog'lovchisini ifodalaydi). Bu holda

$$\mu(A) = 1, \ \mu(B) = 1 \ \ bo'lganda \ \ \mu(A \vee B) = 1$$

$$\mu(A) = 1, \ \mu(B) = 0 \ \ bo'lganda \ \ \mu(A \vee B) = 1`$$

$$\mu(A) = 0, \ \mu(B) = 1 \ \ bo'lganda \ \ \mu(A \vee B) = 1$$

$$\mu(A) = 0, \ \mu(B) = 0 \ \ bo'lganda \ \ \mu(A \vee B) = 0$$

bo'ladi. [1] (4-bet)

4^0. Implikasiya amali. A fikr chin, B fikr yolg'on bo'lgandagina yolg'on bo'lib, qolgan barcha hollarda chin bo'ladigan fikr A va B larning implikativ bog'lanishidan sodir bo'lgan fikr (qisqacha A va B larning implikasiyasi) deyiladi. Uni $(A \to B)$ kabi belgilanib, « A implikasiya B » deb o'qiladi. [1] (6-bet)

Implikasiya uchun

$$\mu(A)=1,\ \mu(B)=1\ \ bo'lganda\ \ \mu(A\to B)=1$$
$$\mu(A)=1,\ \mu(B)=0\ \ bo'lganda\ \ \mu(A\to B)=0`$$
$$\mu(A)=0,\ \mu(B)=1\ \ bo'lganda\ \ \mu(A\to B)=1$$
$$\mu(A)=0,\ \mu(B)=0\ \ bo'lganda\ \ \mu(A\to B)=1$$

bo'ladi.

Shunday qilib fikrlar ustida inkor ($\rceil$), kon'nksiya $(\wedge)$, diz'yunksiya $(\vee)$, implikasiya $(\to)$ va ekvivalensiya $(\leftrightarrow)$ amallari kiritildi.

Yuqoridagi (1^0), (2^0), (3^0), (4^0) va (5^0) munosabatlarni inobatga olib, quyidagi chinlik jadvalini tuzamiz:

Chinlik jadvali [1] (10-bet)

μ(A)	μ(B)	μ(⌉A)	μ(A ∧ B)	μ(A ∨ B)	μ(A → B)	μ(A ↔ B)
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Propozisional formalar [1] (25-bet)

Yuqorida biz fikrlar ustida mantiqiy amallar bilan tanishdik. Unda A va B fikrlar bo'lganda

$$(\rceil A),\ (A \wedge B),\ (A \vee B),\ (A \to B),\ (A \leftrightarrow B)$$

lar ham fikr bo'lishini ko'rdik. Ayni paytda bu fikrlar A va B lardan tashkil topgan murakkab fikrlarni ifodalaydi.

Aytaylik, A chin, B yolg'on fikr bo'lsin. Unda

$$(A \vee B)$$

chin fikr bo'ladi.

Agar C fikr yolg'on, D fikr chin bo'lsa, unda

$$(C \leftrightarrow (\rceil D))$$

chin fikr bo'ladi. Ravshanki,

$$((A \vee B) \to (C \leftrightarrow (\rceil D))$$

chin fikr bo'lib, u fikrlar va mantiqiy amallardan tashkil topgan ifodadir.

Shunga o'shash,

$$(((A \wedge B) \to C) \vee ((A \vee C) \wedge (\rceil B)))$$

ham fikrlar va amallardan tuzilgan ifoda bo'ladi.

Endi fikrlar va mantiqiy amallardan tashkil topgan ifodalarni chuqurroq o'rganamiz. Bu formula tushunchasiga olib keladi.

Fikrlar to'plami Φ hamda mantiqiy amallar $\rceil$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$ lardan tashkil topgan ushbu $<\Phi\ ;\rceil,\ \wedge,\ \vee,\ \to,\ \leftrightarrow>$ - oltilik fikrlar algebrasi deyiladi.

<u>Eslatma</u>. Aslida fikrlar algebrasi deganda ushbu_$<\Phi\,;\rceil,\ \wedge,\ \vee>$ to'rtlik tushuniladi. Buning boisi shuni , biz $\to$, $\leftrightarrow$ amallarini $\rceil$, $\wedge$, $\vee$ murakkab funksiya sifatida ifodalanishi mumkinligini ko'rsatamiz.

Bunda Φ fikrlar algebrasining asosiy to'plami; $\urcorner$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ lar esa fikrlar algebrasining asosiy amallari deyiladi.

Ma'lumki, fikrlar turlicha bo'lib, ularni biror o'zgaruvchining «qiymatlari» deb qarash mumkin.

O'zgarish sohasi fikrlar to'plamidan iborat bo'lgan har qanday o'zgaruvchi propozisional o'zgaruvchi deyiladi. Bunday o'zgaruvchilarni biz

$$X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1, \ldots, X_n, Y_n, Z_n \quad (X, Y, Z\ X_1, Y_1, Z_1)$$

harflari bilan belgilaymiz.

Endi fikrlar algebrasining asosiy tushunchalaridan biri formula tushunchasini keltiramiz.

Fikrlar algebrasining formulasi (qisqacha F.A.F) deyilganda fikrlar va mantiqiy amallarning bog'lanishidan tashkil topgan ifodani tushunamiz.

Demak, biz yuqorida F.A.F ga bir necha bor duch kelgan ekanmiz.

F.A.F tushunchasi induktiv usulda beriladi.

1.1-Ta'rif. 1) Har qanday propozisional o'zgaruvchi F.A.F bo'ladi.

2) Agar F_1 ва F_2 lar F.A.F bo'lsa, u holda

$$(\urcorner F_1),\ (F_1 \wedge F_2),\ (F_1 \vee F_2),\ (F_1 \rightarrow F_2),\ (F_1 \leftrightarrow F_2),$$

ifodalar ham F.A.F bo'ladi.

3) Boshqacha ko'rinishli F.A.F yuq, ya'ni har qanday F.A.F faqat yuqorida keltirilgan 1 va 2 bandlar yordamida hosil qilinadi.

Demak, propozisional o'zgaruvchilar - mantiqiy amallar (bog'lovchilar) $\urcorner, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ va qavslardan tuzilgan ifodalar faqat va faqat 1 va 2 bandlar yordamida tashkil topsagina F.A.F bo'lar ekan.

Misol 1. Ushbu

$$((X_1 \wedge X_2) \rightarrow ((\urcorner X_1) \vee X_2))$$

ifodani qaraylik.

Ta'rifning 1) bandiga ko'ra $X_1, X_2,\ X_3$ lar, 2) bandiga ko'ra $(\urcorner X_1)$, $(X_1 \wedge X_2)$lar F.A.F bo'ladi. Yana 2) bandga ko'ra $((\urcorner X_1) \vee X_2)$ va $((X_1 \wedge X_2) \rightarrow ((\urcorner X_1) \vee X_2))$ ifodalarni F.A.F bo'lishini topamiz.

Demak,

$$((X_1 \wedge X_2) \rightarrow ((\urcorner X_1) \wedge X_2))$$

ifoda F.A.F bo'ladi.

Misol. 2. Ushbu $((X_2 \wedge X_3) \leftrightarrow (X_2 \vee X_3))$

ifodani qaraylik.

Ta'rifning 1 va 2 bandlariga binoan X_2, X_3, X_4, $((X_1 \wedge X_2) \cdot (X_2 \vee X_4))$ lar va nihoyat

$$((X_1 \wedge X_2) \leftrightarrow (X_2 \vee X_4))$$

ifoda F.A.F bo'ladi.

Misol. 3. Ushbu

$$(\urcorner X_1) \rightarrow ((\urcorner X_2) \wedge X_3))$$

ifodani qaraylik.

Ravshanki, X_1, X_2, X_3 hamda $(\urcorner X_1), (\urcorner X_2)$lar F.A.F bo'ladi. Ayni paytda ( ) ifoda F.A.F emas, chunki ( ) da butun ifodani o'rovchi chap qavs yetishmaydi.

Aytaylik, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ propozisional o'zgaruvchilar bo'lsin. Bu o'zgaruvchilardan tuzilgan F.A.F ni umumiy holda quyidagicha

$$F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

belgilaymiz.

Endi $(*)$ da $X_1, X_2, ..., X_n$ larning o'rniga mos ravishda tayin olingan $A_1, A_2, ..., A_n$ $(A_k \in \Phi,$ $k = 1,2,...,n$ fikrlarni qo'yib

$$F(A_1, A_2, ..., A_n)$$

murakkab fikrni hosil qilamiz.

Har bir A_k $(k = 1,2,...,n)$ fikrning qiymati $\mu(A_k)$ $(k = 1,2,...,n)$ ga ko'ra, $F(A_1, A_2, ..., A_n)$ murakkab fikrning qiymati ushbu

$$\mu(F(A_1, A_2,...,A_n)) = F(\mu(A_1), \mu(A_2), ..., \mu(A_n))$$

tenglikdan topiladi.

Ma'lumki, har bir fikr 1 yoki 0 qiymatni (fikr chin bo'lganda 1 ni, fikr yolg'on bo'lganda 0 ni) qabul qiladi.

Yuqorida keltirilgan $(*)$ dan ko'rinadiki, murakkab $F(A_1, A_2, ..., A_n)$ fikrning qiymati $\mu(F(A_1, A_2,...,A_n))$ ni $A_1, A_2, ..., A_n$ fikrlar o'rniga, ularning mantiqiy qiymatlari 1 yoki 0 ni (1 yoki 0 simvollarni) qo'yib, so'ngra bu simvollarga nisbatan formulada ishtirok etgan amallar ketma-ket (chinlik jadvaliga binoan) bajarilishi natijasida topiladi.

Masalan, $F(A_1, A_2, ..., A_n) = ((A_1 \to A_2) \wedge (\rceil A_3))$

bo'lib,

$$\mu(A_1) = 1, \quad \mu(A_2) = 0, \quad \mu(A_3) = 1$$

bo'lsin. Unda

$\mu(F(A_1, A_2, ..., A_n) = \mu((A_1 \to A_2) \wedge (\rceil A_3)) = ((\mu(A_1) \to \mu(A_2) \wedge (\rceil A_3)) = (1 \models 0) \wedge 0) = 0$

bo'ladi.

Odatda, bunday holda $X_1, X_2, ..., X_n$ propozisional o'zgaruvchilar mos ravishda 0,1 qiymatlarni qabul qilganda

$$((X_1 \to X_2) \wedge (\rceil X_3))$$

formula 0 qiymatni qabul qiladi deyiladi. Ko'p hollarda $\mu(A) = 0,$ $\mu(B) = 1$ o'rniga $A = 0,$ $B = 1$ deb yozish qulay bo'ladi.

Bu kelishuvga ko'ra, $X_1, X_2, ..., X_n$ o'zgaruvchilarning chinlik qiymatlari mos ravishda $e_1, e_2, ..., e_n$ (bunda $e_i = 1$ yoki $e_i = 0$ $(i = 1,2,...,n)$) bo'lgan, $A_k \in \Phi$ $(k = \overline{1,n})$ fikrlar uchun $\mu(F(A_1, A_2, ..., A_n) = e$ deb yozish o'rniga, $F(e_1, e_2, ..., e_n) = e$ deb yozamiz.

Tavtologiya tushunchasi.

Propozisional o'zgaruvchilar $X_1, X_2, ..., X_n$ bo'lgan F.A.F. $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $i(i = 1,2,3,...,n)$ lar uchun $e_i = 0$ yoki $e_i = 1$ bo'lsa, $e_1, e_2, e_3, ..., e_n$ ketma-ketlik $X_1, X_2, ..., X_n$ propozisional o'zgaruvchilarning chinlik taqsimoti deyiladi.

Demak, propozisional o'zgaruvchilar $x_1, x_2, ..., x_n$ larning chinlik taqsimoti 0 va 1 simvollardan tuzilgan ixtiyoriy $e_1, e_2, e_3, ..., e_n$ ketma-ketlikni ifodalar ekan.

1-ta'rif. Agar $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ formulada $x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilarning shunday chinlik taqsimoti $e_1, e_2, e_3, ..., e_n$ topilib, $F(e_1, e_2, ..., e_n) = 1$ $(F(e_1, e_2, ..., e_n) = 0)$ bo'lsa, $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ bajariluvchi (radlanuvchi) formula deyiladi.

Misol1. $F(x_1, x_2) = (x_1 \to x_2)$ formulada $F(1,0) = 0$ sababli u radlanuvchi formula, $F(1,0) = 1$ sababli u bajariluvchi formula bo'ladi.

2-ta'rif. Agar $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ formula propozisional o'zgaruvchi $x_1, x_2, ..., x_n$ larning ixtiyoriy chinlik taqsimotida bir (nol) qiymat qabul qilsa, $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ tavtologiya (ziddiyat) deyiladi.

Misol 2. $F_1(x_1, x_2) = ((x_1 \wedge x_2) \to (x_1 \vee x_2))$

formulada $F_1(0,0)=F_1(1,0)=F_1(0,1)=F_1(1,1)=1$ bo'lgani uchun $F_1(x_1,x_2)$ formula tavtologiya bo'ladi.

Kuyidagi $F_2(x_1,x_2)=((x_1 \wedge x_2) \to \urcorner(x_1 \vee x_2))$ formulada esa

$F_1(0,0)=F_2(1,0)=F_2(0,1)=F_2(1,1)=0$ bo'lganligi sababli F_2 formula ziddiyat bo'ladi.

Odatda $F(x_1,x_2,...,x_n)$ formulani tavtologiya ekani, uni oldiga ushbu $\vDash$ belgini qo'yish bilan ifodalanib, $\vDash F\ (x_1,x_2,...,x_n)$ kabi yoziladi.

Faraz qilaylik,

$F(x_1,x_2,...,x_n)$ hamda

$$F_1(x_1,x_2,...,x_n),\ \ F_2(x_1,x_2,...,x_n),\ ...,\ F_s(x_1,x_2,...,x_n)$$

formulalar berilgan bo'lsin.

3-ta'rif. Agar $x_1,\ x_2,....,\ x_n$ larning ixtiyoriy chinlik taqsimoti $e_1,\ e_2,....,e_n$ lar uchun

$$F_1(e_1,e_2,...,e_n)=1,$$
$$F_2(e_1,e_2,...,e_n)=1,$$
$$F_3(x_1,x_2,...,x_n)=1$$

bo'lishidan $F(e_1,e_2,...,e_n)=1$ ekani kelib chiqsa, u holda $F(x_1,x_2,...,x_n)$ formula $F_1(x_1,x_2,...,x_n),\ \ F_2(x_1,x_2,...,x_n),\ ...,\ F_s(x_1,x_2,...,x_n)$ formulalarning mantiiqiy natijasi deyiladi. Uni

$F_1,\ F_2,...,\ F_s\ \vDash\ F\ (x_1,x_2,...,x_n)$ kabi belgilanadi.

Misol. 3. $F(x_1,x_2)=(x_1 \vee x_2)$ hamda $F_1=x_1,\ F_2=x_2,$ bo'lsin. Ravshanki, $F_1(x_1,x_2)=x_1,\ \ F_2(x_1,x_2)=x_2,\ \ F(x_1,x_2)=(x_1 \vee x_2)$ lar uchun $F_1(1,1)=1,\ F_2(1,1)=1$ hamda $F_1(1,1)=1$ bo'ladi. Demak, $F_1,\ F_2 \vDash F(x_1,x_2)$ ya'ni $x_1,\ x_2\ \vDash (x_1 \vee x_2)$ bo'ladi. (Bu misolda $x_1,\ x_2$ larning qolgan chinlik taqsimotlari uchun $F_1(e_1,e_2)=0,\ \ F_2(e_1,e_2)=0$ bo'lganligi uchun F_1 va F_2 larning bu qiymatlari qaralmadi).

Misol 4. $F_1(x_1,x_2)=x_1,\ \ F(x_1,x_2)=(x_1 \wedge x_2)$

misolda $F_1(1,0)=1,\ \ F(1,0)=0$ bo'lganligi sababli $F(x_1,x_2)=(x_1 \wedge x_2)$ formula $F_1(x_1,x_2)=x_1$ formulaning mantiqiy natijasi bo'lmaydi (ya'ni $x_1 \not\vDash (x_1 \wedge x_2)$ munosabat o'rinli emas).

Nazorat savollari:

1. Mulohaza deb nima aytiladi?
2. Mulohazaning inkori deb qanday amalga aytiladi?
3. Mulohaza inkori, konyksiyasiga ta`rif bering.
4. Tavtologiya deb nimaga aytiladi?

Adabiyotlar:

1. Mendelson E. Introduction to mathematical logic. Sixth edition. New York.Taylor&Francis Group,2015
2. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012.
3. H.T. To'rayev, I. Azizov Matematik mantiq va diskret matematika. 1,2 jild. "Tafakkur-Bo'stoni", Toshkent, 2011y.

4- ma'ruza: Formulalarning teng kuchliligi. Chinlilik jadvali.

Reja:

1. Tavtologiya haqidagi teoremalar.
2. Formulalarning teng kuchliligi.
3. Ekvivalensiya va implikasiya mantiqiy amallar.
4. Chinlik jadvali.

Kalit so`zlar: mulohaza, chinlik jadvali, formula, konyksiya, inkor, fikr, mantiqiy funksiya, implikatsiya.

Tavtologiya haqidagi teoremalar.

1-teorema. Agar $F = F(x_1, x_2, ..., x_n)$ formula
$F_1 = F_1(x_1, x_2, ..., x_n)$, $F_2 = F_2(x_1, x_2, ..., x_n)$, ..., $F_s = F_s(x_1, x_2, ..., x_n)$
formulalarning mantiqiy natijasi bo'lsa, $((F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_s) \to F)$ formula tavtologiya bo'ladi va aksincha:

$$F_1, F_2, ..., F_s \vdash F \text{ bo'lsa } \vdash ((F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_s) \to F)$$

Isbot. Aytaylik, F formula $F_1, F_2, ..., F_s$ formulalarning mantiqiy natijasi bo'lsin: $F_1, F_2, ..., F_s \vdash F$. Shunga qaramasdan $((F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_s) \to F)$ formula tavtologiya bo'lmasin deb faraz qilaylik. Unda propozisional o'zgaruvchilar $x_1, x_2 ...., x_n$ larning shunday chinlik taqsimoti $e_1, e_2 ...., e_n$ topiladiki, $(F_1(e_1, e_2, ..., e_n) \wedge ... \wedge F_s(e_1, e_2, ..., e_n) = 1$ bo'lib, $F(e_1, e_2, ..., e_n) = 0$ bo'ladi.

Ravshanki, $(F_1(e_1, e_2, ..., e_n) \wedge F_2(e_1, e_2, ..., e_n) \wedge F_s(e_1, e_2, ..., e_n)) = 1$ bo'lishidan $F_1(e_1, e_2, ..., e_n) = 1$, $F_2(e_1, e_2, ..., e_n) = 1$, $F_s(e_1, e_2, ..., e_n) = 1$ bo'lishi kelib chiqadi. Ayni paytda $F(e_1, e_2, ..., e_n) = 0$ bo'lishi $F_1, F_2, ..., F_s \vdash F$ ga ziddir. Bu ziddiyatni kelib chiqishiga sabab $((F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_s) \to F)$ formula tavtologiya bo'lmasin deb qilingan farazdir. Demak, $F_1, F_2, ..., F_s \vdash F$ bo'lsa $\models ((F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_s) \to F)$ bo'lar ekan.

Aytaylik, $((F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_s) \to F)$ formula tavtologiya bo'lsin: $\vdash ((F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_s) \to F)$

Unda implikasiyaning chinlik jadvaliga binoan, biror $e_1, e_2 ...., e_n$ chinlik taqsimoti uchun
$(F_1(e_1, e_2, ..., e_n) \wedge F_2(e_1, e_2, ..., e_n) \wedge F_s(e_1, e_2, ..., e_n)) = 1$
bo'lishidan, albatta $F(e_1, e_2, ..., e_n) = 1$ bo'lishi kelib chiqadi. Binobarin, $F_1(e_1, e_2, ..., e_n) = 1$, $F_2(e_1, e_2, ..., e_n) = 1$, $F_s(e_1, e_2, ..., e_n) = 1$
bo'ladi. Bundan esa, $F(x_1, x_2 ...., x_n)$ formula $F_1(x_1, x_2, ..., x_n)$, $F_2(x_1, x_2, ..., x_n)$, $F_s(x_1, x_2, ..., x_n)$ formulalarning mantiqiy natijasi ekanini topamiz: $F_1, F_2, ..., F_s \vdash F$. Teorema isbot bo'ldi.

2-teorema. $F(x_1, x_2 ...., x_n)$ formulaning ziddiyat bo'lishi uchun $\urcorner F(x_1, x_2 ...., x_n)$ formulaning tavtologiya bo'lishi zarur va yetarli. Bu teoremaning isboti ravshan.

3-teorema. Agar $F(x_1, x_2 ...., x_n)$, hamda $(F(x_1, x_2, ..., x_n) \to G(x_1, x_2, ..., x_n))$ formulalar tavtologiya bo'lsa, u holda $G(x_1, x_2, ..., x_n)$ formula ham tavtologiya bo'ladi.

Isbot. Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni teoremaning sharti bajarilsa ham $G(x_1, x_2, ..., x_n)$ formula tavtologiya bo'lmasin. U holda $x_1, x_2 ...., x_n$ larning shunday $e_1, e_2 ...., e_n$ chinlik taqsimoti topiladiki, $G(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ bo'ladi.

$F(x_1, x_2 ...., x_n)$ hamda $(F(x_1, x_2, ..., x_n) \to G(x_1, x_2, ..., x_n))$ lar tavtologiya bo'lganligi uchun

$F(e_1,e_2,...,e_n)=1$, $(F(e_1,e_2,...,e_n)\to G(e_1,e_2,...,e_n))=1$ bo'ladi.

Ikkinchi tomondan $G(e_1,e_2,...,e_n))=0$, $F(e_1,e_2,...,e_n)=1$ bo'lishidan $(F(e_1,e_2,...,e_n)\to G(e_1,e_2,...,e_n))=0$ ekanligini topamiz. Bu esa $(F(x_1,...,x_n)\to G(x_1,...,x_n))$ ning tavtologiya ekanligiga zid. Teorema isbot bo'ldi.

Faraz qilaylik, $F=F(x_1, x_2 ...., x_n)$ formula berilgan bo'lsin. Bu formuladagi $x_1, x_2 ...., x_n$ larning o'rniga mos ravishda

$$F_1(y_1,y_2,...,y_m), F_2(y_1,y_2,...,y_m), F_s(y_1,y_2,...,y_m)$$

larni qo'yish natijasida hosil bo'lgan formulani F_* deylik: $F_*(y_1,y_2,...,y_m)$

4-teorema. Agar $F=F(x_1, x_2 ...., x_n)$ formula tavtologiya bo'lsa, u holda $F_*=F_*(y_1, y_2 ...., y_m)$ ham tavtologiya bo'ladi.

Isbot. Formuladagi $y_1, y_2 ...., y_m$ propozisional o'zgaruvchilarning ixtiyoriy chinlik taqsimoti $e_1', e_2',..., e_m'$ bo'lsin. Unda

$$F_1(e_1', e_2',..., e_m')=e_1,$$

$$F_2(e_1', e_2',..., e_m')=e_1,$$

$$F_n(e_1', e_2',..., e_m')=e_n,$$

bo'ladi. Agar bu qiymatlarni $F=F(x_1, x_2 ...., x_n)$ dagi $x_1, x_2 ...., x_n$ o'zgaruvchilarning o'rniga qo'yilsa, unda F ning chinlik qiymati bilan F_* ning chinlik qiymati ustma-ust tushishini aniqlaymiz. Unda, $F(x_1, x_2 ...., x_n)$ formula tavtologiya bo'lgani uchun $F(e_1,e_2,...,e_n)=1$ bo'ladi.

Demak, $F_*(e_1',e_2',...,e_m')=1$ bo'lib $F_*(y_1',y_2',...,y_m')$ tavtologiya bo'ladi.

Bu esa teoremani isbotlaydi.

Endi fikrlar algebrasida muhim bo'lgan formulalarning ekvivalentligi tushunchasini keltiramiz.

Ikki F va G formulalar berilgan bo'lsin.

4-ta'rif. Agar $(F\leftrightarrow G)$ formula tavtologiya bo'lsa, ya'ni $\vdash(F\to G)$ bo'lsa, u holda F va G mantiqiy ekvivalent formulalar deyiladi va $F\sim G$ kabi belgilanadi. [1](25-bet)

Ma'lumki, ekvivalentlik tushunchasi to'plamlarni sinflarga ajratish imkonini berar edi. Bu yerda ham formulalarning ekvivalentligi tushunchasi hamma formulalarni sinflarga ajratadi. Bir sinfga mansub bo'lgan formulalar bir-biriga ekvivalent bo'ladi.

4Misol. Ushbu $F(x_1,x_2)=(x_1\to x_2)$, $G(x_1,x_2)=(\rceil x_1\vee x_2)$ formulalarni qaraymiz. Ular uchun chinlik jadvalini tuzamiz:

x_1	x_2	$x_1\to x_2$	$(x_1\to x_2)\to(\rceil x_1\vee x_2)$	$\rceil x_1\vee x_2$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Bu jadvaldan ko'rinadiki, $((x_1\to x_2)\to(\rceil x_1\vee x_2))$ formula tavtologiya, ya'ni $\vdash$ $((x_1\to x_2)\to(\rceil x_1\vee x_2))$ ekan.

Bu esa ta'rifga binoan F va G formulalarning ekvivalent bo'lishini bildiradi: $(x_1\to x_2)$ $\sim(\rceil x_1\vee x_2)$

F va G formulalar berilgan bo'lsin.

5-teorema. Quyidagi uchta shart o'zaro teng kuchli:

$$1)\ F \sim G$$

$$2)\ \vdash ((F \to G) \wedge (G \to F))$$

$$3)\ F \vdash G, \quad G \vdash F$$

Isbot. Aytaylik, F va G formulalar mantiqiy ekvivalent bo'lsin: $F \sim G$. Ta'rifga binoan $\vdash (F \leftrightarrow G)$ bo'ladi. Bunda, agar F va G formulalarda ishtiok etuvchi o'zgaruvchilarning shunday chinlik taqsimoti topilib qolsaki, ular uchun $\mu((F \to G) \wedge (G \to F)) = 0$ bo'ladigan bo'lsa,

$$\mu((F \to G) = 0 \text{ yoki } \mu((G \to F) = 0$$

bo'lib, $(\mu(F) \to \mu(G)) = 0$, yoki $(\mu(G) \to \mu(F)) = 0$ undan esa $\mu(F) = 1$, $\mu(G) = 0$ yoki $\mu(G) = 1$, $\mu(F) = 0$ bo'lib qolishini aniqlaymiz. Bu esa $F \sim G$ bo'lishiga ziddir. Demak, $\vdash ((F \to G) \wedge (G \to F))$.

Shunday qilib, $F \sim G$ bo'lganda $\vdash ((F \to G) \wedge (G \to F))$ bo'lishi ko'rsatildi.

Aytaylik, $\vdash ((F \to G) \wedge (G \to F))$ bo'lsin. U holda kon'yunksiyaning chinlik jadvaliga ko'ra ixtiyoriy chinlik taqsimotida

$$\mu(F \to G) = 1,\ \mu(G \to F) = 1$$

bo'ladi. Demak,

$$\vdash F \to G, \text{ va } \vdash G \to F \text{ bo'lar ekan}$$

Unda 1-teoremaga muvofiq $F \vdash G, \quad G \vdash F$ bo'ladi.

Shunday qilib $\vdash ((F \to G) \wedge (G \to F))$ bo'lishidan $F \vdash G$, $G \vdash F$ bo'lishi kelib chiqadi.

Endi $F \vdash G$, va $G \vdash F$ bo'lsin. Unda 1-teoremaga ko'ra $(F \to G)$ hamda $(G \to F)$ formulalar tavtologiya bo'lmasin deb qaraydigan bo'lsak, u holda shunday chinlik taqsimot topilib, $\mu(F) \neq \mu(G)$ bo'lib qoladi.

Bunda $\mu(F) = 1$, $\mu(G) = 0$ bo'ladigan bo'lsa, $F \vdash G$, bo'lishiga zid, $\mu(F) = 0$, $\mu(G) = 1$ bo'lsa, $G \vdash F$ bo'lishiga zid natijalarga kelamiz.

Demak, ixtiyoriy chinlik taqsimotda $\mu(F) = \mu(G)$ ya'ni $\vdash (F \leftrightarrow G)$ bo'ladi. Ta'rifga binoan $F \sim G$ bo'ladi.

Shunday qilib, 5-teoremadagi 1, 2 va 3 tasdiqlar orasida

$$1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 1)$$

munosabat borligi ko'rsatildi. Bu esa teoremani isbotlaydi.

Endi teng kuchli mulohazalar tushunchasini kiritamiz.

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \qquad (1)$$

n ta mulohaza berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. (1) *mulohazalarni inkor, diz'yunksiya, kon'yunksiya, implikasiya va ekvivalensiya mantiqiy amallar vositasi bilan ma'lum tartibda birlashtirib hosil etilgan murakkab mulohazaga formula deb aytamiz.*

Masalan: $[x_1 \vee (x_2 \wedge x_3)] \to x_4$; $[x_1 \wedge (x_2 \to x_3)] \vee (x_4 \leftrightarrow x_5)$; $(x \leftrightarrow y) \wedge (x \vee y)$; $(x \to y) \wedge (y \to z) \to (z \to x)$ murakkab mulohazalar formulalar bo'ladilar. Qavslar mulohazalar ustida mantiqiy amallarning qay tartibda bajarilishini ko'rsatadi.

Endi formula tushunchasiga matematik ta'rif beraylik. Bu tushuncha quyidagicha aniqlanadi.

2-ta'rif. *1) har qanday $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mulohazalarning istalgan biri formuladir;*

2) agar A va B larning har biri formula bo'lsa, u holda $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$, $(A \leftrightarrow B)$ va $\overline{A}$ lar ham formulalardir.

3) 1 va 2-bandlarda ko'rsatilgan ifodalardan tashqari boshqa hyech qanday ifoda formula bo'la olmaydi.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ o'zgaruvchilarni elementar formulalar deb ataymiz.

Keyinchalik formulani lozim bo'lgandagina $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiya shaklida belgilashdan foydalanamiz.
Har qanday formula uchun chinlik jadvali tuzish mumkin. Buning uchun asosiy chinlik jadvallaridan ketma-ket foydalanish kerak.
Masalan, $(x \wedge y) \to (\overline{\overline{x} \vee y})$ formulaning chinlik jadvali quyidagicha bo'ladi:

x	y	$\overline{x}$	$x \wedge y$	$\overline{x} \vee y$	$\overline{\overline{x} \vee y}$	$(x \wedge y) \to (\overline{\overline{x} \vee y})$
ch	ch	yo	ch	ch	yo	yo
ch	yo	yo	yo	yo	ch	ch
yo	ch	ch	yo	ch	yo	ch
yo	yo	ch	yo	ch	yo	ch

Shunday qilib, har qanday formulaga {ch, yo} to'plamining bir elementi mos qilib qo'yiladi.

3-ta'rif. *A va B formulalar berilgan bo'lsin.* (1) *elementar mulohazalarning har bir qiymatlari satri uchun A va B formulalarning mos qiymatlari bir xil bo'lsa, A va B formulalarga tengkuchli formulalar deb aytiladi va bu* $A = B$ *tarzda belgilanadi.* (1) *qatorning kamida bitta qiyatlari satri uchun A va B formulalarning mos qiymatlari bir xil bo'lmasa, u holda A va B formulalarga tengkuchlimas formulalar deb aytiladi va* $A \neq B$ *ko'rinishda belgilanadi.*

A va B formulalarning tengkuchli bo'lish-bo'lmasligi ular uchun tuzilgan chinlik jadvallari yordamida aniqlanadi.

Misollar. 1. $\overline{x} \vee y = A$ va $B = x \to y$ formulalar berilgan bo'lsin.

x	y	$\overline{x}$	$\overline{x} \vee y$	$x \to y$
ch	ch	yo	ch	ch
ch	yo	yo	yo	yo
yo	ch	ch	ch	ch
yo	yo	ch	ch	ch

Endi oddiy algebrada ma'lum bo'lgan ayniyatlarga o'xshashlarini keltiramiz. Ma'lumki, qo'shish va ko'paytirish amali quyidagi qonuniyatlarga bo'ysunadi:

1) $x + y = y + x$ (qo'shishning kommutativlik qonuni);
2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (qo'shishning assosiativlik qonuni);
3) $xy = yx$ (ko'paytirishning kommutativlik qonuni);
4) $(xy)z = x(yz)$ (ko'paytirishning assosiativlik qonuni);
5) $x(y + z) = xy + xz$ (ko'paytirishning yig'indiga nisbatan distributivlik qonuni).

Shu ayniyatlarga o'xshash mantiq algebrasida quyidagi tengkuchliliklar o'rinlidir:

$$x \wedge y = y \wedge x \qquad (3)$$

$$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) \qquad (4)$$

$$x \vee y = y \vee x \qquad (5)$$

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) \qquad (6)$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \qquad (7)$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \qquad (8)$$

Bu tengkuchliliklarni tekshirish uchun chinlik jadvalidan foydalansa bo'ladi. Bu yerda biz (8)ni tekshiradigan jadvalni keltirishimiz bilan kifoyalanamiz:

x	y	z	$y \wedge z$	$x \vee y$	$x \vee z$	$x \vee (y \wedge z)$	$(x \vee y) \wedge (x \vee z)$	$x \vee (y \wedge z) \equiv$ $\equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

yo	Yo	yo	yo	yo	yo	yo	yo	ch
yo	Yo	ch	yo	yo	ch	yo	yo	ch
yo	Ch	yo	yo	ch	yo	yo	yo	ch
yo	Ch	ch	ch	ch	ch	ch	ch	ch
ch	Yo	yo	yo	ch	ch	ch	ch	ch
ch	Yo	ch	yo	ch	ch	ch	ch	ch
ch	Ch	yo	yo	ch	ch	ch	ch	ch
ch	Ch	ch	ch	ch	ch	ch	ch	ch

Diz'yunksiya ($\vee$) amali kommutativlik va assosiativlik xossasiga egadir. (7)-(8) tengkuchliliklar esa $\wedge$ va $\vee$ amallarning bir-biriga nisbatan distributiv xossasiga ega ekanligini ko'rsatadi. Shuni ham ta'kidlash kerakki, (8) tengkuchlilikka o'xshash oddiy algebrada ayniyat yo'q (chunki $x+yz=(x+y)$ $(x+z)$ ayniyat emas). Yuqoridagi o'xshashlik asosida $x\vee y$ ni mantiqiy yig'indi, $x\wedge y$ ni esa mantiqiy ko'paytma deb olishimiz mumkin. Bu o'xshashlikni kuchaytirish uchun, algebraik ko'paytmada nuqta $(\cdot)$ yozilmaganidek (masalan, $x\cdot y=xy$), mantiqiy ko'paytirish belgisi ($\wedge$) ni yozmaymiz, ya'ni $x\wedge y$ ning o'rniga xy ni yozamiz. Bundan keyin mantiqiy ifodalarni soddalashtirish, ularda qavslarni kamaytirish maqsadida quyidagicha shartlashamiz:

1) biror mantiqiy ifoda inkor ishorasi ostida bo'lsa, uni qavssiz yozamiz, ya'ni $\overline{(x\vee y)}\wedge z$ ning o'rniga $\overline{x\vee y}\wedge z$ ni, yoki $\overline{x\vee y}\,z$ ni yozamiz.

2) kon'yunksiya belgisi diz'yunksiya, implikasiya va ekvivalentlik belgilariga nisbatan mustahkamroq bog'laydi deb hisoblaymiz, ya'ni $(xy)\vee z$ o'rniga $xy\vee z$, $x\to(yz)$ o'rniga $x\to yz$, $(xy)\leftrightarrow(zu)$ o'rniga $xy\leftrightarrow zu$ yozamiz.

3) diz'yunksiya belgisi implikasiya va ekvivalentlik belgilariga nisbatan mustahkamroq bog'laydi deb hisoblaymiz, ya'ni $(x\vee y)\to z$ o'rniga $x\vee y\to z$ va $(x\vee y)\leftrightarrow z$ o'rniga $x\vee y\leftrightarrow z$ yozamiz.

4) implikasiya belgisi ekvivalentlik belgisiga nisbatan mustahkamroq bog'laydi deb hisoblaymiz, ya'ni $(x\to y)\leftrightarrow z$ o'rniga $x\to y\leftrightarrow z$ bu kelishuvlar mantiqiy ifodalarni yozishni soddalashtiradi, masalan,

$$(((x\leftrightarrow y)\to(x\wedge z))\leftrightarrow(((\overline{\overline{x\wedge \overline{y}}})\vee(\overline{x}\wedge y))\vee(x\to z)))\text{ o'rniga}$$

$$(x\leftrightarrow y)\to\overline{xz}\leftrightarrow x\,\overline{y}\vee\overline{x}y\vee(x\to z)\text{ ni yozamiz.}$$

Yuqoridagi (1)-tengkuchlilik yordamida $\leftrightarrow$ belgisini $\to$ va $\wedge$ belgilari orqali ifodalashimiz mumkin. Endi $x\to y$ implikasiyani ko'raylik. Faqatgina x chin va y yolg'on bo'lgandagina $\overline{x}\vee y$ mulohaza yolg'on, bundan esa faqatgina x chin (ya'ni $\overline{x}$ yolg'on) va y yolg'on bo'lgandagina $\overline{x}\vee y$ mulohaza yolg'on bo'lishi kelib chiqadi. Shunday qilib, yana bir tengkuchlilikka ega bo'lamiz:

$$x\to y\equiv\overline{x}\vee y. \qquad (9)$$

Demak, $\to$, $\leftrightarrow$, $\vee$, $\wedge$, $-$ belgilarni o'z ichiga olgan ixtiyoriy murakkab mulohazani unga tengkuchli bo'lgan shunday mulohaza bilan almashtirish mumkinki, natijada faqat $\vee$, $\wedge$, $-$ belgilar qatnashgan mulohazalarga ega bo'lamiz. Bunday almashtirish mantiq algebrasining elektrotexnikadagi tadbiqi uchun katta ahamiyatga ega, chunki u yerda ishlatiladigan ifodalarda faqat uchta $\vee$, $\wedge$, $-$ belgilar qatnashadi. Endi, $\vee$ belgini $\wedge$ va $-$ belgilar orqali ifodalaymiz. Buni ikki karra inkorni o'chirish qonuni deb ataluvchi $\overline{\overline{x}}=x$ tengkuchlilikdan va

$$\overline{x\vee y}\equiv\overline{x}\wedge\overline{y}, \qquad (10)$$

$$\overline{x\wedge y}\equiv\overline{x}\vee\overline{y}. \qquad (11)$$

de Morgan qonunlari deb ataluvchi hamda chinlik jadvali yordamida osongina tekshiriladigan tengkuchliliklar yordamida bajarish mumkin[3].

Haqiqatan ham,

$$x \vee y \equiv \overline{\overline{x \vee y}} \equiv \overline{\bar{\bar{x}} \wedge \bar{\bar{y}}} \qquad (12)$$

va shunga o'xshash

$$x \wedge y \equiv \overline{\bar{\bar{x}} \vee \bar{\bar{y}}} \qquad (13)$$

ekanligi kelib chiqadi.
Shunday qilib, mantiq algebrasining ixtiyoriy ifodasini unga tengkuchli bo'lgan shunday ifoda bilan almashtirish mumkinki, oxirgi ifodada faqat $\wedge$ va – yoki $\vee$ va – belgilar qatnashadi. Shunga o'xshash barcha mantiq amallarni $\rightarrow$ va – amallar bilan almashtirish mumkin.
Shuni ham aytish kerakki, barcha amallarni faqatgina Sheffer shtrixi bilan almashtirish ham mumkin:

$$\bar{x} \equiv x|x\,, \quad x \wedge y \equiv (x|y)|(x|y)\,, \qquad \overline{x \wedge y} \equiv x|y\,, \quad x \vee y \equiv \bar{x}|\bar{y}\,, \quad x \rightarrow y \equiv x|\bar{y}$$

Bu tengkuchliliklarni, Sheffer amali ta'rifidan foydalanib, chinlik jadvali yordamida osongina ko'rsatish mumkin.
Endi misol sifatida $(x \rightarrow y)\,(y \rightarrow x) \rightarrow (\bar{x} \leftrightarrow \bar{y})$ ifodani shunday almashtiramizki, natijada faqat $\wedge$, $\vee$ va – belgilar qatnashsin. Buning uchun avvalo (9), (2) va (3) tengkuchliliklardan foydalanamiz:

$$(x \rightarrow y)\,(y \rightarrow x) \rightarrow (\bar{x} \leftrightarrow \bar{y}) \equiv (x \rightarrow y) \cdot (y \rightarrow x) \rightarrow (\bar{x} \rightarrow \bar{y}) \cdot (\bar{y} \rightarrow \bar{x}) \equiv$$
$$\equiv (\bar{x} \vee y)\,(\bar{y} \vee x) \rightarrow (\bar{\bar{x}} \vee \bar{y})\,(\bar{\bar{y}} \vee \bar{x}) \equiv \overline{(\bar{x} \vee y)\,(y \vee \bar{x})} \vee (\bar{x} \vee y) \cdot (\bar{y} \vee x)\,.$$

Kommutativlik va distributivlik qonunlaridan foydalanib, bu ifodani quyidagi ko'rinishda yozishimiz mumkin:

$$(x \rightarrow y) \cdot (y \rightarrow x) \rightarrow (\bar{x} \leftrightarrow \bar{y}) \equiv (\bar{x} \cdot y \vee \bar{y} \cdot x \vee \bar{x} \cdot \bar{y} \vee x \cdot y \vee x\bar{y} \vee \bar{x}y\,.$$

Endi shunday savol tug'iladi: agar hamma mantiqiy amallar ikkita (–, $\wedge$) yoki hatto bitta $\bar{\bar{x}} = x$ ga keltirishning hojati bormi? Sabab shundaki, faqat ikkita yoki bitta belgi orqali almashtirganda mantiqiy ifodalar juda cho'zilib ketadi va uni ko'zdan kechirish qiyinlashadi.

Ikkinchi tomondan, mantiqiy xulosalarning qonuniyatlarini bayon etayotganda, yuqorida kiritilgan $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ amallar katta ahamiyatga ega. Bu xususan $\rightarrow$ amaliga tegishlidir. Yana bir nechta muhim tengkuchliliklarni keltiramiz:

$$x \cdot \bar{x} \equiv \text{yo (qarama-qarshilik qonuni)} \qquad (14)$$
$$x \vee \bar{x} \equiv \text{yo (uchinchisi istisno qonuni)} \qquad (15)$$
$$x \cdot x \equiv x, \quad x \vee x \equiv x \ \text{(idempotentlik qonuni)} \qquad (16)$$
$$x \cdot (x \vee y) \equiv x, \quad x \vee x \cdot y \equiv x \ \text{(yutish qonunlari)} \qquad (17)$$
$$x \vee \text{yo} \equiv x, \quad x \vee \text{ch} \equiv \text{ch}, \quad x \cdot \text{ch} \equiv x, \quad x \cdot \text{yo} \equiv \text{yo} \qquad (18)$$

Keltirilgan tengkuchliliklar ixtiyoriy mantiqiy ifodalarni kerakli ko'rinishga keltirishga imkon beradi.

1-teorema. *A va B formulalar tengkuchli bo'lishi uchun $\bar{A}$ va $\bar{B}$ formulalar tengkuchli bo'lishi zarur va yetarli.*

Isbot. $A = B$ bo'lsin. U vaqtda hamma holatlarda formulalar bir xil qiymatga ega bo'ladilar. U holda $\bar{A}$ va $\bar{B}$ formulalar ham chinlik jadvalining har bir satridagi qiymatlari bir xil bo'ladi. Demak, $\bar{A} = \bar{B}$.

Xuddi shunga o'xshash, $\bar{A} = \bar{B}$ dan $A = B$ kelib chiqadi.

2-teorema. *A va B formulalar tengkuchli bo'lishi uchun $A \leftrightarrow B$ formula aynan chin (tavtologiya) bo'lishi zarur va yetarli.*

Isbot. 1. $A = B$ bo'lsin. Bu holda, ekvivalentlik ta'rifiga asosan, $A \leftrightarrow B$ ning hamma satrlaridagi qiymatlari "**ch**" dan iborat, demak, $A \leftrightarrow B$ tavtologiyani ifodalaydi.
2. $A \leftrightarrow B$ tavtologiya bo'lsin. U holda $A \leftrightarrow B$ har bir satrda "**ch**" qiymatga ega bo'ladi. Bundan esa A va B ning har bir satrdagi qiymatlari bir xil, ya'ni $A = B$ kelib chiqadi.

Misollar. 1. $\overline{x \vee y} \leftrightarrow \bar{x} \wedge \bar{y}$ - aynan chin.

2. $\overline{x \wedge y} \leftrightarrow \bar{x} \vee \bar{y}$ - aynan chin.

3-teorema. *$A \leftrightarrow B$ aynan chin bo'lishi uchun $\bar{A} \leftrightarrow \bar{B}$ aynan chin bo'lishi zarur va yetarli.*

Isbot. a) $A \leftrightarrow B$ formula aynan chin bo'lsin. U vaqtda 2-teoremaga asosan $\bar{A} = \bar{B}$. Demak, 2-teoremaga asosan $\bar{A} \leftrightarrow \bar{B}$ formulaning aynan chinligi kelib chiqadi.

b) $\bar{A} \leftrightarrow \bar{B}$ aynan chin bo'lsin. Bundan $\bar{A} = \bar{B}$ kelib chiqadi va o'z navbatida $A = B$. Demak, $A \leftrightarrow B$ formula aynan chin bo'ladi.

4-teorema. *P formulaning istalgan A qismi o'rniga shu A bilan tengkuchli B formulani qo'yishdan hosil bo'lgan yangi Q formula P bilan tengkuchlidir.*

Misol. $P = \overline{x \vee y} \rightarrow z$ $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$ bo'lgani uchun

$$P = Q = \bar{x} \wedge \bar{y} \rightarrow z = \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} \vee z = x \vee y \vee z .$$

Nazorat savollari:

1. Chin yoki yolg'on mulohazaga misol keltiring.
2. Propozitsional o'zgaruvchlaring chinlik taqsimoti nima?
3. Formulaga ta`rif bering.
4. Teng kuchlilik qoidalarini isbot qiling.

Adabiyotlar:

1. Mendelson E. Introduction to mathematical logic. Sixth edition. New York.Taylor&Francis Group,2015
2. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012.
3. H.T. To'rayev, I. Azizov Matematik mantiq va diskret matematika. 1,2 jild. "Tafakkur-Bo'stoni", Toshkent, 2011y.
4. Lavrov I.A., Maksimova L.L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M.: Fiz.-mat. literatura, 1995.

5-ma'ruza: Mulohazalar algebrasi formulasining normal shakllari.

Reja:

1. Mulohazalar algebrasi formulasining normal shakllari.
2. Yechilish muammosi.
3. Dizyunktiv va konyunktiv normal formalar .
4. Mulohazalar algebrasi formulasining normal shakllari.

Kalit so`zlar: FAF, muammo, elementar konyuksiya, elementar dizyunksiya, normal shakl, formula.

Tengkuchli almashtirishlar bajarib, mulohazalar algebrasining formulalarini har xil ko'rinishlarda yozish mumkin. Masalan, $\bar{A} \rightarrow$BCformulani $A \vee BC$ yoki $(A \vee B)(A \vee C)$ ko'rinishlarda yoza olamiz. Mantiq algebrasining kontakt va rele-kontaktli sxemalar, diskret texnikadagi tatbiqlarida va matematik mantiqning boshqa masalalarida formulalarning normal shakllari katta ahamiyatga ega[1](105 bet).

Quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$x^{\sigma}=\begin{cases} x, & agar \quad \sigma=c, \\ \bar{x}, & agar \quad \sigma=y \end{cases}$$

$\sigma^{\sigma}=c$ ekanligi aniq.

1-ta'rif.

$$x_1^{\sigma_1}\cdot x_2^{\sigma_2}\cdots x_n^{\sigma_n} \qquad (1)$$

ko'rinishdagi formulaga elementar kon'yunksiya deb aytamiz. Bu yerda $\sigma=\{\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n\}$ *ixtiyoriy qiymatlar satri va* x_i *o'zgaruvchilar orasida bir xillari bo'lishi mumkin.*

2-ta'rif.

$$x_1^{\sigma_1}\vee x_2^{\sigma_2}\vee\cdots\vee x_n^{\sigma_n} \qquad (2)$$

ko'rinishdagi formulaga elementar diz'yunksiya deb aytamiz. Bu yerda ham $\sigma_1=\{\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n\}$ *ixtiyoriy qiymatlar satri va* x_i *o'zgaruvchilar orasida bir xillari bo'lishi mumkin.*

3-ta'rif. *Elementar diz'yunksiyalarning kon'yunksiyasiga formulaning kon'yunktiv normal shakli (KNSh) va elementar kon'yunksiyalarning diz'yunksiyasiga formulaning diz'yunktiv normal shakli (DNSh) deb aytiladi.*

KNShga $(x\vee y)\wedge(\bar{x}\vee z)\wedge(x\vee\bar{y}\vee z)$ formula va DNShga $xy\vee\bar{x}z\vee x\bar{y}z$ formula misol bo'la oladi.

1-teorema. *Elementar mulohazalarning har bir* P *formulasiga tengkuchli kon'yunktiv normal shakldagi* Q *formula mavjud.*

Bu teoremani isbotlashda ushbu tengkuchliliklardan foydalanamiz:

$$1.\ \overline{A\wedge B}=\bar{A}\vee\bar{B};\ 2.\ \overline{A\vee B}=\bar{A}\wedge\bar{B};$$

$$3.\ A\to B=\bar{A}\vee B;\quad 4.\ \overline{A\to B}=A\wedge\bar{B}; \qquad (3)$$

$$5.\ A\leftrightarrow B=(\bar{A}\vee B)\wedge(A\vee\bar{B});\ 6.\ \overline{A\leftrightarrow B}=(A\wedge\bar{B})\vee(\bar{A}\wedge B).$$

Isbot. P formula normal kon'yunktiv shaklda bo'lmasa, quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) P dagi elementar mulohazalar $\wedge$ va $\vee$ amallari bilangina birlashtirilgan bo'lsa ham, lekin $\wedge$ so'nggi amalni ifodalamaydi. Bu holda $A\vee(B\wedge C)=(A\vee B)\wedge(A\vee B)$ distributivlik qonunidan foydalanib, so'nggi amali $\wedge$ dan iborat tengkuchli Q formulaga keltiramiz.

b) P formula $-$, $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\leftrightarrow$ mantiqiy amallar vositasida tuzilgan qandaydir formulani ifodalasin. U holda P ga (3) tengkuchliliklarni tatbiq etib P bilan tengkuchli va $-$, $\vee$, $\wedge$ bilan ifodalangan P^1 formulani hosil qilamiz. Agar P^1 KNSh ko'rinishida bo'lmasa, unga $A\vee(B\wedge C)=(A\vee B)\wedge(A\vee B)$ distributivlik qonunini tatbiq etib, chekli qadamlardan keyin P bilan tengkuchli Q kon'yunktiv normal shakldagi formulaga kelamiz.

Izoh. P *formulani kon'yunktiv normal shaklga keltirish jarayonida*

$$A\wedge A=A,\quad A\vee A=A,\quad A\wedge J=A,\quad A\wedge J=J,$$

$$A\wedge\bar{J}=\bar{J},\quad A\vee\bar{J}=A,\quad A\vee\bar{A}=J \qquad (4)$$

tengkuchliliklardan foydalanib, uni soddalashtirish mumkin.

Misollar. 1. $P=[(x\vee y)\wedge(\bar{x}\vee\bar{y})]\vee[x\wedge(\bar{x}\vee y)]$

$$P=\{[(x\vee y)\wedge(\bar{x}\vee\bar{y})]\vee x\}\wedge\{[(x\vee y)\wedge(\bar{x}\vee\bar{y})]\vee(\bar{x}\vee y)\}=$$

$$=[(x\vee y)\vee x]\wedge[(\bar{x}\vee\bar{y})\vee x]\wedge[(x\vee y)\vee(\bar{x}\vee y)]\wedge[(\bar{x}\vee\bar{y})\vee(\bar{x}\vee y)]=$$

$$=(x\vee y)\wedge[J\vee\bar{y}]\wedge(J\vee y)\wedge(\bar{x}\vee J)=(x\vee y)\wedge J\wedge J\wedge J=x\vee y;$$

$$P=x\vee y.$$

Shunday qilib, P formulaning KNSh bittagina diz'yunktiv $(x\vee y)$ haddan iborat ekan.

2. $P=\overline{x\vee y}\leftrightarrow x\wedge y$

$$P=\bar{x}\wedge\bar{y}\leftrightarrow x\wedge y=\overline{x\vee y}\leftrightarrow(x\wedge y)=[\overline{\overline{x\vee y}}\vee(x\wedge y)]\wedge[\overline{(x\vee y)}\vee\overline{(x\wedge y)}]=$$

$$= [(x \vee y) \vee (x \wedge y)] \wedge [(\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \vee \bar{y})] =$$
$$= [(x \vee y) \vee (x \wedge y)] \wedge [(\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \vee \bar{y})] =$$
$$= [(x \vee y \vee x) \wedge (x \vee y \vee y)] \wedge [(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{x}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \wedge \bar{y})] =$$
$$= (x \vee y) \wedge (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) = (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}):$$

$P = (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$.

P formulasi tavtologiya ekanligini chinlik jadvaliga murojaat qilmay turib aniqlash mumkinmi degan savolga quyidagi **chinlik alomati** deb atalgan teorema ijobiy javob beradi.

2-teorema. *P formula doimo chin bo'lishi uchun uning KNSh dagi har bir elementar diz'yunktiv hadida kamida bitta elementar mulohaza bilan birga bu mulohazaning inkori ham mavjud bo'lishi zarur va yetarli.*

Isbot: a) P formulaning

$$P = A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \qquad (5)$$

KNSh dagi har bir A_i hadida kamida bitta elementar mulohaza bilan birga bu mulohazaning inkori ham mavjud bo'lsin, ya'ni $A_i = x \vee \bar{x} \vee y \vee ...... \vee u$ shaklida bo'lsin, u holda $x \vee \bar{x} = J$ va $J \vee A = J$ larga asosan $A_i = J \vee (y \vee .... \vee u \vee V) = J$ bo'ladi.

Demak, $P = J \wedge J \wedge \ldots \wedge J = J$ bo'ladi, ya'ni aynan chin formula bo'ladi.

b) Endi P- tavtologiya bo'lsin va A_i uning KNSh dagi shunday elementar diz'yunktiv hadi bo'lsinki, unda birorta elementar mulohaza bilan birga uning inkori qatnashmagan bo'lsin. Masalan, $A_i = x \vee \bar{y} \vee ..... \vee u$ shaklida bo'lsin. Endi, elementar mulohazalarning shunday qiymatlar satrini olaylikki, bu satrda x ning qiymati yo, y ning qiymati ch, z ning qiymati yo,......, u ning qiymati yo bo'lsin. U vaqtda

$$A_i = x \vee \bar{y} \vee ..... \vee u = \text{yo} \vee \text{ch} \vee ..... \vee \text{yo} = \text{yo} \vee .... \vee \text{yo} = \text{yo}.$$

Demak, $P = A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ ning qiymati ham yolg'on bo'ladi. Ammo, teoremaning shartiga asosan P ning qiymati aynan chindir. Natijada qarama-qarshilikka keldik. Demak, elementar diz'yunksiyalarning har bir hadida birorta mulohaza o'zi va o'zining inkori bilan qatnashishi shart.

Har qanday mantiqiy sistemalaridagidek mulohazalar algebrasi uchun masalani qo'yish mumkin: mulohazalar algebrasining har qanday formulasi AR formula yoki AR formula emasligini chekli qadamdan so'ng aniqlab beradigan yagona usul (algoritm) mavjudmi yoki mavjud emasmi? Bu masala yechilish muammosi deb ataladi. Yechilish muammosini faqat AR formulalar uchun emas, balki AR formulalar sinfidan kengroq bo'lgan bajariluvchi formulalar sinfi uchun qo'ysa bo'ladi. Albatta, keyingi muammoning yechimi oldingi muammoning ham yechimi bo'lishi ravshandir.

Mulohazalar algebrasi uchun bu muammo ijobiy tarzda hal etiladi. Haqiqatan, F – mulohazalar algebrasining ixtiyoriy formulasi bo'lsa, uning rostlik jadvalini tuzish bilan F formulaning bajariluvchi formula yoki AYo formula ekanligini bir qiymatli aniqlash mumkin. Demak, yuqoridagi muammoni ijobiy hal etuvchi yagona usul (algortm) mavjud bo'lib, bu algortm rostlik jadvalidan iboratdir.[2] **(30-bet)**

Ammo bu algortmning muhim kamchligi bor ekanligini sezish mumkin. Haqiqatan, F formula tarkibida n ta propozitsional o'zgaruvchi qatnashgan bo'lsa, u holda uning qiymatlarini propozitsional o'zgaruvchilar qiymatlarining 2^n ta tanlanmada hisoblashga to'g'ri keladi. Ravshanki, bu usul hatto uncha murakkab bo'lmagan formulalar qiymatlarini hisoblashda ham juda katta qiyinchiliklar tug'diradi. Shuning uchun ham bu usul amaliy foydalanish nuqtai nazaridan qulaysizdir. Biz quyida amaliy jihatdan katta qulaylik beradigan boshqa usul tanishamiz.

Eslatma. Biz bu paragrafda $A \wedge B$ formulani qiqacha AB ko'rinishida yozamiz.

Quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$A^{\alpha}=\begin{cases} agar \quad \alpha=1 \quad bo'lsa, \quad A \\ agar \quad \alpha=0 \quad bo'lsa, \quad \neg A \end{cases}$$

1-ta'rif. $A_1,...,A_n$ propozitsional o'zgaruvchilar $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ 1 va 0 lardan tuzilgan tanlanma bo'lsa, u holda $A_1^{\alpha_1}, A_2^{\alpha_2},...,A_n^{\alpha_n}$ formula elementar konyunksiya deyiladi (bunda propozitsional o'zgaruvchilar takrorlangan bo'lishi ham mumkin).

1-misol. A, $A\neg BC$, $A\neg AB$, $AAB\neg BC$ formulalar elementar konyunksiyalardir.

2-ta'rif. Elementar konyunksiyalarning har qanday dizyunksiyasi dizyunktiv normal forma (DNF) deyiladi.

2-misol. $A\vee A\neg BC\vee A\neg AB\vee AAB\neg BC$ formula 6.1-misolda keltirilgan elementar konyunksiyalardan tuzilgan DNF dir.

3-ta'rif. Agar elementar konyunksiyasiga har bir propozitsional o'zgaruvchi (inkor belgisi qatnashganini ham e'tiborga olsak) bir martadan ortiq kirmagan bo'lsa, bunday elementar konyunksiya to'g'ri elementar konyunksiya deyiladi.

3-misol. $A\neg BC$, $\neg AB\neg C$, $A_1A_2\neg A_3\neg A_4$ formulalar to'g'ri elementar konyunksiyalardir. 6.2-misolda keltirilgan formulaning dastlabki ikkita hadi to'g'ri elementar konyunksiyadir.

4-ta'rif. $A_1,A_2,...,A_n$ propozitsional o'zgaruvchilardan tuzilgan to'g'ri elementar konyunksiyadagi har bir propozitsional o'zgaruvchi bu konyunksiyaga faqat bir marta kirgan bo'lsa, bunday elementar konyunksiyaga faqat bir marta kirgan bo'lsa, bunday elementar konyunksiya $A_1,A_2,...,A_n$ o'zgaruvchilarga nisbatan to'liq elementar konyunksiya deyiladi.

4-misol. Elementar konyunksiyalar A,B,C o'zgaruvchilardan tuzilgan bo'lsin. U holda ABC, $\neg AB\neg C$, $AB\neg C$, $A\neg BC$ formulalar to'liq elementar konyunksiyalardir.

5-ta'rif. Tarkibida bir xil elementar konyunksiyalar bo'lmagan hamda barcha elementar konyunksiyalar $A_1,...,A_n$ o'zgaruvchilarga nisbatan to'g'ri va to'liq bo'lgan DNF $A_1,...,A_n$ o'zgaruvchilarga nisbatan mukammal dizyunktiv normal forma (MDNF) deyiladi.

5-misol. $ABC\vee A\neg BC\vee\neg A\neg B\neg C$ formula A,B,C o'zgaruvchilarga nisbatan MDNF dir. DNF va MDNF larning ta'rifidan ko'rinadiki, bunday formulalar keltirilgan formulalardir.

1-teorema. Mulohazalar algebrasining AYo formula bo'lmagan ixtiyoriy U formulasi yagona MDNF ga teng kuchlidir. [1] **(31-bet)**

Isbot. $F(A_1,...,A_n)=$ mulohazalar algebrasining ixtiyoriy AYo formula bo'lmagan formulasi bo'lsin. Demak, F bajariluvchi formula bo'lib, u propozitsional o'zgaruvchilar qiymatlarining hech bo'lmaganida bitta tanlanmaida 1 qiymat qabul qiladi. F formulani rostga aylantiruvchi tanlanmalar to'plami $M_{(p)}$ bo'lsin:

$$M_{(p)}=\{(\alpha_1^{(1)},\alpha_2^{(1)},...,\alpha_n^{(1)}),(\alpha_1^{(2)},\alpha_2^{(2)},...,\alpha_n^{(2)}),...,(\alpha_1^{(r)},\alpha_2^{(r)},...,\alpha_n^{(r)})\},$$

bunda $1\le r\le 2^n$. Quyidagi DNF ni qaraylik:

$$G(A_1,A_2,...,A_n)\rightleftharpoons A_1^{\alpha_1^{(1)}}A_2^{\alpha_2^{(1)}}...A_n^{\alpha_n^{(1)}}\vee...\vee A_1^{\alpha_1^{(r)}}A_2^{\alpha_2^{(r)}}...A_n^{\alpha_n^{(r)}} \qquad (2)$$

Mazkur DNF MDNF ekanligi ravshandir, chunki $M_{(p)}$ ning elementlari har xil tanlanmalaridir. $U(A_1,A_2,...,A_n)\equiv B(A_1,A_2,...,A_n)$ ekanligini ko'rsatamiz. $(\alpha_1^{(s)},\alpha_2^{(s)},...,\alpha_n^{(s)})\in M_{(p)}$ bo'lsin. U holda $F(\alpha_1^{(s)},\alpha_2^{(s)},...,\alpha_n^{(s)})=1$ bo'ladi. ($M_{(p)}$ to'plamning tanlanishiga asosan). $G(A_1,A_2,...,A_n)$ formulaning $(\alpha_1^{(s)},\alpha_2^{(s)},...,\alpha_n^{(s)})$ tanlanmadagi qiymatini hisoblaylik. (2) dagi MDNF tarkibida $A_1^{\alpha_1^{(s)}}A_2^{\alpha_2^{(s)}}...A_n^{\alpha_n^{(s)}}$ to'liq elementar konyunksiya qatnashgan bo'lib, $G(A_1, A_2,..., A_n)$ ning $(\alpha_1^{(s)}, \alpha_2^{(s)},...,\alpha_n^{(s)})$ tanlanmadagi $G(\alpha_1^{(s)}, \alpha_2^{(s)},...,\alpha_n^{(s)})$ qiymatini hisoblashda $(\alpha_1^{(s)})^{\alpha_1^{(s)}}, (\alpha_2^{(s)})^{\alpha_2^{(s)}},...,(\alpha_n^{(s)})^{\alpha_n^{(s)}}$ had hosil qiladi. (1) ga asosan $1^1 = 1$ hamda $0^0 = \neg 0 = 1$ dir, chunki $A^1 = A$, $A^0 = \neg A$. Demak, $\alpha_i^{(s)}$ qanday bo'lishidan qat'iy nazar $(\alpha_i^{(s)})^{\alpha_i^{(s)}} = 1$ $(i = 1, 2,...n)$ hamda

$$(\alpha_1^{(s)})^{\alpha_1^{(s)}}, (\alpha_2^{(s)})^{\alpha_2^{(s)}},...,(\alpha_n^{(s)})^{\alpha_n^{(s)}} = 1 \quad (1 \le s \le r)$$

$A \vee 1 \equiv 1$ ga asosan $G(\alpha_1^{(s)}, \alpha_2^{(s)},...,\alpha_n^{(s)}) = 1$ bo'ladi. Shunday qilib, $M_{(p)}$ ga tegishli tanlanmalarda berilgan F formula ham, G formula ham 1 qiymat qabul qilar ekan.

$\beta = (\beta_1, \beta_2,..., \beta_n) \notin M_{(p)}$ bo'lgan ixtiyoriy tanlanma bo'lsin. U holda bu tanlanma $M_{(p)}$ ga kiruvchi ixtiyoriy $(\alpha_1^{(s)}, \alpha_2^{(s)},...,\alpha_n^{(s)})$ tanlanmadan hech bo'lmaganda bitta elementi bilan farq qiladi. (bu tanlanmalar tartiblangan tanlanmalar ekanligini eslatib o'tamiz) B ning β tanlanmadagi qiymatini hisoblashda hosil bo'ladigan ifodada qatnashgan ixtiyoriy

$$(\beta_1)^{\alpha_1^{(s)}}, (\beta_2)^{\alpha_2^{(s)}},...,(\beta_n)^{\alpha_n^{(s)}}, \quad (1 \le s \le r)$$

hadda hech bo'lmaganda bitta i uchun $\beta_i \ne \alpha_i^{(s)}$ dir. (1) ga asosan $1^0 = \neg 1 = 0$ va $0^1 = 0$ bo'lgani uchun (3) ifodaning qiymati 0 ga tengdir. Bundan $G(\beta_1, \beta_2,..., \beta_n) = 0$ ekanligi kelib chiqadi. $\overline{\beta} \in M_{(p)}$ bo'lgani uchun $F(\beta_1, \beta_2,..., \beta_n) = 0$ demak $M_{(p)}$ ga kirmagan tanlanmalarda F va G formulalar 0 qiymatga ega ekan. Shunday qilib, $F \equiv G$ ya'ni F formula (2) MDNF ga teng kuchli ekanligi kelib chiqadi. F formula yagona usulda MDNF ga yoyilishi ravshandir, chunki, G formula F formulaning qiymatini 1 ga aylantiruvchi barcha tanlanmalar yordamida yagona usulda hosil qilinadi.

Natija. Teng kuchli formulalar bir xil MDNF ga ega.

3-teoremaga asosan mulohazalar algebrasining ixtiyoriy F formulasining o'zi keltirilgan formuladir yoki uni teng kuchli almashtirishlar yordamida keltirilgan formula shakliga olib kelish mumkin.

Biz quyida har qanday keltirilgan formulani MDNF ga yoyish algortmini keltiramiz.

F ixtiyoriy formula bo'lsin.

1-qadam. Agar U keltirilmagan formula bo'lsa, u holda unga 4.3-teoremani qo'llanib, undagi implikatsiya amallari yo'qotiladi; natijada hosil bo'lgan formulada faqat inkor, konyunksiya va dizyunksiya amallari qatnashgan bo'ladi.

2-qadam. Agar hosil bo'lgan formulada inkor murakkab formula oldida qatnashgan bo'lsa, u holda uni I, XII va XIII tengkuchliliklar yordamida shunday shakl almashtiriladiki, hosil bo'lgan formulada inkor faqat propozitsional o'zgaruvchilarga tegishli bo'ladi.

3-qadam. 2-qadamdan so'ng hosil bo'lgan formulani VI-VII tengkuchliliklar yordamida shunday shakl almashtirish kerakki, yangi hosil bo'lgan formulada konyunksiya dizyunksiyadan oldin bajarilsin, ya'ni natijadan DNF hosil bo'lsin.

4-qadam. Agar hosil bo'lgan DNF da bir necha bir xil elementar konyunksiyalar qatnashgan bo'lsa, ulardan bittasini qoldirib, qolganlarini tashlab yuboriladi (VIII tengkuchlilikka asosan).

5-qadam. 4-qadamdan keyin hosil bo'lgan DNF da qatnashgan biror elementar konyunksiyada propozitsional o'zgaruvchi va uning inkori qatnashgan bo'lsa, bunday elementar konyunksiya AYo formula bo'lib, XV va XVII tengkuchliliklarga asosan uni tashlab yuboriladi).

6-qadam. Elementar konyunksiyada biror propozitsional o'zgaruvchining o'zi yoki uning inkori bir necha marta qatnashgan bo'lsa, u holda undan faqat bittasini qoldirib, qolganlari tashlab yuboriladi. (IX tengkuchlikka asosan). Bu qadamdan keyin hosil bo'lgan DNF da barcha elementar konyunksiyalar to'g'ri elementar konyunksiyalardan iborat bo'ladi.

7-qadam. Agar hosil bo'lgan DNF da to'liqmas elementar konyunksiya qatnashgan bo'lsa, uni to'liq elementar konyunksiya qatnashgan bo'lsa, uni to'liq elementar konyunksiyaga aylantirish uchun quyidagi shakl almashtirish bajariladi:

$$A_1^{\alpha_1}, A_2^{\alpha_2}, \ldots, A_{i-1}^{\alpha_{i-1}} A_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \ldots A_n^{\alpha_n}$$

to'liqmas elementar konyunksiya bo'lsin. (bu elementar konyunksiyada A_i propozitsional o'zgaruvchi qatnashgan emas). U holda bu to'g'ri elementar konyunksiyani unga teng kuchli

$$A_1^{\alpha_1}, A_2^{\alpha_2}, \ldots, A_{i-1}^{\alpha_{i-1}} (A_i \vee \neg A_i) A_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \ldots A_n^{\alpha_n}$$

formula bilan almashtirish mumkin. Agar yetishmaydigan propozitsional o'zgaruvchi bir nechta bo'lsa, u holda elementar konyunksiyani bir nechta $A \vee \neg A$ ko'rinishdagi konyuktiv had bilan to'ldirish kerak.

7-qadamdan so'ng hosil bo'lgan DNF da yana bir xil elementar konyunksiyalar paydo bo'lishi mumkin. U holda unga yana 4-qadam qo'llaniladi. Mazkur algoritmni qo'llanilganda albatta kerakli joyda II-V tengkuchliliklardan foydalaniladi.

6-misol. $(A \vee \neg B) \wedge C \Rightarrow (\neg A \vee B) \wedge C$ formulaning MDNF ini yozing. [1] **(31-bet)**

Berilgan formula keltirilmagan bo'lgani uchun undagi implikatsiyani dizyunksiya va inkor bilan almashtiramiz:

$$(A \vee \neg B) \wedge C \Rightarrow (\neg A \vee B) \wedge C$$

Hosil bo'lgan formulada $\neg$ amalsi murakkab formula $(A \vee \neg B) \wedge C$ oldida qatnashgan. Shuning uchun unga de Morgan tengkuchliliklari va qo'sh inkor tengkuchligini qo'llaymiz:

$$\neg((A \vee \neg B) \wedge C) \vee (\neg A \vee B) \wedge C \equiv \neg(A \vee \neg B) \vee \neg C \vee (\neg A \vee B) \wedge C \equiv$$
$$\equiv \neg A \wedge \neg\neg B \vee \neg C \vee (\neg A \vee B) \wedge C \equiv$$
$$\equiv \neg A \wedge B \vee \neg C \vee (\neg A \vee B) \wedge C.$$

Bu keltirilgan formulada dizyunksiya konyunksiyadan oldin bajariladigan had mavjud; shuning uchun distributivlik tengkuchliligini qo'llasak, quyidagi DNF hosil bo'ladi:

$$\neg A \wedge B \vee \neg C \vee (\neg A \vee B) \wedge C \equiv \neg A \wedge B \vee \neg C \vee \neg A \wedge C \vee B \wedge C$$

Ushbu DNF da qatnashgan barcha elementar konyunksiyalar to'g'ri elementar konyunksiyalar bo'lsa-da, ammo to'liq elementar konyunksiyalar emas. Shuning uchun quyidagi shakl almashtirish bajariladi:

$\neg A \wedge B$ ni $\neg A \wedge B \wedge (C \vee \neg C)$ bilan, $\neg C$ ni $(A \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg B) \vee \neg C$ bilan, $\neg A \wedge C$ ni $\neg A \wedge (B \vee \neg B) \wedge C$ bilan, $B \wedge C$ ni esa $(A \vee \neg A) \wedge B \wedge C$ bilan almashtiramiz. Ravshanki, natijada teng kuchli formula hosil bo'ladi:

$$\neg A \wedge B \vee \neg C \vee \neg A \wedge C \vee B \wedge C \equiv \neg A \wedge B \wedge (C \vee \neg C) \vee (A \vee \neg A) \wedge$$
$$(B \vee \neg B) \wedge \neg C \vee \neg A \wedge (B \vee \neg B) \wedge C \vee (A \vee \neg A) \wedge B \wedge C$$

Ushbu formulaga yana distributivlikni qo'llasak:

$$\neg A \wedge B \wedge (C \vee \neg C) \vee (A \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg B) \wedge \neg C \vee$$
$$\forall \neg A \wedge (B \vee \neg B) \wedge C \vee (A \vee \neg A) \wedge B \wedge C \equiv$$
$$\equiv A \wedge B \wedge C \vee A \wedge B \wedge \neg C \vee A \wedge \neg B \wedge \neg C \vee \neg A \wedge B \wedge C \vee$$
$$\vee \neg A \wedge B \wedge \neg C \vee \neg A \wedge \neg B \wedge C \vee \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$$

tengkuchlilikka ega bo'lamiz. Bundagi bir xil elementar konyunksiyalarni tashlab yuborsak (faqat bittasini qoldirib) u holda quyidagi oxirgi natijaga kelamiz:

$$A \wedge B \wedge C \vee A \wedge B \wedge \neg C \vee A \wedge \neg B \wedge \neg C \vee \neg A \wedge B \wedge C \vee$$
$$\vee \neg A \wedge B \wedge \neg C \vee \neg A \wedge \neg B \wedge C \vee \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \qquad (4)$$

Tengkuchlilikning o'ng tomoni berilgan formulaning MDNF idir. Ushbu MDNF ni formulaning rostlik jadvali bilan taqqoslaylik:

A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$A\vee\neg B$	$(A\vee\neg B)\wedge C$	$(\neg A\vee B)\wedge C$	$(A\vee\neg B)\wedge C\Rightarrow (\neg A\vee B)\wedge C$
1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	1

Bu jadvaldan ko'rinadiki: berilgan formula propozitsional o'zgaruvchilar qiymatlarining (1,1,1), (1,1,0), (1,0,0), (0,1,1), (0,1,0), (0,0,1) va (0,0,0) tanlanmalarida 1 (rost) qiymati qabul qiladi.

1-teoremaga asosan berilgan formula quyidagi MDNF fa teng kuchlidir:

$$A^1B^1C^1 \vee A^1B^1C^0 \vee A^1B^0C^0 \vee A^0B^1C^1 \vee A^0B^1C^0 \vee$$
$$\vee A^0B^0C^1 \vee A^0B^0C^0$$

(1) ga asosan esa bu ifoda quyidagi ifodadan iboratdir:

$$ABC \vee AB\neg C \vee A\neg B\neg C \vee \neg ABC \vee \neg AB\neg C \vee \neg A\neg BC \vee \neg A\neg B\neg C$$

yoki

$$A\wedge B\wedge C \vee A\wedge B\wedge\neg C \vee A\wedge\neg B\wedge\neg C \vee \neg A\wedge B\wedge C \vee$$
$$\vee\neg A\wedge B\wedge\neg C \vee \neg A\wedge\neg B\wedge C \vee \neg A\wedge\neg B\wedge\neg C$$

ya'ni natijada (4) ning o'ng tomoni hosil bo'ladi. Berilgan formula 7 ta tanlanmada 1 qiymatga, bitta tanlanmada esa 0 qiymatga egadir, demak, u AR formula emas. (4) dan ko'rinadiki, berilgan formulaning MDNF iga 7 ta bog'liq elementar konyunksiya kiradi. Demak, tekshirilayotgan $F(A_1, A_2,..., A_n)$ formula AR formula bo'lsa, uning MDNF iga 2^n ta to'liq elementar konyunksiya kiradi. Shunday qilib, mulohazalar algebrasining $F(A_1, A_2,..., A_n)$ formulasini AR formulami yoki yo'qmi ekanligini aniqlash uchun uni MDNF ga yoyib uni MDNF dagi to'liq elementar konyunksiyalar sonini sanash kerak: to'liq elementar konyunksiyalar soni $s = 2^n$ ta bo'lsa, berilgan formula AR formula, $0 < s < 2^n$ bo'lganda- bajariluvchi formula bo'ladi. Agar $s = 0$ bo'lsa, u holda berilgan formula AYo formula bo'lishi ravshandir.

Yuqoridagi 1-5- ta'riflarda „konyunksiya'' so'zi „dizyunksiya'' bilan "dizyunksiya" so'zini "konyunksiya" so'zi bilan almashtirsak, u holda „elementar dizyunksiya'' "to'liq elementar dizyunksiya" "mukammal konyuktiv normal forma" (MKNF) tushunchalari hosil bo'ladi.

MKNF lar uchun quyidagi teorema o'rinli.

2-teorema. *Mulohazalar algebrasining AP formula bo'lmagan ixtiyoriy formulasi yagona MKNF ga teng kuchlidir.*

Nazorat savollari:

1. Mulohaza. Mulohazalar ustida qanday mantiqiy amallar bajariladi?
2. Formulalar. Tengkuchli formulalarni keltiring.
3. Aynan chin, aynan yolg'on va bajariluvchi formulalarning ta'riflarini keltiring.
4. Asosiy tengkuchliliklarni isbotlang.
5. Tengkuchli formulalarga doir teoremalarni isbotlang.

Adabiyotlar:

1. Mendelson E. Introduction to mathematical logic. Sixth edition. New York.Taylor&Francis Group,2015
2. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012.
3. H.T. To'rayev, I. Azizov Matematik mantiq va diskret matematika. 1,2 jild. "Tafakkur-Bo'stoni", Toshkent, 2011y.
4. Lavrov I.A., Maksimova L.L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M.: Fiz.-mat. literatura, 1995.
5.

6-ma'ruza: Mulohazalar hisobi. Keltirib chiqarish.

Reja:

1. **Mulohazalar hisobi**.
2. **Isbotlanuvchi formula ta'rifi.**
3. **Keltirib chiqarish qoidalari**.

Kalit so`zlar: elementar konyuksiya, elementar dizyunksiya, normal shakl, formula.

Mulohazalar hisobi aksiomatik mantiqiy sistema bo'lib, mulohazalar algebrasi esa uning interpretasiyasidir (talqinidir).

Berilgan aksiomalar sistemasi negizida (bazasida) qurilgan aksiomatik nazariya deb shu aksiomalar sistemasiga tayanib isbotlanuvchi hamma teoremalar majmuasiga aytiladi. Aksiomatik nazariya formal va formalmas nazariyalarga bo'linadi.

Formalmas aksiomatik nazariya nazariy-to'plamiy mazmun bilan to'ldirilgan bo'lib, keltirib chiqarish tushunchasi aniq berilmagan va bu nazariya asosan fikr mazmuniga suyanadi.

Qaralayotgan aksiomatik nazariya uchun quyidagi shartlar bajarilgan bo'lsa, ya'ni:
1) nazariyaning tili berilgan;
2) formula tushunchasi aniqlangan;
3) aksiomalar deb ataladigan formulalar to'plami berilgan;
4) bu nazariyada keltirib chiqarish qoidasi aniqlangan bo'lsa, formal aksiomatik nazariya aniqlangan deb hisoblanadi.

Quyida mulohazalar hisobining simvollari, formulasi, aksiomalar sistemasi, keltirib chiqarish qoidalari, formulalar majmuasidan formulani keltirib chiqarish qoidasi, deduksiya va umumlashgan deduksiya teoremalari, ayrim mantiq qonunlarining isboti, mulohazalar algebrasi va mulohazalar hisobi o'rtasidagi munosabatlar, mulohazalar hisobida yechilish, zidsizlik, to'liqlilik va erkinlik muammolari kabi masalalar bayon etiladi.

Har qanday hisobning tafsili bu hisobning simvollari tafsilidan, formulalar va keltirib chiqarish formulalari ta'rifidan iborat.

Mulohazalar hisobida uch kategoriyali simvollardan iborat alfavit qabul qilinadi:

Birinchi kategoriya simvollari: $x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots$. Bu simvollarni o'zgaruvchilar deb ataymiz.

Ikkinchi kategoriya simvollari: $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $-$. Bular mantiqiy bog'lovchilardir. Birinchisi – diz'yunksiya yoki mantiqiy qo'shish belgisi, ikkinchisi – kon'yunksiya yoki mantiqiy ko'paytma belgisi, uchinchisi – implikasiya belgisi va to'rtinchisi – inkor belgisi deb ataladi.

Uchinchi kategoriyaga qavs deb ataladigan (,) simvol kiritiladi.

Mulohazalar hisobida boshqa simvollar yo'q.

Mulohazalar hisobining formulasi deb mulohazalar hisobi alfaviti simvollarining ma'lum bir ketma-ketligiga aytiladi.

Formulalarni belgilash uchun lotin alfavitining katta harflaridan foydalanamiz. Bu harflar mulohazalar hisobining simvollari qatoriga kirmaydi. Ular faqatgina formulalarning shartli belgilari bo'lib xizmat qiladi.

Endi formula tushunchasi ta'rifini beraylik. Bu tushuncha quyidagicha aniqlanadi:

1) har qanday $x, y, z,...$ o'zgaruvchilarning istalgan biri formuladir;

2) agar A va B larning har biri formula bo'lsa, u holda $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$ va $\overline{A}$ lar ham formulalardir.

3) boshqa hyech qanday simvollar satri formula bo'la olmaydi.

O'zgaruvchilarni elementar formulalar deb ataymiz.

Misol. Formula ta'rifining 1-bandiga ko'ra $x, y, z,...$ o'zgaruvchilar formulalar bo'ladi. U vaqtda ta'rifning 2-bandiga muvofiq $(x \wedge y)$, $(x \vee y)$, $(x \to y)$, $\overline{x}$ lar ham formulalardir. Xuddi shu tariqada $(\overline{x \vee y})$, $((x \wedge y) \to z))$, $((x \wedge y) \to (y \to z))$ lar ham formulalar bo'ladi.

Quyidagilar formula bo'laolmasligini tushuntiring:

$$x\overline{y}, \quad \wedge z, \quad (x \vee y, \; x \to y, \; (x \wedge y) \to \overline{x}.$$

Qismiy formula tushunchasini kiritamiz:

1.Elementar formula uchun faqat uning o'zi qismiy formuladir.

2.Agar $\overline{A}$ formula bo'lsa, u vaqtda shu formulaning o'zi, A formula va A formulaning hamma qismiy formulalari uning qismiy formulalari bo'ladi.

3.Agar formula $A * B$ ko'rinishda bo'lsa (bu yerda va bundan keyin $*$ o'rniga $\vee$, $\wedge$, $\to$ cimvollarning istalganini tushunamiz), u vaqtda shu formulaning o'zi, A va B formulalar hamda A va B formulalarning barcha qismiy formulalari $A * B$ formulaning qismiy formulalari bo'ladi.

Masalan, $\left(\left(x \vee \overline{y}\right) \to \left(\overline{\overline{z} \to y}\right)\right)$ formula uchun:

$\left(\left(x \vee \overline{y}\right) \to \left(\overline{\overline{z} \to y}\right)\right)$ - nolinchi chuqurlikdagi qismiy formula,

$\left(x \vee \overline{y}\right)$, $\left(\overline{\overline{z} \to y}\right)$ - birinchi chuqurlikdagi qismiy formulalar,

x, $\overline{y}$, $\left(\overline{z} \to y\right)$ - ikkinchi chuqurlikdagi qismiy formulalar,

y, $\overline{z}$ - uchinchi chuqurlikdagi qismiy formulalar,

z – to'rtinchi chuqurlikdagi qismiy formula deb ataladi.

Formulalarni yozishda ayrim soddalashtirishlarni qabul qilamiz. Xuddi mulohazalar algebrasidagi kabi formulalar yozuvidagi qavslarni tushirib qoldirishga kelishamiz. Bu kelishuvga binoan $((x \vee y) \wedge z)$, $\left(\overline{x \wedge y}\right)$, $((x \wedge y) \to (z \wedge t))$ formulalarni mos ravishda $x \vee y \wedge z$, $\overline{x \wedge y}$, $x \wedge y \to z \wedge t$ ko'rinishda yozamiz.

Endi mulohazalar hisobida isbotlanuvchi formulalar sinfini ajratamiz. Isbotlanuvchi formulalar formulalar ta'rifiga o'xshash xarakterda ta'riflanadi.

Avval dastlabki isbotlanuvchi formulalar (aksiomalar), undan keyin esa keltirib chiqarish qoidasi aniqlanadi. Keltirib chiqarish qoidasi orqali bor isbotlanuvchi formulalardan yangi isbotlanuvchi formulalar hosil qilinadi.

Dastlabki isbotlanuvchi formulalardan keltirib chiqarish qoidasini qo'llash yo'li bilan yangi isbotlanuvchi formulalarni hosil etishga shu formulalarni aksiomalardan keltirib chiqarish deb aytiladi.

Mulohazalar hisobining aksiomalar tizimi XI aksiomadan iborat bo'lib, bular to'rt guruhga bo'linadi.

Birinchi guruh aksiomalari [1] (27 bet):

$\mathrm{I}_1 \; x \to (y \to x)$.

$\mathrm{I}_2 \; (x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$.

Ikkinchi guruh aksiomalari:

$\mathrm{II}_1 \; x \wedge y \to x$.

II_2 $x \wedge y \to y$.

II_3 $(z \to x) \to ((z \to y) \to (z \to x \wedge y))$.

Uchinchi guruh aksiomalari:

III_1 $x \to x \vee y$.

III_2 $y \to x \vee y$.

III_3 $(x \to z) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z))$.

To'rtinchi guruh aksiomalari:

IV_1 $(x \to y) \to (\overline{y} \to \overline{x})$.

IV_2 $x \to \overline{\overline{x}}$.

IV_3 $\overline{\overline{x}} \to x$.

O'rniga qo'yish qoidasi. Agar A mulohazalar hisobining isbotlanuvchi formulasi, x - o'zgaruvchi, B mulohazalar hisobining ixtiyoriy formulasi bo'lsa, u vaqtda A formula ifodasidagi hamma x lar o'rniga B formulani qo'yish natijasida hosil etilgan formula ham isbotlanuvchi formula bo'ladi.

A formuladagi x o'zgaruvchilar o'rniga B formulani qo'yish operasiyasi (jarayoni)ni o'rniga qo'yish qoidasi deb aytamiz va uni quyidagi simvol bilan belgilaymiz:

$$\int_x^B (A).$$

Zikr etilgan qoidaga quyidagi aniqliklarni kiritamiz [3]:

a) Agar A faqat x o'zgaruvchidan iborat bo'lsa, u vaqtda $\int_x^B (A)$ o'rniga qo'yish B formulani beradi;

b) Agar A formula x dan farqli y o'zgaruvchidan iborat bo'lsa, u vaqtda $\int_x^B (A)$ o'rniga qo'yish A ni beradi;

v) Agar A o'rniga qo'yish aniqlangan formula bo'lsa, u vaqtda $\overline{A}$ formuladagi x o'rniga B formulani qo'yish natijasida o'rniga qo'yishning inkori kelib chiqadi, ya'ni $\int_x^B (\overline{A})$ o'rniga qo'yish $\overline{\int_x^B A}$ ni beradi.

g) Agar A_1 va A_2 formulalarda o'rniga qo'yish aniqlangan bo'lsa, u vaqtda $\int_x^B (A_1 * A_2)$ o'rniga qo'yish $\int_x^B (A_1) * \int_x^B (A_2)$ ni beradi.

Agar A isbotlanuvchi formula bo'lsa, uni $\vdash A$ shaklda yozishga kelishamiz.

U holda o'rniga qo'yish qoidasini quyidagicha sxematik ravishda ifodalash mumkin:

$$\frac{\vdash A}{\vdash \int_x^B (A)}$$

va uni «agar A isbotlanuvchi formula bo'lsa, u vaqtda $\int_x^B (A)$ ham isbotlanuvchi formula bo'ladi» deb o'qiladi.

Xulosa qoidasi. Agar A va A→V lar mulohazalar hisobining isbotlanuvchi formulalari bo'lsa, u holda V ham isbotlanuvchi formula bo'ladi. Bu qoida quyidagicha sxematik ravishda yoziladi:

$$\frac{\vdash A;\ \vdash A \to B}{\vdash B}.$$

Isbotlanuvchi formulaning ta'rifi.

a) Har qanday aksioma isbotlanuvchi formuladir;

b) Isbotlanuvchi formuladagi x o'zgaruvchi o'rniga ixtiyoriy B formulani qo'yish natijasida hosil bo'lgan formula isbotlanuvchi formula bo'ladi.

v) A va $A \to B$ isbotlanuvchi formulalardan xulosa qoidasini qo'llash natijasida olingan V formula isbotlanuvchi formuladir;

g) Mulohazalar hisobining boshqa hyech qanday formulasi isbotlanuvchi deb sanalmaydi.

Ta'rif. *Isbotlanuvchi formulalarni hosil etish prosessi (jarayoni)ga isbot qilish (isbotlash) deb aytiladi.*

1-Misol. $\vdash A \to A$ ekanligi (implikasiyaning refleksivligi) isbotlansin.

Implikasiyaning refleksivligini isbotlash uchun ushbu

$$\vdash (x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) \text{ - } I_2$$

aksiomadan foydalanamiz. Bu yerda $\int_z^x (I_2)$ o'rniga qo'yishni bajarish natijasida

$$\vdash (x \to (y \to x)) \to ((x \to y) \to (x \to x)) \qquad (1)$$

kelib chiqadi. $\vdash (x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$ - I_2 aksioma va (1) formulaga xulosa qoidasini qo'llab

$$\vdash (x \to y) \to (x \to x) \qquad (2)$$

formulani hosil qilamiz.

(2) formulaga nisbatan quyidagi o'rniga qo'yishni

$$\int_y^{\bar{x}} (2)$$

bajarish natijasida

$$\vdash (x \to \bar{\bar{x}}) \to (x \to x) \qquad (3)$$

isbotlanuvchi formulaga ega bo'lamiz.

$x \to \bar{\bar{x}}$ - IV_2 aksioma va (3) formulaga nisbatan xulosa qoidasini qo'llash natijasida

$$\vdash x \to x \qquad (4)$$

isbotlanuvchi formulaga kelamiz. Nihoyat (4) formuladagi x o'zgaruvchi o'rniga A formulani qo'ysak

$$\vdash A \to A$$

isbotlanishi kerak bo'lgan formula hosil bo'ladi.

2-misol. $\vdash \overline{x \vee y} \to \bar{x} \wedge \bar{y}$ ekanligini isbotlang.

$(z \to x) \to ((z \to y) \to (z \to x \wedge y))$ - II_3 aksiomaga nis-batan ketma-ket ikki marta o'rniga qo'yish usulini qo'llaymiz: avval x ni $\bar{x}$ ga va keyin y ni $\bar{y}$ ga almashtiramiz. Natijada quyidagi isbotlanuvchi formulaga ega bo'lamiz

$$\vdash (z \to \bar{x}) \to ((z \to \bar{y}) \to (z \to \bar{x} \wedge \bar{y})). \qquad (5)$$

(5) formulaga nisbatan $\int\limits_{z}^{\overline{x\vee y}}$ (5) o'rniga qo'yishni bajarib, quyidagini hosil qilamiz

$$\vdash((\overline{x\vee y})\to\overline{x})\to((\overline{x\vee y}\to\overline{y})\to(\overline{x\vee y}\to\overline{x}\wedge\overline{y})). \quad (5a)$$

Endi

$$\overline{x\vee y}\to\overline{x} \qquad (6)$$

$$\overline{x\vee y}\to\overline{y} \qquad (7)$$

formulalarning isbotlanuvchi ekanligini ko'rsatamiz.
Buning uchun $(x\to y)\to(\overline{y}\to\overline{x})$ - IV_1 aksiomaga nisbatan

$$\int\limits_{y}^{x\vee y}(IV)_1$$

o'rniga qo'yishni bajaramiz. Natijada

$$\vdash(x\to x\vee y)\to(\overline{x\vee y}\to\overline{x}) \qquad (8)$$

formulaga ega bo'lamiz. (8) formula va $x\to x\vee y$ - III_1 aksiomaga nisbatan xulosa qoidasini ishlatib, (6) ning isbotlanuvchi formula ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Xuddi shunday (7) ning ham isbotlanuvchi formula ekanligini ko'rsatish mumkin.
(6) va (5) formulalarga xulosa qoidasini qo'llasak,

$$\vdash(\overline{x\vee y}\to\overline{y})\to(\overline{x\vee y}\to\overline{x}\wedge\overline{y}) \qquad (9)$$

isbotlanuvchi formula kelib chiqadi.
(7) va (9) formulalarga xulosa qoidasini qo'llab,

$$\vdash\overline{x\vee y}\to\overline{x}\wedge\overline{y}$$

dastlabki formulaning isbotlanuvchi ekanligini hosil qilamiz.

Nazorat uchun savollari:

1. *Mulohazalar hisobi aksiomatik nazariyasining asosiy shartlarini ayting.*
2. *Nazariyaning tili deganda nimani tushunasiz?*
3. *Isbotlanuvchi formula ta'rifi ayting.*
4. *Qanday aksiomatik sistemalarni bilasiz?*
5. *Keltirib chiqarish qoidalarini ayting.*

Adabiyotlar:

1. Mendelson E. Introduction to mathematical logic. Sixth edition. New York.Taylor&Francis Group,2015
2. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012.
3. H.T. To'rayev, I. Azizov Matematik mantiq va diskret matematika. 1,2 jild. "Tafakkur-Bo'stoni", Toshkent, 2011y.

7-ma'ruza: Isbot tushunchasi. Isbotlanuvchi formula ta'rifi. Teorema tushunchasi.

Reja:

1. **Formulalar majmuasidan formulani keltirib chiqarish qoidasi.**
2. **Keltirib chiqarish (isbotlash) tushunchasi.**
3. **Isbotlanuvchi formula ta'rifi.**
4. **Ayrim mantiq qonunlarining isboti**

**Kalit so`zlar:** aksioma, teorema, keltirib chiqarish, o`rniga qo`yish, simvollar,qoida.

Ta'rif. *Agar* $B_1, B_2, ..., B_n$ *chekli formulalar ketma-ketligining har qanday hadi quyidagi:*

1) H *formulalar majmuasining birorta formulasi;*

2) *isbotlanuvchi formula;*

3) $B_1, B_2, ..., B_n$ *ketma-ketlikning istalgan ikkita oldinma-keyin keladigan elementlaridan xulosa qoidasiga asosan hosil qilinadi degan uch shartning birortasini qanoatlantirsa, u holda bu ketma-ketlik* H *chekli formulalar majmuasidan keltirib chiqarilgan deb aytiladi.*

Oldingi ma`ruzadagi misolda $H=\{A,B\}$ dan quyidagi formulalar chekli ketma-ketligi keltirilib chiqariladi:

$$A,\ B,\ (A\to A)\to((A\to B)\to(A\to A\wedge B)),\ \ B\to(A\to B),$$
$$A,\ B,\ A\to A,\ (A\to B)\to(A\to A\wedge B)),\ A\to B,\ A\to A\wedge B,\ A\wedge B.$$

Agar murakkab xulosa qoidasidan foydalansak, u vaqtda (isbot) keltirib chiqarish formulalari quyidagicha bo'ladi:

$$A,\ \ B,\ (A\to A)\to((A\to B)\to(A\to A\wedge B)),$$
$$B\to(A\to B),\ A\to A,\ A\to B,\ \ A\wedge B.$$

Formulani keltirib chiqarish va formulalar majmuasidan keltirib chiqarish ta'riflariga asosan keltirib chiqarishning quyidagi xossalari hosil bo'ladi:

-H formulalar majmuasidan keltirib chiqarilgan chekli ketma-ketlikning boshlang'ich qismi ham H dan keltirib chiqariladigan bo'ladi;

-agar H dan keltirib chiqarilgan ketma-ketlikning ikkita qo'shni hadlari (elementlari) orasiga H dan keltirib chiqarilgan qandaydir boshqa ketma-ketlik qo'yilsa, u vaqtda hosil etilgan yangi formulalar ketma-ketligi ham H dan keltirib chiqarilishi mumkin.

Haqiqatan ham, masalan, agar $B_1, B_2, ..., B_i, B_{i+1}, ..., B_k$ va $C_1, C_2, ..., C_m$ lar H dan keltirib chiqarilsa, u vaqtda keltirib chiqarish ta'rifiga asosan $B_1, B_2, ..., B_i,\ C_1, C_2, ..., C_m, B_{i+1}, ..., B_k$ ham H dan keltirib chiqariladigan bo'ladi.

-H formulalar majmuasidan keltirib chiqarilgan formulalar ketma-ketligining har qanday hadi H dan keltirib chiqariladigan formuladir.

-agar $H\subset W$ bo'lsa, u vaqtda H dan keltirib chiqarilgan har qanday formula W ning ham formulasi bo'ladi.

-B formula H dan keltirib chiqariladigan formula bo'lishi uchun H dan keltirib chiqarilgan ixtiyoriy formulalar ketma-ketligida bu formulaning mavjud bo'lishi yetarli va zarurdir.

H va W mulohazalar hisobining ikkita formulalar majmuasi bo'lsin. H,W orqali bu majmualarning yig'indisini (birlashmasini) belgilaymiz, ya'ni

$$H,W = H\bigcup W\ .$$

Agar W majmua bitta C formuladan iborat bo'lganda ham $H\bigcup\{C\}$ birlashmani H,C ko'rinishda yozamiz.

Endi keltirib chiqarishning asosiy qoidalarini ko'rib o'tamiz.

I. $\dfrac{H\vdash A}{H,W\vdash A}$.

Bu qoida bevosita formulalar majmuasidan keltirib chiqarish qoidasidan hosil bo'ladi.

II. $\dfrac{H,C\vdash A,\quad H\vdash C}{H\vdash A}$.

Isbot. Qoidaning shartiga asosan H,C formulalar majmuasidan A formula keltirib chiqariladi. Shuning uchun H,C dan oxirgi formulasi A bo'lgan keltirib chiqarish mavjud [3]:

$$B_1,B_2,...,B_{k-1},A. \qquad (1)$$

Xuddi shunday H formulalar majmuasidan C formulani keltirib chiqarilishi mumkinligidan H dan keyingi formulasi C bo'lgan keltirib chiqarish mavjud:

$$C_1,C_2,...,C_m,C. \qquad (2)$$

(1) keltirib chiqarishda C formula ishtirok etmagan holda, u faqat H formulalar majmuasidan keltirib chiqarilgan ketma-ketlikda bo'ladi. Demak, H dan A formula keltirib chiqariladi.

Agar (1) keltirib chiqarishda birorta formula C bo'lsa (masalan formula B_i), u holda B_{i-1} va B_{i+1} formulalar orasiga (2) ni qo'yamiz. Natijada quyidagi faqat H dan keltirib chiqarishni olamiz:

$$B_1,B_2,...,B_{i-1},\ C_1,C_2,...,C_m,\ B_{i+1},...,B_{k-1},\ A.$$

Shunday qilib, N dan A formula keltirib chiqariladi.

III. $\dfrac{H,C\vdash A,W\vdash C}{H,W\vdash A}$.

Isbot. $H,C\vdash A$ bo'lganligi uchun I-qoidaga asosan $H,W,C\vdash A$. Qoidaning shartiga binoan $W\vdash C$, u holda I-qoidaga ko'ra $H,W\vdash C$.

II-qoidadan foydalanib $H,W\vdash A$ ni topamiz.

IV. $\dfrac{H\vdash C\to A}{H,C\vdash A}$.

Isbot. $C\to A$ formula H formulalar majmuasidan keltirib chiqariladiganligi sababli H ning shunday keltirib chiqarishi mavjudki, uning oxirida $C\to A$ formula turadi:

$$B_1,B_2,...,B_{k-1},C\to A. \qquad (3)$$

Endi H formulalar majmuasiga C formulani qo'shib, H,C formulalar majmuasini hosil qilamiz. (3) keltirib chiqarishga C formulani qo'shib, ushbu keltirib chiqarishga ega bo'lamiz:

$$B_1,B_2,...,B_{k-1},C\to A,C. \qquad (4)$$

O'z navbatida bu H,C formulalar majmuasining keltirib chiqarishi bo'ladi.

(4) ning oxiriga A formulani yozish mumkin, chunki u xulosa qoidasiga asosan $C\to A$ va C formulalardan hosil qilinadi.

Demak, oxirgi formulasi A bo'lgan H,C formulalar majmuasining

$$B_1,B_2,...,B_{k-1},C\to A,C,A$$

keltirib chiqarishiga ega bo'lamiz. Bu yerdan $H,C\vdash A$ ekanligi kelib chiqadi.

Deduksiya teoremasi: $\dfrac{H,C\vdash A}{H\vdash C\to A}$.

Avval H,C formulalar majmuasining har qanday $B_1,B_2,...,B_k$ keltirib chiqarishi uchun $H|-C\to B_k$ ning to'g'riligini matematik induksiya metodidan foydalanib isbot qilamiz.

1. $k=1$ hol uchun masala to'g'ri. Haqiqatan ham, agar B_1 formula H,C ning keltirib chiqarishi bo'lsa, u vaqtda uch hol bo'lishi mumkin:

a) $B_1\in H$,

b) B_1 – isbotlanuvchi formula,

v) B_1 - formula C ning o'zidir.

a) va b) hollar uchun H dan quyidagi keltirib chiqarishni yozish mumkin: B_1, $B_1\to(C\to B_1)$, $C\to B_1$. Demak, $H|-C\to B_1$.

v) hol uchun $H|-C\to C$ ekanligini isbotlash kerak.

Ammo $C\to C$ isbotlanuvchi formuladir. Shuning uchun uni har qanday majmuadan keltirib chiqarish mumkin.

2.Endi istalgan i $(i<k)$ chuqurlikdagi har qanday keltirib chiqarish uchun masala to'g'ri bo'lsin deb hisoblaganda, uning k chuqurlikdagi keltirib chiqarish uchun to'g'riligini isbot qilamiz.

$B_1,B_2,...,B_k$ lar H,C majmuaning keltirib chiqarishi bo'lsin, bu yerda $k>1$. Shuning uchun ham B_k formulaga nisbatan to'rt hol yuz berishi mumkin:

a) $B_k\in H$,

b) B_k – isbotlanuvchi formula,

v) B_k formula C ning o'zidir,

g) B_k formula xulosa qoidasiga asosan keltirib chiqarishdagi ikkita undan oldin ketma-ket keladigan formulalardan hosil qilinadi.

a), b), v) holatlar uchun isbot to'liq ravishda $k=1$ holdagi isbotga mos keladi.

Shuning uchun g) holni ko'ramiz. Bu holda B_k formula B_i va B_j formulalardan hosil qilinib $(i<k,\ j>k)$, B_j formula ko'rinishni $B_i\to B_k$ oladi va quyidagi tasdiqlar to'g'ri bo'ladi:

$$H|-C\to B_i, \qquad (5)$$

$$H|-C\to(B_i\to B_k). \qquad (6)$$

I_2 aksiomada

$$\int_{x,y,z}^{C,B_i,B_k}(I_2)$$

o'rniga qo'yishni bajarib, quyidagi isbotlanuvchi formulaga ega bo'lamiz:

$$|-(C\to(B_i\to B_k))\to((C\to B_i)\to(C\to B_k)). \qquad (7)$$

(6), (5) va (7) lar N dan keltirib chiqariladigan formulalardir. Ularga murakkab xulosa qoidasini qo'llab, $H|-C\to B_k$ ni hosil qilamiz.

Endi umumiy, ya'ni $H,C|-A$ bo'lgan holni ko'raylik. U vaqtda H,C ning $B_1,B_2,...,B_{k-1}$, A keltirib chiqarishi mavjud bo'ladi. Demak, yuqorida isbot qilganimizga asosan $H|-C\to A$ tasdiq to'g'ridir.

Endi esa formal aksiomatik nazariyani ifodalashga o‘taylik. [2]**(36-bet)**

Agar quyidagi shartlar bajarilsa, u holda L formal (aksiomatik) nazariya aniqlangan xisoblanadi:

(1) Sanoqli simvollar to'plami- L nazariyaning simvollari berilgan bo'lsa L nazariyaning chekli simvollari ketma-ketligi L ning ifodasi deyiladi.

(2) L nazariyaning formulalari deb ataluvchi L ning ifodalari to'plami berilgan bo'lsa. (odatda, berilgan ifodaning formula bo'lish bo'lmasligini aniqlovchi effektiv jarayon beriladi).

(3) L nazariyaning aksiomalari deb ataluvchi formulalar majmuasi to'plami ajratilgan bo'lsa. (ko'pgina hollarda L nazariyaning berilgan formulasi aksioma bo'lish yoki bo'lmasligini effektiv aniqlash mumkin bo'ladi; bu holda L ni effektiv aksiomalashtirilgan yoki aksiomatik nazariya deyiladi).

(4) Formulalar orasida keltirib chiqarish qoidalari deb ataluvchi chekli $R_1, \ldots, R_n$ munosabatlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Har bir R_i uchun shunday musbat butun j soni topiladiki, j ta formulalardan iborat xar qanday to'plam uchun hamda ixtiyoriy F formula uchun, berilgan j ta formulalar F formula bilan R_i munosabatda bo'ladimi, degan savol effektiv xal etilishi kerak. Agar bu savolga xa deb javob olinsa, u holda F formula berilgan j ta formulalarning R_i qoidasi bo'yicha bevosita natijasi deyiladi.

Agar $F_1, \ldots, F_n$ formulalar ketma-ketligi berilgan bo'lib, har qanday i uchun $(1 \le i \le n)$ F_i formula yoki aksioma bo'lsa, yoki o'zidan oldingi qandaydir formulalarning bevosita natijasi bo'lsa, u holda berilgan formulalar ketma-ketligi L da keltirib chiqarish deyiladi.

Agar L da keltirib chiqarish mavjud bo'lib, bu keltirib chiqarishning oxirgi formulasi F formula bilan ustma-ust tushsa, u holda F formula L nazariyaning teoremasi deyiladi; bunday keltirib chiqarish F formulaning keltirib chiqarishi deyiladi. (Berilgan nazariyaga nisbatan).

Xatto, effektiv aksiomalashtirilgan L nazariyada ham, teorema tushunchasi effektiv bo'lishi shart emas, chunki umuman olganda berilgan formulaning L da keltirib chiqarilishi mavjudligini aniqlovchi effektiv algoritm mavjud bo'lmasligi ham mumkin.

Bunday algoritm mavjud bo'lgan nazariyani echiluvchan nazariya, aks holda esa echilmaydigan nazariya deyiladi.

Biroz oldinga o'tib shuni aytish mumkinki, mulohazalar xisobi uchun qurilgan L formal aksiomatik nazariya echiluvchan nazariya, tor ma'nodagi predikatlar xisobi nazariyasi esa echilmaydigan nazariyadir.

F formula L nazariyada formulalar to'plami Γ ning mantiqiy natijasi (mulohazalar xisobida mantiqiy natija) bo'lishi uchun shunday $F_1, \ldots, F_n$ formulalar ketma-ketligi mavjud bo'lishi kerakki, bunda F_n formula F dan iborat bo'lib, ixtiyoriy i $(1 \le i \le n)$ uchun F_i formula yoki aksioma, yoki Γ to'plamning elementi, yoki birorta keltirib chiqarish qoidasi orqali o'zidan oldingi formulalarning bevosita natijasi bo'lishi zarur va etarlidir. Bunday formulalar ketma-ketligi Γ formulalar to'plamidan F ni keltirib chiqarilishi deyilib, Γ ning elementlari esa, keltirib chiqarish gipotenuzalari deyiladi.

Qulaylik uchun, «F formula Γ formulalar to'plamning natijasi» degan tasdiqni $\Gamma \vdash F$ ko'rinishda yozamiz. [2]**(37-bet)**

Agar Γ chekli to'plam bo'lsa, ya'ni $\Gamma = \{F_1, \ldots, F_n\}$, u holda $\{F_1, \ldots, F_n\} \vdash F$ yozuvni $F_1, \ldots, F_n \vdash F$ ko'rinishda yozamiz. Agar $\Gamma = \varnothing$, bo'lsa, u holda $\Gamma \vdash F$ yozuv F formula L da teorema bo'lganda va faqat shu xoldagina o'rinli bo'ladi. Odatda $\varnothing$

$\vdash F$ yozuv o'rniga, $\vdash F$ ko'rinishda yoziladi. Shunday qilib $\vdash F$ yozuv «F formula L da teoremadir» degan tasdiqning qisqartirilganidir.

Aniqlangan $\vdash_L$-keltirib chiqarilishining ba'zi xossalarini ko'rib o'taylik.

1-xossa. Agar $\Gamma \subseteq \Delta$ va $\Gamma \vdash F$, bo'lsa, u holda $\Delta \vdash F$ bo'ladi.

Haqiqatan ham, $\Gamma \vdash F$ deganda quyidagini tushunamiz: shunday $F_{i1},\dots,F_{ik}$ ketma-ketlik mavjudki, bunda F_n formula F dan iborat bo'lib, ixtiyoriy $i(1 \le i \le n)$ uchun F_i formula, yoki aksioma, yoki Γ ning elementi, yoki o'zidan oldingi formulalardan birorta keltirib chiqarish qoidasi orqali hosil qilinsa bevosita natijasidir.

Agar $F_1,\dots,F_n$ formulalar Γ to'plamga tegishli bo'lsa, $\Gamma \subset \Delta$ bo'lgani uchun $F_1,\dots,F_n$ lar Δ ga ham tegishli bo'ladi.

Bu esa $\Delta \vdash F$ ekanini bildiradi.

2-xossa. $\Gamma \vdash F$ bo'lishi uchun Γ ning qandaydir chekli Δ qism to'plami topilib, $\Delta \vdash F$ bo'lishi zarur va etarlidir.

3-xossa. Agar $\Delta \vdash F$ bo'lib Δ to'plamning ixtiyoriy G elementi uchun $\Gamma \vdash F$ bo'lsa, u holda $\Gamma \vdash F$ bo'ladi. [2]**(37-bet)**

Ikkinchi va uchinchi xossalarning iboti ham xuddi birinchi xossadagidek bevosita $\vdash$ ning ta'rifidan kelib chiqadi.

$\vdash$ ning bu uchta xossasidan kelajakda juda ko'p marta foydalanamiz.

Biz endi mulohazalar hisobining L aksiomatik nazariyasini kiritamiz. [2]**(38-bet)**

(1) L ning simvollari sifatida $\rceil$, $\to$, (,) va butun musbat indeksli X_i propozitsional xarflarni olamiz: $X_1, X_2, X_3, \dots$.

Bu erda $\rceil$ va $\to$ lar primitiv bog'lovchilar deyiladi. Mulohazalar xisobining muhim tushunchasi hisoblangan formula tushunchasini kiritamiz.

(2) (a) Barcha propozitsional harflar formulalardir:

(b) agar F va G lar formulalar bo'lsa, u holda $\rceil F$, $(F \to G)$ lar ham formulalardir.

(3) L nazariyaning F, G, H formulalari qanday bo'lishidan qat'iy nazar quyidagi formulalar L ning aksiomalaridir:

$$(A_1)\ (F \to (G \to F));$$
$$(A_2)\ ((F \to (G \to H)) \to ((F \to G) \to (F \to H)));$$
$$(A_3)\ ((\rceil G \to \rceil F) \to (F \to G));$$

(4) Yagona keltirib chiqarish qoidasi bo'lib, u ham bo'lsa, modus ponens qoidasi xizmat qiladi: F va $F \to G$ formulalarning bevosita natijasi G dir. Bu qoidani qisqacha MP ko'rinishda belgilaymiz. [1]**(71-bet)**

Xuddi mulohazalar algebrasigidek qavslarni soddalashtirishga kelishib olaylik.

L nazariyaning cheksiz aksiomalari to'plami faqat yuqoridagi 3 ta aksiomalar qolini $(A_1), (A_2), (A_3)$ orqali beriladi.

Har bir formulaning aksioma bo'lish yoki bo'lmasligini osongina tekshirish mumkin va shuning uchun L effektiv aksiomalashtirilgan nazariyadir.

Bizning maqsadimiz L sistemani shunday qurishdan iboratki, unda uning barcha teoremalari sinfi mulohazalar mantiqini barcha tavtologiyalari sinfi bilan ustma-ust tushish.

Boshqa bog'lovchilarni quyidagicha aniqlaymiz:

(D_1) $(F \wedge G)$ *formula* $\rceil (F \to \rceil G)$ *ekanini;*

(D_2) $(F \vee G)$ *formula* $(\rceil F \to G)$ *ekanini;*

(D_3) $(F \leftrightarrow G)$ *formula* $(F \to G) \wedge (G \to F)$

ekanini bildiradi.

Bu ta'riflarning ma'nosi, masalan (D_1) da, F va G formulalar qanday bo'lganda ham $(F \wedge G)$ ifoda $\neg(F \to \neg G)$ formulaning qisqartirilgan ifodasi ekanini bildiradi.

1-lemma $\vdash (F \to F)$, bu erda F ixtiyoriy formuladir.

Isbot. L nazariyada $F \to F$ formulani keltirib chiqarishini quramiz.

(1) $(F \to ((F \to F) \to F)) \to ((F \to (F \to F)) \to (F \to F))$ $((A_2)$aksioma sxemasi)

(2) $F \to ((F \to F) \to F)$ $((A_1)$ aksioma sxemasi)

(3) $(F \to (F \to F)) \to (F \to F)$ ((1) va (2) ga MP qo'llandi)

(4) $F \to (F \to F)$ $((A_1)$ aksioma sxemasi)

(5) $F \to F$ ((3) va (4) ga MP qo'llandi)

Shunday qilib, biz (1), (2), (3), (4), (5) formulalardan iborat chekli ketma-ketlikni qurdik. Bunda har bir formula yo aksioma, yoki o'zidan oldingi formulalardan MP qoidasi bo'yicha hosil qilindi va oxirgi formula teorema ekanini isbotlanishi kerak bo'lgan formula bilan ustma-ust tushdi.

Nazorat uchun savollar:

1.Mulohazalar hisobi formulasi nima?
2.Qismiy formulaga ta'rif bering.
3.Isbotlanuvchi formula ta'rifini ayting
4.Mulohazalar hisobining aksiomalar sistemasi (tizimi) ayting.
5.Keltirib chiqarish qoidasining hosilalari sanag.

Adabiyotlar:

1. Mendelson E. Introduction to mathematical logic. Sixth edition. New York.Taylor&Francis Group,2015
2. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012.
3. H.T. To'rayev, I. Azizov Matematik mantiq va diskret matematika. 1,2 jild. "Tafakkur-Bo'stoni", Toshkent, 2011y.

8-ma'ruza: Algoritm tushunchasi va uning xususiyatlari. Tyuring mashinasi. Algoritmlar nazariyasining asosiy gipotezasi

Reja:

1. Algoritm tushunchasi va uning xususiyatlari.
2.Tyuring mashinalari.
3.Tyuring mashinasida algoritmni realizasiya qilish.
4.Algoritmlar nazariyasining asosiy gipotezasi.

**Kalit so`zlar:** algoritm, ommaviy muammo, natijaviylik, gipoteza, simvol, alfavit, so`z uzunligi, golovka, tashqi xotira.

Bu ma'ruzada algoritm tushunchasi va uning xarakterli xususiyatlari, yechiluvchi va sanaluvchi to'plamlar, Post teoremasi, algoritm tushunchasini aniqlash, hisoblanuvchi funksiyalar, qismiy rekursiv va umumrekursiv funksiyalar, Tyuring mashinalari, Tyuring mashinasida algoritmni realizasiya qilish, natural sonlarni qo'shish algoritmi, Yevklid algoritmi, algoritmlar nazariyasining asosiy gipotezasi, Markovning normal algoritmlari kabi masallar ko'rilgan.

Algoritm tushunchasi va uning xarakterli xususiyatlari

Matematikaning asosiy tushunchalaridan biri algoritm (algorifm) tushunchasidir. «Algoritm» so'zi IX-asrda ijod etgan buyuk matematik vatandoshimiz Abu Abdullo Muhammad ibn Muso al-Xorazmiy nomining lotincha Algorithmi tarzida buzib yozilishidan kelib chiqqan [2](192 bet).

Har biri «ha» yoki «yo'q» degan javob talab etuvchi ayrim sanoqli-cheksiz matematik yoki mantiqiy masalalar sinfini ko'raylik.

Chekli son qadamda ushbu sinfdagi har qanday savolga biz javob bera oladigan jarayonlik (prosedura) mavjudmi?

Agar shunday prosedura mavjud bo'lsa, u holda u berilgan savollar sinfi uchun **yechuvchi prosedura** yoki **yechuvchi algoritm (algorifm)** deb aytiladi. Yechuvchi prosedurani izlash muammosiga bu sinf uchun yechilish muammosi deb aytiladi.

Formal sistemalar uchun **yechilish muammosini** kun tartibiga birinchi qo'ygan olimlardan Shryoder (1895), Lyovengeym (1915) va Gilbertlarni (1918) ko'rsatish mumkin.

Masalan, quyidagilar yechuvchi algoritmlarga misol bo'la oladi:

1.Sonlar ustida arifmetik amallarni bajarish qoidalari.
2.Kvadrat ildiz chiqarish qoidasi.
3.Eng katta umumiy bo'luvchini topish qoidasi (Yevklid algoritmi).
4.Kvadrat tenglamaning yechimini topish qoidasi.
5.n-tartibli ko'phadning hosilasini topish qoidasi.
6. Rasional funksiyani integrallash qoidasi.

Yuqorida keltirilgan har bir misolda bir xil tipli (turdagi) masalalar sinfi bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi. Bir xil turdagi masalalar sinfi **ommaviy muammo** deb aytiladi. Bunday sinflarning masalalari bir biridan faqat ifodasidagi parametrlar bilan farq qiladi. Masalan, $ax^2+bx+c=0$ kvadrat tenglamaning yechimini topish masalasida a, b va c parametrlar qatnashadi. Ularning qiymatlarini o'zgartirish yo'li bilan bir sinfga mansub turli xil masalalarga kelamiz.

Aytilganlarni hisobga olib algoritmning quyidagi intuitiv ta'rifini berish mumkin.

1-ta'rif. *Berilgan ommaviy muammodagi barcha masalalarni umumiy bir xil shaklda, aniq ma'lum bo'lgan usul bilan yechish jarayoniga* ***algoritm*** *deb aytamiz.*

Bunday ta'rifni qat'iy deb hisoblash mumkin emas. Haqiqatan ham, unda aniq mazmuni noma'lum so'zlar uchraydi. Xususan, bu «usul» so'ziga ham taalluqli. Shuning uchun ham algoritmning bu qat'iy bo'lmagan ta'rifiga **intuitiv** ta'rif deb aytiladi[2](191 bet).

Endi algoritmning xarakterli xususiyatlarini ko'rib o'taylik.

1.Algoritmning diskretligi. Algoritm–miqdorlarni shunday ketma-ket qurish jarayoniki, boshlang'ich holatda miqdorlarning dastlabki chekli sistemasi berilgan bo'lib, har bir navbatdagi momentda miqdorlar sistemasi ma'lum aniqlangan qonun (dastur) asosida oldingi holatdagi miqdorlar sistemasidan hosil qilinadi.

2.Algoritmning determinasiyalanuvchanligi (aniqlanuvchanligi). Boshlang'ich holatdan farq qiluvchi boshqa holatda aniqlangan miqdorlar sistemasi ilgarigi holatlarda hosil qilingan miqdorlar sistemasi orqali bir qiymatli aniqlanadi.

3.Algoritm qadamlarining elementarligi. Ilgarigi miqdorlar sistemasidan keyingisini hosil qilish qonuni sodda qadamlardan iborat bo'lishi kerak.

4.Algoritmning ommaviyligi. Boshlang'ich miqdorlar sistemasini ayrim potensial cheksiz to'plamdan tanlash mumkin.

5.Algoritmning natijaviyligi. Miqdorlarni topish jarayoni chekli bo'lishi va natija (masalaning yechimini) berishi kerak.

Matematik amallar asosiy rolni o'ynaydigan algoritmlarga sonli algoritmlar deb aytiladi. Bundan tashqari mantiqiy algoritmlar ham mavjud. Misol sifatida, mantiqiy algoritm ishlatiladigan quyidagi o'yinni ko'ramiz:

Misol. 15 ta predmet bor. O'yinda 2 kishi qatnashadi: boshlovchi va uning raqibi. Har bir o'yinchi navbat bilan bir, ikki yoki uchta predmetni oladi. Kim oxirgi predmetni olsa, o'sha yutgan hisoblanadi. Boshlovchi yutish uchun o'yinda qanday strategiyani ishlatishi kerak?

Yechim. Boshlovchining yutuq strategiyasini quyidagi jadval shaklida ifodalash mumkin:

Yurish raqami	Boshlovchining yurishi	Raqibning yurishi
1	3	n
2	4-n	m
3	4-m	p
4	4-p	o

Haqiqatan ham, boshlovchi bunday strategiya natijasida 3+(4-n)+(4-m)+(4-p)=15-(n+m+p) predmet oladi va raqib n+m+p predmet oladi, ya'ni ikkalasi birgalikda 15 ta predmet oladilar. Oxirgi predmetni boshlovchi olganligi tufayli, u o'yinni yutadi.

Yechiluvchi va sanaluvchi to'plamlar

Qandaydir alfavit berilgan bo'lsin. Bu alfavitdagi hamma so'zlar to'plamini S bilan va S to'plamning qism to'plamini M bilan belgilaymiz.

1-ta'rif. *Agar x so'zning M to'plamga qarashlilik muammosini hal qila oladigan algoritm mavjud bo'lsa, u holda M ga yechiluvchi to'plam deb aytiladi.*

2-ta'rif. *Agar M to'plamning hamma elementlarini sanab chiqa oladigan algoritm mavjud bo'lsa, u holda M ga effektiv sanaluvchi to'plam deb aytiladi.*

1-teorema. *Agar M va L lar effektiv sanaluvchi to'plamlar bo'lsa, u holda $M \bigcup L$ va $M \bigcap L$ lar ham effektiv sanaluvchi to'plamlardir.*

Isbot. M va L lar effektiv sanaluvchi to'plamlar bo'lsin. U vaqtda, 2-ta'rifga asosan, ularning har biri uchun alohida algoritm mavjudki, ular orqali mos ravishda M va L dagi hamma elementlarni sanab chiqish mumkin. $M \bigcup L$ va $M \bigcap L$ to'plamlarning effektiv hisoblovchi algoritmi M va L to'plamlarning effektiv hisoblovchi algoritmlarini bir vaqtda qo'llash natijasida hosil qilinadi.

2-teorema (Post teoremasi). *M to'plamning o'zi va to'ldiruvchisi CM effektiv sanaluvchi bo'lsganda, shunda va faqat shundagina M to'plam yechiluvchidir.*

Isbot. a) M to'plam va uning CM to'ldiruvchisi effektiv sanaluvchi bo'lsin. U vaqtda, 2-ta'rifga asosan, bu to'plamlarning elementlarini sanab chiqa oladigan A va B algoritmlar mavjud bo'ladi. U holda M va CM to'plamlarning elementlarini sanab chiqish paytida ularning ro'yxatida x element uchraydi. Demak, shunday C algoritm yuzaga keladiki, u orqali x M to'plamga qarashlimi yoki qarashli emasmi degan muammoni hal qilish mumkin. Shunday qilib, M yechiluvchi to'plam bo'ladi.

b) M yechiluvchi to'plam bo'lsin. U holda, 1-ta'rifga asosan, x bu to'plamning elementimi yoki elementi emasmi degan muammoni hal qiluvchi algoritm mavjud bo'ladi. Bu algoritmdan foydalanib, M va CM to'plamlarga kiruvchi elementlarning ro'yxatini tuzamiz. Shunday qilib, M va CM to'plamlar elementlarini sanab chiquvchi ikkita A va B algoritmlarni hosil qilamiz.

Demak, M va CM to'plamlar effektiv sanaluvchi to'plamlar bo'ladi.

1-misol. $M = \{1, 4, 9, ..., n^2 ...\}$ natural sonlar kvadrat-lari to'plami effektiv sanaluvchi to'plam bo'ladimi yoki yo'qmi?

Yechim. $M = \{n^2\}$ to'plam effektiv sanaluvchi to'plam bo'ladi, chunki uning elementlarini hosil etish uchun ketma-ket natural sonlarni olib, ularni kvadratga ko'tarish kerak. Bu to'plam ham yechiluvchi bo'ladi. Haqiqatan ham, birorta x natural sonning M to'plamga kirish yoki kirmasligini aniqlash uchun uni tub ko'paytuvchilarga ajratish kerak. Bu usul uning natural sonning kvadratimi yoki yo'qmi degan muammoni hal qilib beradi.

2-misol. Tartiblangan natural sonlar juftliklaridan iborat to'plam effektiv sanaluvchi ekanligini isbotlang.

Yechim. Tartiblangan natural sonlar juftliklaridan iborat to'plamning effektiv sanaluvchi ekanligini isbotlash uchun diagonal metodi deb aytiladigan metoddan foydalanamiz.

Buning uchun hamma tartiblangan natural sonlar juftliklarini quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\begin{array}{cccccc}
(0,0), & (0,1), & (0,2), & (0,3), & (0,4), & \ldots \\
(1,0), & (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & \ldots \\
(2,0), & (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & \ldots \\
(3,0), & (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & \ldots \\
\ldots & & & & &
\end{array}$$

Yuqori chap burchakdan boshlab ketma-ket diagonallar bo'yicha o'tib to'plam elementlarini sanab chiqamiz. Bu juftliklarning ro'yxati quyidagicha bo'ladi:

(0,0), (1,0), (0,1), (2,0), (1,1), (0,2), (3,0), (2,1),
(1,2), (0,3), (4,0), (3,1), (2,2), (1,3), (0,4), ...

3-teorema. *Yechiluvchi bo'lmagan effektiv sanaluvchi natural sonlar to'plami mavjud.*

Isbot. Effektiv sanaluvchi ixtiyoriy U natural sonlar to'plami berilgan bo'lsin. U to'plamning yechiluvchi emasligini isbotlash uchun, Post teoremasiga (2-teorema) ko'ra, uning CU to'ldiruvchisi effektiv sanaluvchi emasligini isbotlash yetarli.

$M_0, M_1, M_2, \ldots$ - hamma sanaluvchi natural sonlar to'plamlaridagi effektiv sanab chiqilgan to'plamlar bo'lsin.

Demak, har qanday $n \in N$ uchun M_n to'plamni tiklash mumkin.

Endi U to'plamning hamma elementlarini sanab chiqadigan A algoritmni kiritaylik. Bu algoritm (m,n) raqamli qadamda $m \in M_n$ ni hisoblab chiqadi. Agar bu son n soni bilan ustma-ust tushsa, bu holda A algoritm uni U to'plamiga kiritadi, ya'ni $n \in U \leftrightarrow n \in M_n$.

Bundan ko'rinib turibdiki, har qanday sanaluvchi to'plamdan CU to'plam hyech bo'lmaganda bitta element bilan farq qiladi, chunki CU shunday n elementlardan iboratki, $n \in \overline{M_n}$. Shuning uchun ham CU sanaluvchi to'plam emas. Demak, Post teoremasiga asosan U yechiluvchi to'plam bo'lmaydi.

Izoh. Isbot etilgan teorema aslida Gyodelning formal arifmetikaning to'liqsizligi haqidagi teoremasini oshkormas (oshkora emas) ravishda qamrab olgan.

Algoritm tushunchasiga aniqlik kiritish

Matematika tarixida bir xil turdagi savollar to'plamiga «ha» yoki «yo'q» yoki bir xil turdagi funksiyalar sinfi «hisoblanuvchi» yoki «hisoblanuvchi emas» degan javoblar berishi mumkin bo'lgan algoritmlarni izlash uzoq davom etdi. Ayrim vaqtlarda bu izlanishlar natijasiz tugadi. Bu hollarda, tabiiyki, algoritmning mavjudligiga shubha bilan qaraladi.

1-misol. Misol sifatida Fermaning «buyuk teorema»sining yechish muammosini ko'rsatish mumkin. 1637 yillar atrofida Ferma quyidagi teoremaning isboti menda bor deb e'lon qildi: «$x^n + y^n = z^n$ **tenglama** $n > 2$ **bo'lganda musbat butun son qiymatli** x, y, z, n **yechimga ega emas».** Hozirgi kungacha bu tasdiq na isbot qilingan va na rad etilgan.

2-misol. 1900 yilda Parijda o'tkazilgan ikkinchi xalqaro matematiklar kongressida nemis matematigi David Gilbert yechilishi muhim bo'lgan 23 matematik muammolar ro'yxatini o'qib berdi. Shular orasida quyidagi 10-chi Gilbert muammosi bor edi: «Har qanday koeffisiyentlari butun sonlardan iborat bo'lgan algebraik tenglamaning butun sonli yechimi mavjudmi?», ya'ni har qanday butun sonli koeffisiyentlardan iborat bo'lgan algebraik tenglama butun sonli yechimga egami degan muammoni yechadigan (hal qiladigan) algoritm yaratish kerakligini D.Gilbert ko'rsatdi.

Matematikada butun sonli koeffisiyentlarga ega bo'lgan algebraik tenglamaga **diofant** tenglamasi deb aytiladi.
Masalan,

$$x^2+y^2-2xz=0, \qquad 10x^5+7x^2+5=0$$

ko'rinishdagi tenglamalar diofant tenglamalari bo'ladi, ulardan birinchisi uch o'zgaruvchili va ikkinchisi bir o'zgaruvchili tenglamadir. Umumiy holda tenglama istalgan sondagi o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lishi mumkin. Bunday tenglamalar butun sonli yechimlarga ega bo'lishi ham, ega bo'lmasligi ham mumkin. Masalan, $x^2+y^2-2xz=0$ cheksiz ko'p butun sonli yechimlarga ega va $10x^5+7x^2+5=0$ tenglama butun sonli yechimga ega emas.
Bir o'zgaruvchili **diofant** tenglamasining hamma butun sonli yechimlarini topish **algoritmi** anchadan beri mavjud. Aniqlanganki, agar
$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n=0$
butun sonli koeffisiyentlardan iborat tenglamaning butun ildizi bo'lsa, u holda u a_n koeffisiyentning bo'luvchisi bo'ladi.
Keltirilgan tasdiqqa asoslanib, quyidagi algoritmni tavsiya etish mumkin:

1) a_n sonning hamma bo'luvchilarini topish: $d_1,d_2,...,d_n$.

2) a_n sonning har bir bo'luvchisi uchun $P_n(x)$ ning qiymatini aniqlash: $P_n(d_i)$ $(i=\overline{1,n})$.

3) Agar $1,2,...,n$ larning birorta i uchun $P_n(d_i)=0$ bo'lsa, u holda d_i tenglamaning yechimi bo'ladi. Agar $i=1,2,...,n$ larning hammasida $P_n(d_i)\neq 0$ bo'lsa, u holda tenglama butun sonli yechimga ega emas.

Gilbertning 10-muammosi bilan dunyoning ko'p matematiklari deyarli 70 yil shug'ullandilar. Faqatgina 1968 yilda Sankt-Peterburglik yosh matematik Yu.V.Matiyasevich va sal keyinroq rus matematigi G.V.Chudnovskiy bu muammoni hal qildilar: **qo'yilgan masalaning yechimini bera oladigan algoritm** mavjud emas.
Algoritmning intuitiv ta'rifi qat'iy emasligiga qaramasdan, u muayan masalaning yechimini topadigan algoritmning to'g'riligiga shubha uyg'otmaydi.
Matematikada shunday yechimi topilmagan algoritmik muammolar mavjudki, ular yechimga egami yoki ega emasmi ekanligini aniqlash muammosi paydo bo'ladi. Bu muammoni yechishda algoritmning intuitiv ta'rifi yordam bera olmaydi. Bu hollarda yoki algoritmning mavjudligini, yoki uning mavjud emasligini isbotlash kerak bo'ladi.
Birinchi holda masalani yechadigan jarayonni tasvirlash kifoya. Bu jarayonning haqiqatan ham algoritm ekanligiga ishonch hosil qilish uchun algoritmning intuitiv tushunchasi yetarli bo'ladi.
Ikkinchi holda algoritmning mavjud emasligini isbotlash kerak. Buning uchun algoritmning nima ekanligini aniq bilish talab qilinadi. XX asrning 30-yillarigacha algoritmning aniq ta'rifi mavjud emasdi. Shuning uchun ham algoritm tushunchasiga aniq ta'rif berish keyingi davr matematikasining asosiy masalasi bo'lib qoldi. Bu ta'rifni ishlab chiqish ko'p qiyinchiliklarga duch keldi.
Birinchidan, bunday ta'rif algoritm intuitiv ta'rifining **mohiyatini** aks ettirishi, **ikkinchidan** esa, bunday ta'rif formal aniqlik nuqtai nazaridan mukammal bo'lishi kerak edi.
Bu muammoning tadqiqotchilari tomonidan algoritmning bir nechta ta'rifi ishlab chiqildi. Ammo vaqt o'tishi bilan bu ta'riflarning o'zaro tengkuchliligi aniqlandi. Ana shu ta'rif hozirgi zamon algoritm tushunchasidir.
Algoritm tushunchasini aniqlash bo'yicha yondashuvlarni **uch asosiy yo'nalishga** bo'lish mumkin.
Birinchi yo'nalish – effektiv hisoblanuvchi funksiya tushunchasini aniqlash bilan bog'liq. Bu yo'nalish bo'yicha A.Chyorch, K.Gyodel, S.Klinilar tadqiqot ishlarini olib bordilar.
1935 yilda, 1932-1935 yillar davomida A.Chyorch va S.Klini tomonidan o'rganilgan va «λ - aniqlanuvchi funksiyalar» deb atalgan, to'g'ri aniqlangan hisoblanuvchi nazariy-sonli funksiyalar sinfining **xossalari**: «λ - aniqlanuvchi funksiyalar» sinfi bizning intuitiv

tasavvurimiz bo'yicha **hisoblanuvchi deb** qaraladigan **hamma funksiyalarni** qamrab olishi mumkin degan fikr tug'diradi. Bu kutilmagan natija edi.

J.Erbranning bitta g'oyasi asosida 1934 yilda K.Gyodel tomonidan aniqlangan va «umumrekursiv funksiyalar» deb atalgan boshqa **hisoblanuvchi funksiyalar** sinfi ham «λ - aniqlanuvchi funksiyalar» xossalariga o'xshash xossalarga ega edi.

1936 yilda A.Chyorch va S.Klini tomonlaridan bu ikkita sinf bir xil sinf ekanligi isbotlandi, ya'ni har qanday λ **- aniqlanuvchi** funksiya umumrekursiv funksiya bo'lishi va har qanday umumrekursiv funksiya λ - aniqlanuvchi funksiya ekanligi tasdiqlandi.

1936 yilda Chyorch quyidagi **tezisni** e'lon qildi: **har qanday intuitiv effektiv (samarali) hisoblanuvchi funksiyalar umumrekursiv funksiyalardir**.

Bu teorema emas, balki tezisdir: tezis tarkibida intuitiv aniqlangan effektiv hisoblanuvchi funksiya tushunchasi, aniq matematik terminlarda aniqlangan umumrekursiv funksiya tushunchasi bilan aynan tenglashtirilgan. Shuning uchun ham bu tezisni isbotlash mumkin emas. Ammo Chyorch va boshqa olimlar tomonidan bu tezisni quvvatlovchi ko'p dalillar ko'rsatildi.

Ikkinchi yo'nalish – algoritm tushunchasini bevosita aniqlash bilan bog'liq: 1936-1937 yillarda, A.Tyuring Chyorch ishlaridan bexabar holda yangi funksiyalar sinfini kiritdi. Bu funksiyalarni «Tyuring bo'yicha hisoblanuvchi funksiyalar» deb atadilar. Bu sinf ham yuqorida aytilgan xossalarga ega edi va buni **Tyuring tezisi** deb aytamiz. 1937 yilda **A.Tyuring isbotladiki, uning hisoblanuvchi funksiyalari λ - aniqlanuvchi funksiyalarning o'zi va, demak, umumrekursiv funksiyalarning xuddi o'zi ekan.** Shuning uchun ham Chyorch bilan Tyuring tezislari ekvivalentdir.

1936 yilda (Tyuring ishlaridan bexabar holda) E.Post aynan Tyuring erishgan natijalarga mos keladigan natijalarni e'lon qildi va 1943 yilda, 1920-1922 yillardagi nashr etilmagan ishlariga suyanib, to'rtinchi ekvivalent tezisni nashr etadi. Shunday qilib, algoritm tushunchasini bevosita aniqlashga va so'ngra uning yordamida hisoblanuvchi funksiya tushunchasini aniqlashga birinchi bo'lib bir-biridan bexabar holda E.Post va A.Tyuring erishdilar.

Post va Tyuring algoritmik prosesslar ma'lum bir tuzilishga ega bo'lgan «mashina» bajaradigan prosesslar ekanligini ko'rsatdilar. Ular ushbu «mashina»lar yordamida barcha hisoblanuvchi funksiyalar sinfi bilan barcha qismiy rekursiv funksiyalar sinfi bir xil ekanligini ko'rsatdilar va, demak, Chyorch tezisining yana bitta fundamental tasdig'i yuzaga keldi.

Uchinchi yo'nalish – rossiya matematigi A.Markov tomonidan ishlab chiqilgan normal algoritmlar tushunchasi bilan bog'liq.

Agar qandaydir ommaviy muammoni yechish algoritmi ma'lum bo'lsa, u holda uni realizasiya etish uchun shu algoritmda aniq yoritilgan ko'rsatmalarni ijro etish zarur. Algoritmni realizasiya etish jarayonini avtomatlashtirish g'oyasi, tabiiyki, inson bajaradigan ishni mashinaga uzatishni taqozo qiladi. Bunday mashinani XX asrning 30-yillarida amerika matematigi E.Post va angliya matematigi A.Tyuringlar tavsiya etdilar.

Tyuring mashinasining tushunchasi bizga intuitiv ma'lum bo'lgan hisoblash prosedurasini elementar operasiyalarga ajratish natijasida hosil bo'ladi. Tyuring ta'kidlaydiki, istalgan mumkin bo'lgan hisoblashni o'tkazish uchun uning elementar operasiyalarini qaytarish yetarli.

Tyuring ayrim turdagi nazariy hisoblash mashinasini izohlab berdi. Bu mashina muayyan mexanik qurilma emas, balki «xayoliy» matematik mashinadir. Berilgan ko'rsatmani bajaruvchi hisoblovchi odamdan yoki mavjud raqamli hisoblash mashinasidan Tyuring mashinasi ikki jihati bilan farq qiladi.

Birinchidan, «Tyuring mashinasi» xato qila olmaydi, ya'ni u og'ishmay (chetga chiqmasdan) ko'rsatilgan qoidani bajaradi.

Ikkinchidan, «Tyuring mashinasi» potensial cheksiz xotira bilan ta'minlangan.

Endi Tyuring mashinasi tushunchasi bilan batafsil tanishamiz.

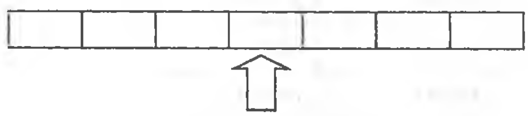
Tyuring mashinasini quyidagilar to'liq aniqlaydi:

1.Tashqi alfavit, ya'ni $A=\{a_0,a_1,a_2,...,a_n\}$ chekli simvollar to'plami. A to'plam elementlarining chekli ketma-ketligi A to'plamdagi so'z deyiladi. So'zni tashkil etuvchi simvollar soni shu **so'zning uzunligi** deyiladi.
Masalan, A alfavitning har bir elementi uzunligi 1 ga teng bo'lgan so'zdir. Bu alfavitda so'z ko'rinishida mashinaga beriladigan axborot (informasiya) kodlashtiriladi. Mashina so'z ko'rinishida berilgan informasiyani qayta ishlab, yangi so'z hosil qiladi.
2.Ichki alfavit, ya'ni $q_0,q_1,q_2,...,q_m,\Pi,Л,H$ simvollar. $q_0,q_1,q_2,...,q_m$ - mashinaning chekli son holatlarini ifodalaydi. Istalgan mashinaning holatlari soni tayinlangan bo'ladi. Ikki holatda maxsus vazifa bajariladi: q_1 - mashinaning boshlang'ich (dastlabki) holati, q_0 - natijaviy (oxirgi) holati (to'xtash holati). $\Pi,Л,H$ - surilish simvollaridir (o'ngga, chapga va joyida).
3.Ikki tomonga cheksiz davom ettirish mumkin bo'lgan lenta (mashinaning tashqi xotirasi). U katakchalarga (yacheykalarga) bo'lingan bo'ladi. Har bir katakchaga faqat bitta harf yozilishi mumkin. Bo'sh katakchani a_0 simvoli bilan belgilaymiz (1-shaklga qarang).

a_0	a_2	a_3	a_3	a_7	a_9	a_{11}	a_{12}			

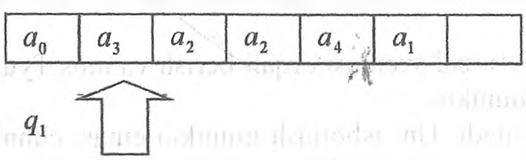
1-shakl.

4.Boshqaruvchi kallak (golovka). U lenta bo'ylab harakat qiladi va qandaydir katakcha (yacheyka) qarshisida to'xtashi mumkin (2-shakl).



2-shakl.

Bu holatda «kallak katakchani, ya'ni simvolni «ko'rib turibdi»» deb aytamiz. Mashinaning bir takt davomidagi ishida kallak faqat bitta katakchaga surilishi (o'ngga, chapga) yoki joyida turishi mumkin.
Lentada saqlanayotgan har bir informasiya tashqi alfavitning a_0 dan farqli chekli simvollar majmuasi bilan tasvirlanadi. Mashina ish boshlashidan oldin lentaga **boshlang'ich axborot** (boshlang'ich ma'lumot) beriladi. Bu holda boshqaruvchi kallak, qoidaga asosan, q_1 boshlang'ich holatni ko'rsatuvchi oxirgi chap belgi qarshisida turadi (3-shakl).



3-shakl.

Mashinaning ishi taktlar yig'indisidan iborat bo'lib, ish davomida boshlang'ich informasiya oraliq informasiyaga aylanadi.
Boshlang'ich informasiya sifatida lentaga tashqi alfavitning katakchalarga ixtiyoriy ravishda qo'yilgan chekli simvollar sistemasini (alfavitdagi ixtiyoriy so'zni) berish mumkin.
Berilgan boshlang'ich informasiyaga bog'liq bo'lgan ikki xil hol bo'lishi mumkin:
1.Mashina chekli son taktdan keyin to'xtaydi (q_0 to'xtash holatiga o'tadi). Bu vaqtda lentada B informasiya tasvirlangan bo'ladi. Bu holda mashina A boshlang'ich informasiyaga nisbatan tatbiq etiladigan (qo'llanib bo'ladigan) va uni qayta ishlab B natijaviy informasiyaga keltirgan deb aytiladi.

2.Mashina hyech vaqt to'xtamaydi, ya'ni q_0 to'xtash holatiga o'tmaydi. Bu holda mashina A boshlang'ich informasiyaga nisbatan tatbiq etilmaydi deb aytiladi.
Mashina ishining har bir taktida quyidagi funksional sxema bo'yicha harakat qiladi:

$$a_i q_j \to a_v \begin{matrix} \text{П} \\ \text{Л} \\ \text{Н} \end{matrix} q_s .$$

Bu yerda a_i, a_v - tashqi alfavitning harflari; q_j, q_s - mashinaning holatlari; $П, Л, Н$ - surilish simvollari.
Boshqaruvchi kallak lentada qanday harfni ko'rib turganligi (bizning yozuvda a_i) va mashina qaysi holatda (bizning yozuvda q_j) turganligiga qarab, bu taktda uch elementdan iborat komanda ishlab chiqiladi:
1)ko'rib turilgan harf almashtirilgan **tashqi alfavit harfi** (a_v);
2)kelgusi takt uchun tashqi xotira adresi $\begin{pmatrix} П \\ Л \\ Н \end{pmatrix}$;
3)mashinaning kelgusi holati (q_s).
Hamma komandalar majmuasi **Tyuring mashinasining dasturini** tashkil qiladi. Dastur ikki o'lchovli jadval shaklida bo'lib, uni **Tyuring funksional sxemasi** deb ataydilar.
Bunday sxema 1-jadvalda misol sifatida berilgan.

1-jadval

	a_0	a_1	a_2
q_1	$a_2 л q_3$	$a_1 п q_2$	$a_2 л q_1$
q_2	$a_0 н q_2$	$a_2 н q_1$	$a_1 н q_2$
q_3	$a_0 п q_0$	$a_1 п q_4$	$a_2 н q_1$
q_4	$a_1 н q_3$	$a_0 п q_4$	$a_2 п q_4$

Aniqki, Tyuring mashinasining ishi butunlayiga uning dasturi bilan aniqlanadi. Agar ikkita Tyuring mashinalarining funksional sxemalari bir xil bo'lsa, u holda ular bir-biridan farq qilmaydi. Har xil Tyuring mashinalari har xil dasturga ega bo'ladi.

Tyuring mashinasi algoritm tushunchasini aniqlashning bitta yo'lini ko'rsatadi. Shu tufayli bir nechta savollar paydo bo'ladi: Tyuring mashinasi tushunchasi qanchalik umumiy bo'ladi? Algoritmlarni Tyuring mashinasi vositasi bilan berish usulini universal usul deb bo'ladimi? Hamma algoritmlarni shu usul bilan berish mumkinmi?
Ushbu savollarga hozirgi vaqtda mavjud bo'lgan algoritmlar nazariyasi quyidagi gipoteza bilan javob beradi:
Har qanday algoritmni Tyuring funksional sxemasi orqali berish va mos Tyuring mashinasida realizasiya etish (amalga oshirish) mumkin.
Bu gipoteza **Tyuring tezisi** deb aytiladi. Uni isbotlash mumkin emas, chunki bu tezis qat'iy ta'riflanmagan algoritm tushunchasini qat'iy aniqlangan Tyuring mashinasining tushunchasi bilan bog'laydi.
Bu tezisni rad etish uchun Tyuring mashinasida realizasiyalanmaydigan (amalga oshirilmaydigan) algoritm mavjudligini ko'rsatish kerak.
Ammo hozirgacha aniqlangan hamma algoritmlarni Tyuring funksional sxemasi orqali realizasiya etish mumkin.

Shuni ham ta'kidlab o'tamizki, Markovning normal algoritm tushunchasi va Chyorch, Gyodel va Klinilar tomonidan kiritilgan rekursiv algoritm (rekursiv funksiyalar) tushunchalari Tyuring tomonidan kiritilgan algoritm tushunchasi (Tyuring funksional sxemasi) bilan ekvivalentligi isbotlangan.

Bu fakt o'z navbatida Tyuring gipotezasining to'g'riligini yana bir marta ko'rsatib o'tadi.

Nazorat uchun savollar:

1. *Algoritmga ta`rif berin.*
2. *Alfavit deb nimaga aytiladi.*
3. *Algoritmnini xususiyatlarini sanag.*
4. *Tyurin mashinasiga ta`rif bering.*
5. *Algoritm tushunchasi, yechuvchi prosedura, yechilish muammosi, algoritmning intuitiv ta'rifini tushuntirib bering.*
6. *Algoritmning xarakterli xususiyatlarini ayting.*
7. *Algoritmning diskretligi, determinasiyalanuvchanligi, qadamlarining elementarligi va natijaviyligi.*

Adabiyotlar:

1. Mendelson E. Introduction to mathematical logic. Sixth edition. New York.Taylor&Francis Group,2015
2. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012.
3. H.T. To'rayev, I. Azizov Matematik mantiq va diskret matematika. 1,2 jild. "Tafakkur-Bo'stoni", Toshkent, 2011y.

9-ma'ruza: Rekursiv ta'riflar va tuzilmaviy induksiya. Rekursiv algoritmlar. Rekursiya.

Reja:

1. **Primitiv rekursiya operatori.**
2. **Minimizatsiya operatori.**
3. **Rekursiv funksiyalar.**

**Kalit so`zlar:** rekursiya, primitive, minimizasiya, aniqlanish to`plami, funksiya superpozitsiaysi.

Rekursiv funksiyalar.

$X \subset N$ va $Y \subset N$ bo`sh bo`lmagan to`plamlar berilgan bo`lsin.Agar X to`plamning ba'zi elementlariga $Y$ to`plamning bir qiymatli aniqlangan elementlari mos qo`yilgan bo`lsa u holda X to`plamda f qismiy funksiya berilgan deyiladi.

$f : X \to Y$ qismiy funksiya $X = Z^n$ bo`lsa hold $f$ $Z$ to`plamda berilgan n argumentli funksiya deyiladi.Qismiy funksiyalar orasida qismiy arifmetik yoki sonli funksiyalar alohida ahamiyatga ega. [3] **(112-113bet)**

$f : Z^n \to Y$ qismiy funksiya $Z = N$ to`plamda aniqlangan bo`lib, qiymatlar to`plami ham natural sonlar to`plamida bo`lsa, bunday qismiy funksiya n argumentli qismiy sonli funksiya deyiladi. $f : N^m \to N$ m-argumentli qismiy sonli funksiya

$(x_1, x_2, ..., x_m) \in N^m$, f funksiya $(x_1, x_2, ..., x_m)$ ga y natural sonni mos qo`ygan bo`lsa u holda $f(x_1, x_2, ..., x_m) = y$ kabi yoziladi.

Agar $f^m(x_1, x_2, ... x_m)$ m-o`rinli funksiya uchun $\delta_{f^m} = N^m$ ($\delta_{f^m} - f^m$ funksiyaning aniqlanish sohasi) bo`lsa f^m hamma yerda aniqlangan funksiya deyiladi.

Hamma yerda aniqlangan sonli funksiyaga misollar:

$$a) f(x) = x + 1$$

$$b) y = x^2 + 1$$

$$c) f(x, y) = x^y$$

$$d) f(x, y) \begin{cases} x - y \\ 0 \end{cases}$$

$$e) f(x) = \left[e^x \right]$$

Endi esa qismiy sonli funksiyalarga misol keltiramiz:

$$a) f(\mathrm{x}) = \frac{x}{2}$$

$$b) f(x) = x - y$$

$$c) f(x) = \sin x$$

$$d) f(x) = \sqrt{x}$$

Hamma yerda aniqlangan quyidagi funksiyalar

$$\begin{cases} s(x) = x + 1 \\ \theta(x) = 0 \\ I_m^n(x_1, x_2, ... x_n) = x_m \quad (1 \le m \le n) \end{cases}$$

alohida ahamiyatga ega bo`lib, ular sodda funksiyalar deyiladi.

$s(x)$ -„keyin kelish" funksiyasi bo`lib u natural son berilganda undan keyin keluvchi natural sonni hisoblaydi.

$\theta(x)$ -nol funksiya

$I_m^n(x_1, x_2, ... x_n) = x_m$ m-argumentni tanlovchi funksiya.

Endi ular ustida bajariladigan asosiy amallarni ko`rib chiqamiz, ular operatorlar deyiladi.

I. Superpozitsiya operatori (S-operator) [3] (112-113bet)

g^m, f_i^n $(i = 1, m)$ -qismiy sonli funksiyalar berilgan bo`lsin. U holda

$h(x_1,x_2,...x_n)=g^m(f_1(x_1,x_2,...x_n),...,f_m(x_1,x_2,...x_n))$ bo`lsa h funksiya $g^m, f_i^n \ (i=\overline{1,m})$ funksiyalardan superpozitsiya operatori yordamida hosil qilingan deyiladi hamda $h=S(g,f_1,f_2,...f_n)$ kabi belgilanadi.

Agar $g,f_1,f_2,...f_n$ lar hamma yerda aniqlangan funksiyalar bo`lsa $S(g,f_1,f_2,...f_n)$ ham hamma yerda aniqlangan funksiya bo`ladi.

II. Primitiv rekursiya operatori (PR-operator) $[3]$ (112-113bet)

$h^{n+2}(x_1,x_2,.....,x_n,y,z), \quad g(x_1,x_2,...,x_n)$ qismiy funksiyalar bo`lsin, $f(x_1,x_2,..,x_n,x_{n+1})$ funksiyani

$$f^{n+1}(x_1,x_2,..,x_n,0)=g^n(x_1,x_2,..,x_n)$$
$$f^{n+1}(x_1,x_2,..,x_n,y+1)=h^{n+2}\left(x_1,x_2,..,x_n,y,f^{n+1}(x_1,x_2,..,x_n,y)\right)$$

sxema yordamida hosil qilish mumkin bo`lsa u holda berilgan funksiyalardan $f^{n+1}$ funksiyani primitiv rekursiv operator yordamida hosil qilingan deyiladi. $h^{n+2}, g^n$ lar hamma yerda aniqlangan funksiyalar bo`lsa , tabiiyki $f(x_1,x_2,...x_n,y)$ ham hamma yerda aniqlangan funksiya bo`ladi. $n=0$ uchun ko`rib chiqamiz. Bunda g, 0 argumentli funksiya bo`lib, ya'ni $g=a,\ a\in N,\ g$ esa ikki argumentli binar funksiya bo`ladi. U holda primitiv rekursiya operatorining ko`rinishi quyidagicha

$$\begin{cases} f(0)=a \\ f(y+1)=g(y,f(y)) \end{cases}$$

1. -misol.

1. $f(x,y)=x+y$

$$\begin{cases} f(x,0)=g(x)=I_1^1(x) \\ f(x,y+1)=h(x,y,f(x,y))=s(I_3^3(x,y,f(x,y)) \end{cases}$$

Buni tog`riligini tekshirish uchun quyidagi xusisiy hollarni ko`rib chiqamiz:

$$f(x,0)=x$$
$$f(x,1)=f(x,0)+1=x+1$$
$$f(x,2)=f(x,1)+1=x+2$$
$$f(x,3)=f(x,2)+1=x+3$$
$$f(x,4)=f(x,3)+1=x+4$$

berilgan funksiya primitiv rekursiv operatori yordamida hosil qilindi, demak berigan funksiyamiz primitive rekursiv funksiya ekan.

2. $f(x,y)=xy$

$$\begin{cases} f(x,0)=g(x)=\theta(x)=0 \\ f(x,y+1)=h(x,y,f(x,y))=I_1^3(x,y,f(x,y))+I_3^3(x,y,f(x,y))= \\ =x+f(x,y) \end{cases}$$

Buni tog`riligini tekshirish uchun quyidagi xusisiy hollarni ko`rib chiqamiz:

$$f(x,1)=x+f(x,0)=x+0=x$$

$$f(x,2)=x+f(x,1)=x+x=2x$$

3. $f(x,y)=x^y,(0^0=1)$

$$f(x,0)=1$$

$$f(x,y+1)=x\cdot f(x,y)$$

Buni tog`riligini tekshirish uchun quyidagi xusisiy hollarni ko`rib chiqamiz:

$$f(x,1)=x\cdot f(x,0)=x$$

$$f(x,2)=x\cdot f(x,1)=x\cdot x=x^2$$

III. Minimizatsiya operatori. [3] (112-113bet)

$g^{n+1}(x_1,x_2,.....,x_n,y)$, $f^n(x_1,x_2,...,x_n)$ qismiy funksiyalar bo`lsin, agar $f^n(x_1,x_2,....,x_n)$ funksiya aniqlangan va $y$ ga teng faqat va faqat shu holdaki $g(x_1,x_2,....x_n,0),...g(x_1,x_2,...x_n,y-1)$ lar aniqlangan va noldan farqli bo`lib $g(x_1,x_2,...,x_n,y)=0$ bo`lsa, $f^n(x_1,x_2,.....,x_n)$ funksiyasi $g^{n+1}(x_1,x_2,.....,x_n,y)$ funksiyadan minimizatsiya operatori orqali hosil qilingan deyiladi va quyidagi ko`rinishda belgilanadi:

$$f^n(x_1,x_2,......,x_n)=\mu y[g^{n+1}(x_1,x_2,....,x_n,y)=0]$$

2-misol.

1. $K(x,y)$-eng kichik umumiy karrali. $K(x,0)=K(0,y)=0$ deb qabul qilamiz.

$$K(x,y)=\mu z[z\cdot\overline{sg}(x\cdot y)+sg(x\cdot y)[\overline{sg}z+rest(z,x)+rest(z,y)]=0$$

sxema bo`yicha hisoblanadi.

Misol uchun bu sxema k(6,8)=24 ekanini hisoblab beradi.

2. $\pi(y)-y$ dan oshmaydigan tub sonlar soni. $p(x)-x$ tub son.

$$\pi(0)=0 \qquad p(0)=2$$
$$\pi(1)=0 \qquad p(1)=3$$
$$\pi(2)=1 \qquad p(2)=5$$
$$\pi(3)=2 \qquad p(3)=7$$
$$\pi(4)=2 \qquad p(4)=11$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$p(x)=\mu y\big[|\pi(y)-1|=0\big]\le 2^{2^x}$ sxema yordamida hisoblanadi.

Rekursiv funksiyalar. $[3]$ **(112-113bet)**

1-ta'rif . Eng sodda funksiyalarga superpozitsiya va primitiv rekursiya operatorlarini chekli marta qo`llab hosil qilingan har qanday funksiya primitiv rekursiv funksiya deyiladi.

Ushbu ta'rifdan ko`rinadiki, bazis funksiyalarga dastlabki primitiv rekursiv funksiyalar deyilib, boshqa primitive rekursiv funksiyalar ulardan S-operator va PR-operatorlar yordamidahosil qilinadi.Primitiv rekursiv funksiya tushunchasiga yana ta'rif berish mumkin.

2-ta'rif. Eng sodda funksiyalarga $S,\ PR\ va\ \mu$ operatorlarni chekli marta qo`llash natijasida hosil bo`lgan har qanday funksiya qismiy rekursiv funksiya deyiladi.

Ushbu ta'rifdan ko`rinadiki, har qanday primitiv rekursiv funksiya qismiy rekursiv funksiya, ammo har qanday qismiy rekursiv funksiya primitive rekursiv funksiya bo`lishi shart emas

$F_{q.r}$ -qismiy rekursiv funksiyalar to`plami

$F_{p.r}$ -primitiv rekursiv funksiyalar to`plami

$$F_{p.r}\subset F_{q.r}$$

3-ta'rif . Hamma yerda aniqlangan qismiy rekursiv funksiya umumrekursiv funksiya deyiladi.

$F_{u.m.r}$ -umumrekursiv funksiyalar

$$F_{u.m.r}\subset F_{q.r}$$

Funksiyalarning har qanday chekli to`plamidan $S,\ PR,\ \mu y$ operatorlarni bir martadan qo`llash natijasida quvvati sanoqlidan yuqori bo`lgan funksiyalar to`plamini hosil qilish mumkinligi tufayli $F_{p.r},\ F_{q.r}\ va\ F_{u.m.r}$ to`plamlarning har biri sanoqli to`plamdir.

Nazorat uchun savollar:

1. *Sonli funksiyalar misol keltiring.*
2. *Qismiy sonli funksiyalar.*
3. *Superpozitsiya operatori.*
4. *Primitiv rekursiya operatori.*
5. *Minimizatsiya operatori.*
6. *Eng sodda funksiyalar.*
7. *Primitiv rekursiv funksiya.*
8. *Qismiy rekursiv funksiya.*
9. *Umumrekursiv funksiya.*
10. *Rekursiv funksiyalar haqida asosiy teoremalar.*

Adabiyotlar:

1. Mendelson E. Introduction to mathematical logic. Sixth edition. New York.Taylor&Francis Group,2015
2. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012.
3. H.T. To'rayev, I. Azizov Matematik mantiq va diskret matematika. 1,2 jild. "Tafakkur-Bo'stoni", Toshkent, 2011y.

10- ma'ruza: Markov normal algoritmlari. Hisoblanuvchi funksiyalar

Reja:

1.Markovning normal algoritmlari.
2.Markov bo'yicha qismiy hisoblanuvchi va hisoblanuvchi funksiyalar.
3.Algoritmik yechilmovchi muammolar.

**Kalit so`zlar:** effektiv, alfavit, simvol, natijaviy formula, ro`yxat, arifmetik funksiya, hisoblanuvchi funksiya.

1-ta'rif. *Bo'sh bo'lmagan chekli simvollar to'plamiga alfavit va alfavitdagi simvollarga harflar deb aytiladi.*

2-ta'rif. *A alfavitdagi harflarning har qanday chekli ketma-ketligiga shu to'plamdagi* ***so'z*** *deb aytiladi. Harflarning bo'sh ketma-ketligiga* ***bo'sh so'z*** *deb aytamiz va uni $\wedge$ simvol bilan belgilaymiz.*

Agar $S_{j_1}\ S_{j_2}\dots S_{j_k}$ so'zni P bilan va $S_{r_1}\ S_{r_2}\dots S_{r_m}$ so'zni Q bilan belgilasak, u holda $S_{j_1}\ S_{j_2}\dots S_{j_k}\ S_{r_1}\ S_{r_2}\dots S_{r_m}$ so'z P va Q so'zlarning birlashmasi PQ ni bildiradi. Xususiy holda, $P\wedge = \wedge P = P$ va $(P_1P_2)P_3 = P_1(P_2P_3)$.

Agar $B \subset A$ bo'lsa, u vaqtda A ga B alfavitining kengayishi (kengaytirilgani) deb aytiladi. Ravshanki, bu holda B ning har bir so'zi o'z navbatida A alfavitining ham so'zi bo'ladi.

A alfavitidagi hamma so'zlarning to'plami D, C esa D to'plamning biror qism to'plami bo'lsin, ya'ni $C \subset D$.

3-ta'rif. *Aniqlanish sohasi C va qiymatlar sohasi D bo'lgan effektiv hisoblanuvchi funksiyaga A alfavitdagi* ***algoritm (algorifm)*** *deb aytiladi.*

4-ta'rif. Agar *A alfavitdagi biror P so'z U algoritmning aniqlanish sohasiga tegishli bo'lsa, u holda U algoritm P so'zga* ***tatbiq etiladigan*** *deb aytiladi.*

5-ta'rif. *Agar $A \subset B$ bo'lsa, u holda B alfavitdagi har bir algoritm A* ***alfavit ustidagi algoritm*** *deb aytiladi.*

A alfavitdagi normal algoritm tushunchasi bilan A alfavit ustidagi normal algoritm tushunchasi o'rtasidagi farq juda ham muhimdir. A alfavitdagi har qanday normal algoritm faqat A ning harflaridan foydalanadi. A alfavit ustidagi normal algoritm bo'lsa A ga kirmagan boshqa qo'shimcha harflardan ham foydalanishi mumkin. Shunday qilib, A dagi har qanday normal algoritm A ustidagi normal algoritm ham bo'ladi. Ammo, A da shunday algoritmlar mavjudki, ular A ustida normal algoritm ekanligiga qaramasdan, A da normal algoritm bo'laolmay-dilar.

Ko'p aniqlangan algoritmlarni birmuncha oddiyroq qadamlarga bo'lish mumkin. Shu maqsadda rus matematigi A.A.Markov 1950 – yillarda algoritm tuzishning asosi (negizi) qilib, elementar operasiya sifatida **bir so'zni ikkinchi so'z o'rniga qo'yishni** oladi.

Agar P va Q A alfavitdagi so'zlar bo'lsa, u holda $P \to Q$ va $P \to \cdot Q$ larni A alfavitdagi o'rniga qo'yish formulalari deb aytamiz. Bu yerda $\to$ va $\cdot$ simvollari A alfavitning harflari emas hamda P va Q larning har biri so'z bo'lishi mumkin. $P \to Q$ o'rniga qo'yish formulasi **oddiy** va $P \to \cdot Q$ o'rniga qo'yish formulasi **natijaviy (xulosaviy)** formula deb aytiladi.

Berilgan $P \to Q$ va $P \to \cdot Q$ o'rniga qo'yish formulalarining istalgan birini ifodalash uchun $P \to (\cdot)\, Q$ umumiy ko'rinishdagi yozuvni ishlatamiz.

Alfavitning quyidagi o'rniga qo'yish formulalarining chekli ro'yxati

$$P_1 \to (\cdot)\, Q_1$$
$$P_2 \to (\cdot)\, Q_2$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$P_r \to (\cdot)\, Q_r$$

algoritm sxemasi deb aytiladi va u A alfavitda quyidagi algoritmni yuzaga keltiradi:

Agar shunday W, V so'zlar (bo'sh so'z bo'lishlari mumkin) topilib, $Q = WTV$ bo'lsa, u holda T so'z Q so'zning tarkibiga kiradi deb kelishib olamiz.

Endi A alfavitda P so'z berilgan bo'lsin. Bu yerda ikki hol bo'lishi mumkin:

1. $P_1, P_2, \dots, P_r$ so'zlarning birortasi ham P so'zning tarkibiga kirmaydi. Bu tasdiqni qisqa ravishda $U : P \supset$ shaklida yozamiz.

2. $P_1, P_2, \dots, P_r$ so'zlarning orasida P so'zning tarkibiga kiruvchilari topiladi. Endi $1 \le m \le r$ munosabatni qanoatlantiruvchi eng kichik butun son m va P_m P ning tarkibiga kiruvchi so'z bo'lsin.

P so'zning tarkibiga eng chapdan kirgan P_m so'zni Q_m bilan almashtirishdan hosil bo'ladiganni R deylik. P va R lar orasidagi aytilgan munosabatni:

a) agar $P \to (\cdot)\, Q_m$ o'rniga qo'yish formulasi oddiy formula bo'lsa,

$$U : P \vdash R \qquad (1)$$

shaklida va

b) agar $P \to (\cdot)\, Q_m$ o'rniga qo'yish formulasi natijaviy formula bo'lsa,

$$U : P \vdash \cdot R \qquad (2)$$

shaklida yozamiz.

(1) holda U algoritmi P so'zini R so'ziga oddiy o'tkazadi deyiladi va (2) holda U algoritmi P so'zini R so'ziga natijaviy o'tkazadi deb aytiladi.

$U : P \models R$ simvolik yozuv A alfavitda shunday $R_0, R_1, \dots, R_k$ so'zlar ketma-ketligi mavjudki, $P = R_0$, $R = R_k$, $J = 0,1,\dots,k-2$ lar uchun $U : R_j \vdash R_{j+1}$ va yoki $U : R_{k-1} \vdash R_k$, yoki $U : R_{k-1} \vdash \cdot R_k$ (oxirgi holda $U : P \models R$ o'rniga $U : P \models \cdot R$ yoziladi) ekanligini bildiradi.

Yoki $U : P \models \cdot R$, yoki $U : P \models R$ va $U : R \supset$ bo'lsa, shunda va faqat shundagina $U(P) = R$ deb qabul qilamiz.

Yuqoridagi kabi aniqlangan algoritmga normal algoritm yoki Markov algoritmi deb aytiladi.

U algoritmning amal qilishini quyidagicha ifodalash mumkin. A alfavitda P so'z berilgan bo'lsin. U algoritm sxemasida P_m so'z P ning tarkibiga kiruvchi birinchi $P_m \to (\cdot)\, Q_m$

o'rniga qo'yish formulasini topamiz. P so'zning tarkibiga eng chapdan kirgan P_m so'z o'rniga Q_m formulani qo'yamiz. R_1 -shunday o'rniga qo'yishning natijasi bo'lsin. Agar $P_m \to (\cdot) Q_m$ o'rniga qo'yish formulasi natijaviy bo'lsa, u holda algoritmning ishi tugaydi va uning qiymati R_1 bo'ladi. Agar $P_m \to (\cdot) Q_m$ o'rniga qo'yish formulasi oddiy bo'lsa, u holda R_1 ga P ga nisbatan ishlatilgan prosedurani bajaramiz va hokazo. Agar oxirgi etapda $U : R_i \supset$ munosabatni qanoatlantiruvchi (ya'ni $P_1, P_2, ..., P_r$ so'zlarning birortasi R_i tarkibiga kirmaydi) R_i so'zi hosil bo'lsa, u holda algoritmning ishi tugaydi va R_i uning qiymati bo'ladi.
Agar ifodalangan jarayon oxirgi etapda tamom bo'lmasa, u holda U algoritm P so'zga tatbiq etilmaydi deb aytiladi.
1-misol. $\{b, c\}$ A alfaviti bo'lsin. Quyidagi algoritm sxemasini ko'ramiz

$$\left.\begin{array}{l} b \to \cdot \wedge \\ c \to c \end{array}\right\}.$$

Bu sxema bilan berilgan U normal algoritm A alfavitdagi tarkibiga kamida bitta b harfi kirgan har qanday P so'zni shunday so'zga o'zgartiradiki, bu so'z P so'zdan uning tarkibiga eng chapdan kirgan b so'zni o'chirish natijasida hosil bo'ladi.
Haqiqatan ham, P so'zi tarkibiga eng chapdan kirgan b so'zdan chaproqda turgan har qanday c harfni $c \to c$ oddiy o'rniga qo'yish formulasi yana c harfiga o'tkazadi va eng chapdagi b harfini $b \to \cdot \wedge$ natijaviy o'rniga qo'yish formulasi $\wedge$ natijaviy bo'sh so'zga o'zgartiradi.
Masalan, agar $P = ccbbc$ bo'lsa, u holda $P \to \cdot Q$, bu yerda $Q = ccbc$. U algoritm bo'sh so'zni o'z-o'ziga o'zgartiradi.
U algoritmi b harfi kirmagan bo'sh bo'lmagan so'zlarga tatbiq etilmaydi. Haqiqatan ham, agar P so'zi faqat c harflardan iborat bo'lsa, u holda $c \to c$ oddiy o'rniga qo'yish formulasi uni yana o'ziga aylantiradi. U vaqtda hamma vaqt $P \to P$ bo'ladi va biz natijaviy o'rniga qo'yish formulasiga kelolmaymiz, ya'ni jarayon cheksiz davom etadi.
2-misol. $A - \{a_0, a_1, ..., a_n\}$ alfavit bo'lsin. Quyidagi sxemani ko'ramiz

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 \to \wedge \\ a_1 \to \wedge \\ \vdots \\ a_n \to \wedge \end{array}\right.$$

Bu sxemani $\forall_i (a_i \to \wedge)$ $(a_i \in A)$ ko'rinishida ham yozish mumkin. Bu sxema A alfavitdagi har qanday so'zni bo'sh so'zga o'zgartiradigan U normal algoritmdir.
Masalan, $U : a_1a_2a_1a_3a_0 \vdash a_1a_2a_1a_3 \vdash a_2a_1a_3 \vdash a_2a_3 \vdash \wedge$, va oxiri $U : \wedge \supset$. Demak, $U(a_1a_2a_1a_3a_0) = \wedge$.
3-misol. A alfavit S_1 harfdan iborat bo'lsin. Bu harfni 1 bilan belgilaymiz. Har qanday n natural son uchun induksiya metodi bo'yicha $\bar{0} = 1$ va $\overline{n+1} = \bar{n}1$ larni aniqlaymiz. Shunday qilib, $\bar{1} = 11$, $\bar{2} = 111$ va hokazo.
$\bar{n}$ so'zlar raqamlar deb aytiladi.

$$\{\wedge \to \cdot 1$$

sxema orqali berilgan U normal algoritmni aniqlaymiz.
A alfavitidagi har qanday P so'z uchun $U(P) = 1P$ ga ega bo'lamiz. Xususiy holda, har qanday n natural son uchun $U(\bar{n}) = \overline{n+1}$. Har qanday P so'z bo'sh so'zi $\wedge$ ning kirishidan boshlanishini (chunki $P = \wedge P$) eslasak, keltirilgan algoritmning to'g'riligiga ishonamiz.

U va K - algoritmlar va P - so'z bo'lsin. Agar U va K algoritmlarning ikkalasi ham P so'zga tatbiq etilmaydigan yoki ikkalasi ham unga tatbiq etiladigan va keyingi holda $U(P)=K(P)$ bo'lsa, bu holatni $U(P)\simeq K(P)$ ko'rinishda ifodalaymiz.

Umuman, agar C va D - qandaydir ifodalar bo'lsa, u holda $C\simeq D$ munosabat qo'yidagini bildiradi: yoki ikkala ifoda ham aniqlanmagan, yoki ikkalasi ham aniqlangan va ular bir xil obyektni belgilaydi.

1-ta'rif. *Agar A alfavitdagi istalgan P so'z uchun $U(P)\simeq K(P)$ bo'lsa, u holda U va K algoritmlar A ga nisbatan A alfavit ustida batamom (tamomila) ekvivalent deb aytiladi.*

Agar P A alfavitdagi so'z bo'lganida har doim $U(P)\simeq K(P)$ hamda hyech bo'lmaganda $U(P)$ yoki $K(P)$ so'zlarning birortasi aniqlangan va yana A ning so'zi bo'lsa, U va K algoritmlar A alfavitga nisbatan ekvivalent deb aytiladi.

$M-\{1,*\}$ alfavit, ω - hamma natural sonlar to'plami, φ - n argumentli qismiy effektiv hisoblanuvchi arifmetik funksiya, ya'ni ω^n to'plamning ayrim qism to'plamini ω ga akslantiruvchi funksiya bo'lsin.

B_φ orqali hyech bo'lmaganda bir tomoni aniqlangan holda har doim $B_\varphi(\overline{(k_1,k_2,...,k_n)})=\overline{\varphi(k_1,k_2,...,k_n)}$ tenglikni o'rinli qiladigan M dagi algoritmni belgilaymiz. Bu algoritm $\overline{(k_1,k_2,...,k_n)}$ so'zidan farq qiluvchi boshqa so'zlarga tatbiq etilmaydi deb faraz qilamiz.

2-ta'rif. *Agar M ustida M ga nisbatan B_φ ga batamom ekvivalent bo'lgan normal algoritm mavjud bo'lsa, u holda φ ga Markov bo'yicha qismiy hisoblanuvchi funksiya deb aytamiz.*

3-ta'rif. *Agar φ funksiya har qanday n natural son uchun (hamma joyda) aniqlangan va Markov bo'yicha qismiy hisoblanuvchi funksiya bo'lsa, u holda unga Markov bo'yicha hisoblanuvchi funksiya deb aytamiz.*

Markov bo'yicha qismiy hisoblanuvchi funksiya tushunchasi bilan qismiy rekursiv funksiya tushunchasi hamda Markov bo'yicha hisoblanuvchi funksiya tushunchasi bilan umumrekursiv funksiya tushunchalari ekvivalentdir.

Keltirilgan tasdiqni isbotlovchi quyidagi teorema mavjud:

1-teorema. *Har qanday qismiy rekursiv funksiya Markov bo'yicha qismiy hisoblanuvchi funksiya bo'ladi va har qanday umumrekursiv funksiya Markov bo'yicha hisoblanuvchi funksiyadir.*

Quyidagi teoremalarni isbotsiz keltiramiz:

2-teorema. *Agar A alfavit ustidagi U algoritm bo'yicha, ψ_U funksiya qismiy rekursiv (rekursiv) bo'lsa, u holda A alfavit ustida A ga nisbatan U algoritmga batamom ekvivalent bo'lgan normal algoritm mavjuddir.*

3-teorema. *Agar U A alfavit ustidagi normal algoritm bo'lsa, u holda ψ_U qismiy rekursiv funksiya bo'ladi; agar, bundan tashqari, U algoritm A alfavitdagi har qanday so'zga tatbiq etiladigan bo'lsa, u holda ψ_U umumrekursiv funksiya bo'ladi.*

Natija. Agar berilgan φ qismiy funksiya Markov bo'yicha qismiy hisoblanuvchi funksiya bo'lsa, u qismiy rekursiv funksiya ham bo'ladi va agar φ Markov bo'yicha hisoblanuvchi funksiya bo'lsa, u holda φ umumrekursiv funksiya hamdir.

Natija va teoremalarning isboti E.Mendelson kitobining 242-244 va 246-249 betlarda keltirilgan.

Shunday qilib, keltirilgan natija va 1-teorema Markov bo'yicha qismiy hisoblanuvchi funksiya tushunchasi bilan qismiy rekursiv funksiya (xuddi shunday Markov bo'yicha hisoblash bilan rekursivlik) tushunchasining ekvivalentligini ko'rsatadi.

O'z navbatida Chyorch tezisi bo'yicha hisoblanuvchanlik tushunchasi bilan rekursivlik tushunchasi (qismiy effektiv hisoblanuvchanlik tushunchasi qismiy rekursivlik tushunchasiga) ekvivalentdir. A.A.Markov algoritmlar terminida normallashtirish (normalizasiya) prinsipini yaratdi: A alfavitdagi har qanday algoritm A ga nisbatan A ustidagi biror normal algoritmga batamom ekvivalentdir.

Chyorch tezisi bilan normallashtirish prinsipining ekvivalentligi aniqlandi. Haqiqatan ham, Chyorch tezisi to'g'ri. A alfavitda U algoritm berilgan bo'lsin. Unga mos keladigan ψ_U funksiya qisman effektiv hisoblanuvchi bo'ladi. U holda, Chyorch tezisiga asosan, ψ_U qismiy rekursiv funksiyadir. Demak, 2-teoremaga ko'ra, U algoritm A ustidagi qandaydir normal algoritmga A ga nisbatan batamom ekvivalentdir. Shunday qilib, agar Chyorch tezisi to'g'ri bo'lsa, u holda Markovning normallashtirish prinsipi ham to'g'ridir.

Endi normallashtirish prinsipi to'g'ri va φ ixtiyoriy qisman effektiv hisoblanuvchi funsiya, B_φ esa φ funksiyaga mos keluvchi M dagi algoritm bo'lsin. Normallashtirish prinsipiga asosan B_φ algoritm M ustidagi biror normal algoritmga M ga nisbatan batamom ekvivalentdir. Demak, φ funksiya Markov bo'yicha qisman hisoblanuvchi funksiyadir. U vaqtda olingan natijaga ko'ra φ qisman rekursiv (rekursiv) funksiya bo'ladi. Shunday qilib, Markovning normallashtirish prinsipidan Chyorch tezisini keltirib chiqardik.

Ma'lumki, algoritm va effektiv hisoblanuvchi funksiya tushunchalari intuitiv tushunchalar bo'lganligi uchun biz Markovning normallashtirish prinsipi va Chyorch tezisining to'g'riligini isbot qilolmaymiz.

Shuni ham ta'kidlash kerakki, Chyorchning λ - hisoblanuvchanlik nazariyasi va Postning normal sistemalar nazariyasidan kelib chiqadigan tushunchalar ham qisman rekursiv funksiya yoki normal algoritm tushunchalariga ekvivalent bo'ladi.

Matematika tarixida biror masalani yechish, odatda uning yechilish algoritmini topish deb hisoblanardi. Deyarli XX asr boshlarigacha hamma matematik masalalar algoritmik yechiluvchi masalalar deb qaralgan va ularni yechuvchi algoritmlar izlangan. Masalan, haqiqiy koeffisiyentli n - darajali ko'phadning ildizlarini uning koeffisiyentlari yordamida radikallarda ifoda etish algoritmini izlash bir necha asrlar davom etdi. Masalan, uchinchi va to'rtinchi darajali tenglamalar uchun bu algoritmni XVI asrda italyan matematiklari Kardano va Verarilar yaratdilar. Uzoq yillardan keyin norvegiyalik matematik Abel $n \geq 5$ bo'lganda bunday algoritm mavjud emasligini ko'rsatdi. Ikkinchi misol sifatida Gilbertning diofant tenglamalar haqidagi 10-muammosini ko'rsatish mumkin. Bu muammoni Gilbert 1900 yilda Parijda e'lon qilgan edi. Deyarli 70 yildan keyin rus matematiklari Yu.Matiyasevich va G.Chudnovskiylar bu muammo algoritmik yechilmovchi muammo ekanligini isbotlab berdilar.

Faqat algoritmning intuitiv tushunchasidan Tyuring mashinasining aniq tushunchasiga o'tish berilgan ommaviy muammoning algoritmik yechiluvchanlik masalasiga aniqlik kiritdi. Bu masalani quyidagicha ifodalash mumkin: berilgan ommaviy muammoni yechadigan Tyuring mashinasi mavjudmi yoki bunday mashina mavjud emasmi?

Bu savolga algoritmlar nazariyasi ayrim hollarda salbiy javob beradi. Shu turdagi natijalarni birinchilar qatorida 1936 yilda amerikalik matematik A.Chyorch oldi. U predikatlar mantiqidagi yechilish muammosi umumiy holda algoritmik yechimga ega emasligini ko'rsatdi. O'sha yilning o'zida u matematik mantiqdagi keltirib chiqaruvchanlikni tanish muammosi ham algoritmik yechilmasligini isbot qildi.

11- ma'ruza: Kombinatorika asoslari. O'rinlashtirishlar va kombinasiyalar.

Reja:

1. Kombinatorika haqida umumiy tushunchalar.

2. Kombinatorika predmeti va paydo bo'lish tarixi.
3. Kombinatorikada ko'p qo'llaniladigan usul va qoidalar.

**Kalit so`zlar:** kombinasiya, kombinatorik tuzilma, arifmetik uchburchak, binom, binomila koeffitsient qo`shish va ko`paytirish qoidalari.

Kombinatorika predmeti va paydo bo'lish tarixi. Matematikaning kombinatorik tahlil, kombinatorik matematika, birlashmalar nazariyasi, qisqacha, **kombinatorika** deb ataluvchi bo'limida chekli yoki muayyan ma'noda cheklilik shartini qanoatlantiruvchi to'plamni (bu to'plamning elementlari qanday bo'lishining ahamiyati yo'q: harflar, sonlar, hodisalar, qandaydir predmetlar va boshqalar) qismlarga ajratish, ularni o'rinlash va o'zaro joylash ya'ni, **kombinatsiyalar**, **kombinatorik tuzilmalar** bilan bog'liq masalalar o'rganiladi. Hozirgi davrda kombinatorikaga oid ma'lumotlar inson faoliyatining turli sohalarida qo'llanilmoqda. Jumladan, matematika, kimyo, fizika, biologiya, lingvistika, axborot texnologiyalari va boshqa sohalar bilan ish ko'ruvchi mutaxassislar kombinatorikaning xilma-xil masalalariga duch keladilar.[4](316 bet)

To'plamlar nazariyasi iboralari bilan aytganda, kombinatorikada kortejlar va to'plamlar, ularning birlashmalari va kesishmalari hamda kortejlar va qism to'plamlarni turli usullar bilan tartiblash masalalari qaraladi. To'plam yoki kortej elementlarining berilgan xossaga ega konfiguratsiyasi bor yoki yo'qligini tekshirish, bor bo'lsa, ularni tuzish va sonini topish usullarini o'rganish hamda bu usullarni biror parametr bo'yicha takomillashtirish kombinatorikaning asosiy masalalari hisoblanadi.

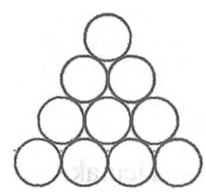
Kombinatorikaning ba'zi elementlari eramizdan oldingi II asrda hindistonliklarga ma'lum edi. Ular hozirgi vaqtda gruppalashlar deb ataluvchi kombinatorik tushunchadan foydalanishgan. Eramizning XII asrida Bxaskara Acharya[16] o'zining ilmiy tadqiqotlarida gruppalash va o'rin almashtirishlarni qo'llagan. Tarixiy ma'lumotlarga ko'ra, hindistonlik olimlar kombinatorika elementlaridan, jumladan, birlashmalardan foydalanib, she'riy asarlar tarkibiy tuzilishining mukammalligini tahlil qilishga uringanlar. O'rta Osiyo va G'arbiy Yevropada yashab ijod qilgan olimlarning kombinatorikaga oid ishlari haqida ushbu bobning 3- paragrafida ma'lumot keltirilgan.

Umuman olganda, kombinatorikaning dastlabki rivoji qimor o'yinlarini tahlil qilish bilan bog'liq. Ba'zi atoqli matematiklar, masalan, B. Paskal[17], Yakob Bernulli[18], L. Eyler[19], P. L. Chebishev[20] turli o'yinlarda (tanga tashlash, soqqa tashlash, qarta o'yinlari va shu kabilarda) ilmiy jihatdan asoslangan qaror qabul qilishda kombinatorikani qo'llashgan.

XVII asrda kombinatorika matematikaning alohida bir ilmiy yo'nalishi sifatida shakllana boshladi. B. Paskal o'zining "Arifmetik uchburchak haqida traktat" va "Sonli tartiblar haqida traktat" (1665 y.) nomli asarlarida hozirgi vaqtda binomial koeffitsientlar deb ataluvchi sonlar haqidagi ma'lumotlarni keltirgan. P. Ferma[21] esa figurali sonlar bilan birlashmalar nazariyasi orasida bog'lanish borligini bilgan.

Figurali sonlar quyidagicha aniqlanadi. Birinchi tartibli figurali sonlar: 1, 2, 3, 4, 5, … (ya'ni, natural sonlar); ikkinchi tartibli figurali sonlar: 1-si 1ga teng, 2-si dastlabki ikkita natural sonlar yig'indisi (3), 3-si dastlabki uchta natural sonlar yig'indisi (6) va hokazo (1, 3, 6, 10, 15, …); uchinchi tartibli figurali sonlar: 1-si 1ga teng, 2-si birinchi ikkita ikkinchi *tartibli figurali sonlarlar yig'indisi (4), 3-si birinchi uchta ikkinchi tartibli figurali sonlarlar* yig'indisi (10) va hokazo (1, 4, 10, 20, 35, …); va hokazo.

1- misol. Tekislikda radiuslari o'zaro teng bo'lgan aylanalar bir-biriga uringan holda yuqoridan 1- qatorda bitta, 2- qatorda ikkita, 3- qatorda



1- shakl

[16] Bxaskara Acharya (1114-1178 yildan keyin) – hindistonlik matematik va astronom.
[17] Paskal (Pascal Blez, 1623-1662) – fransuz faylasufi, yozuvchisi, matematigi va fizigi.
[18] Bernulli Yakob (1654-1705) – Shveysariya matematigi.
[19] Eyler (Euler Leonard, 1707-1783) – mashhur matematik, mexanik va fizik.
[20] Chebishev (Чебышев Пафнутий Львович, 1821-1894) – rus matematigi va mexanigi.
[21] Ferma (Fermat Pyer, 1601-1665) – fransuz matematigi va huquqshunosi.

uchta va hokazo, joylashtirilgan bo'lsin. Masalan, aylanalar bunday joylashuvining dastlabki to'rt qatori 1- shaklda tasvirlangan. Bu yerda qatorlardagi aylanalar sonlari ketma-ketligi birinchi tartibli figurali sonlarni tashkil qiladi. Bu tuzilmadan foydalanib ikkinchi tartibli figurali sonlarni quyidagicha hosil qilish mumkin. Dastlab 1- qatordagi aylanalar soni (1), keyin dastlabki ikkita qatordagi aylanalar soni (3), undan keyin dastlabki uchta qatordagi aylanalar soni (6), va hokazo. ■

"Kombinatorika" iborasi G. Leybnisning[22] "Kombinatorik san'at haqidagi mulohazalar" nomli asarida birinchi bor 1665 yilda keltirilgan. Bu asarda birlashmalar nazariyasi ilmiy jihatdan ilk bor asoslangan. O'rinlashtirishlarni o'rganish bilan birinchi bo'lib Yakob Bernulli shug'ullangan va bu haqdagi ma'lumotlarni 1713 yilda bosilib chiqqan "Ars conjectandi" (Bashorat qilish san'ati) nomli kitobining ikkinchi qismida bayon qilgan. Hozirgi vaqtda kombinatorikada qo'llanilayotgan belgilashlar XIX asrga kelib shakllandi.

Kombinatsiya – bu kombinatorikaning asosiy tushunchasidir. Bu tushuncha yordamida ixtiyoriy to'plamning qandaydir sondagi elementlaridan tashkil topgan tuzilmalar ifodalanadi. Kombinatorikada bunday tuzilmalarning **o'rin almashtirishlar**, **o'rinlashtirishlar** va **gruppalashlar** deb ataluvchi asosiy ko'rinishlari o'rganiladi.

Kombinatorikada ko'p qo'llaniladigan usul va qoidalar. Kombinatorika va graflar nazariyasida tasdiqlarni isbotlashning samarali usullaridan biri bo'lgan **matematik induksiya usuli** ko'p qo'llaniladi. Bu usulning ketma-ket bajariladigan ikkita qismi bo'lib, ular quyidagi umumiy g'oyaga asoslanadi.

Faraz qilaylik, isbotlanishi kerak bo'lgan tasdiq birorta xususiy $n=n_0$ qiymat (masalan, $n_0=1$) uchun to'g'ri bo'lsin (usulning bu qismi **baza** yoki **asos** deb ataladi). Agar bu tasdiqning istalgan $n=k>n_0$ uchun to'g'riligidan uning $n=k+1$ uchun to'g'riligi kelib chiqsa, u holda tasdiq istalgan natural $n\geq n_0$ son uchun to'g'ri bo'ladi (**induksion o'tish**).

2- m i s o l. Ixtiyoriy n natural son uchun

$$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

tenglikning o'rinli bo'lishini matematik induksiya usuli yordamida isbotlaymiz.

Baza: $n=1$ bo'lsin, u holda yuqoridagi tenglik to'g'ri ekanligi ravshan: $1^2=\frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot1+1)}{6}$.

Induksion o'tish: isbotlanish kerak bo'lgan tenglik $n=k>1$ uchun to'g'ri, ya'ni

$$1^2+2^2+...+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

tenglik o'rinli bo'lsin. Bu tenglikning chap va o'ng tomonlariga $(k+1)^2$ ifodani qo'shib, uni

$$1^2+2^2+...+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

ko'rinishda yozamiz. Oxirgi tenglikning o'ng tomonida quyidagicha o'zgartirishlarni bajaramiz:

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=(k+1)\left[\frac{k(2k+1)}{6}+(k+1)\right]=$$

$$=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+4k+3k+6)}{6}=$$

$$=\frac{(k+1)[2k(k+2)+3(k+2)]}{6}=\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}.$$

Demak,

---

[22] Leybnis (Leibniz Gotfrid Vilgelm, 1646-1716) –olmon faylasufi, matematigi, fizigi, kashfiyotchisi, huquqshunosi, tarixchisi va tilchisi.

$$1^2+2^2+...+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}.$$

Oxirgi munosabat isbotlanishi kerak bo‘lgan tenglikning $n=k+1$ bo‘lgan holidir. ■

Shuni ta’kidlash kerakki, biror tasdiqni isbotlash uchun matematik induksiya usuli qo‘llanilganda, bu usulning ikkala qismini ham tekshirib ko‘rish muhimdir, ya’ni baza va induksion o‘tish albatta tekshirilishi shart. Ulardan biri tekshirilmasa noto‘g‘ri natijalar hosil bo‘lishi ham mumkin. Bundan tashqari, baza birorta xususiy qiymatdan boshqa ko‘p, hattoki, juda ko‘p xususiy hollar uchun tekshirilib, ijobiy natija olinganda ham, bu hollarni umumlashtiruvchi natijaviy tasdiq noto‘g‘ri bo‘lib chiqishi mumkin. Bu mulohazalarning o‘rinli ekanligini quyida keltirilgan misollar ko‘rsatadi.

3- misol. “Ixtiyoriy n natural son uchun $2n-1$ son 2ga qoldiqsiz bo‘linadi” degan tasdiqni tekshirishda matematik induksiya usulining baza qismi talabini bajarmasdan faqat induksion o‘tishni tekshiramiz.

Bu tasdiq $n=k>1$ uchun to‘g‘ri bo‘lsin, ja’ni $2k-1$ son 2ga qoldiqsiz bo‘linsin deb faraz qilamiz. U holda $(2k-1)+2$ son ham, qo‘shiuvchilarining har biri 2ga qoldiqsiz bo‘linganligi sababli, 2ga qoldiqsiz bo‘linadi. Shuning uchun $(2k-1)+2=2(k+1)-1$ tenglik asosida $2(k+1)-1$ son 2ga qoldiqsiz bo‘linadi degan xulosa kelib chiqadi. Demak, yuqoridagi tasdiq $n=k+1$ uchun to‘g‘ri, ya’ni induksion o‘tish bajarildi deb hisoblash mumkin.

Shunday qilib, matematik induksiya usulining baza qismini tekshirmasdan “ixtiyoriy natural n son uchun $2n-1$ son 2ga qoldiqsiz bo‘linadi” degan xulosa qilish noto‘g‘ridir, chunki ixtiyoriy n natural son uchun $2n-1$ sonni 2ga bo‘lganda 1 qoldiq qoladi. ■

4- misol. “Ixtiyoriy n natural son uchun n^2+n+17 ifodaning qiymati tub sondir” degan tasdiqni tekshirish maqsadida matematik induksiya usulining faqat baza qismi talabini dastlabki 15ta natural sonlar uchun bajaramiz.

$n=1$ bo‘lganda $n^2+n+17=1^2+1+17=19$ tub son hosil bo‘ladi. $n=\overline{2,15}$ bo‘lganda ham n^2+n+17 ifodaning qiymati sifatida 23, 29, 37, 47, 59, 73, 89, 107, 127, 149, 173, 199, 227 va 257 tub sonlarni hosil qilamiz.

Induksion o‘tishni tekshirmasdan “ixtiyoriy natural n son uchun n^2+n+17 ifodaning qiymati tub sondir” degan xulosa qilish noto‘g‘ridir, chunki, masalan, agar $n=16$ bo‘lsa, u holda bu ifodaning qiymati murakkab sondir: $n^2+n+17=16^2+16+17=289=17\cdot17$. ■

5- misol. Biror n natural son uchun $991n^2+1$ son butun sonning kvadrati bo‘ladimi? Bu savolga javob berish uchun, n ning dastlabki o‘n, yuz, ming, million, milliard, hattoki, trillionta qiymatlari uchun $991n^2+1$ ifoda tekshirilganda, uning qiymatlaridan birortasi ham butun son kvadrati bo‘lmasligi qayd etilgan. Shunday bo‘lishiga qaramasdan bu tasdiq asosida, induksion o‘tishni bajarmasdan, “ixtiyoriy natural n son uchun $991n^2+1$ ifodaning qiymati butun sonning kvadrati bo‘lmaydi” degan xulosa qilish mumkin emas. $991n^2+1$ ifodaning qiymati butun sonning kvadrati bo‘ladigan n natural sonning borligi va bunday sonning eng kichigini o‘nli sanoq sistemasida yozganda 29ta (!) raqam bilan ifodalanishi komp’yuter yordamida aniqlangan ([34]ga qarang). ■

Matematik induksiya usulining tadbiqiga yana bir misol sifatida quyidagi teoremani isbotlaymiz.

1- teorema. *Ixtiyoriy chekli A to‘plam uchun $|2^A|=2^{|A|}$ tenglik o‘rinlidir*[4](331bet).

Isboti. Matematik induksiya usulini berilgan to‘plamning quvvati bo‘yicha qo‘llaymiz.

Baza. Dastlab A to‘plamning elementlari soni nolga teng, ya’ni $|A|=0$ bo‘lganda teoremaning tasdig‘i bajarilishini ko‘rsatamiz. $A_0=\varnothing$ bo‘lsin. U holda $A=A_0$ uchun

$|A|=0$, $2^A=2^{\varnothing}=\{\varnothing\}$ va $|2^{\varnothing}|=|\{\varnothing\}|=1=2^0=2^{|\varnothing|}$ bo‘ladi. Demak, teoremaning tasdig‘i $|A|=0$ bo‘lgan hol uchun to‘g‘ridir.

Induksion o‘tish. Chekli k elementli ixtiyoriy A_k to‘plam uchun teoremaning tasdig‘i to‘g‘ri bo‘lsin, ya’ni $A=A_k$ bo‘lganda $|2^A|=2^{|A|}$ tenglik bajarilsin. $k+1$ elementli A_{k+1} to‘plamni qaraymiz. Ravshanki, $A=A_{k+1}$ uchun $|A|=k+1$ bo‘ladi. Qaralayotgan A to‘plamning ixtiyoriy a elementi uchun 2^A bulean to‘plamni o‘zaro kesishmaydigan ikkita $B_a^-=\{X \mid X\subset 2^A, a\notin X\}$ va $B_a^+=\{X \mid X\subset 2^A, a\in X\}$ to‘plamlar birlashmasi sifatida yozish mumkin. Demak, $|2^A|=|B_a^-|+|B_a^+|$.

Tuzilishiga ko‘ra, B_a^- to‘plam k elementli to‘plamning buleanidan iborat. Shuning uchun, induksion o‘tish faraziga ko‘ra $|B_a^-|=2^k$ bo‘ladi. B_a^+ to‘plam esa B_a^- to‘plamning har bir element-to‘plamiga a elementni kiritish yordamida hosil qilingan. Bundan $|B_a^+|=|B_a^-|=2^k$ kelib chiqadi. Demak, $|A|=k+1$ bo‘lgan hol uchun

$$|2^A|=|B_a^-|+|B_a^+|=2^k+2^k=2\cdot 2^k=2^{k+1}=2^{|A|}. \blacksquare$$

Ushbu bobning 3- paragrafida 1- teoremaning kombinatorik tushunchalarga asoslangan boshqa isboti keltiriladi.

Berilgan chekli A to‘plamning buleani uning barcha qism to‘lamlaridan tuzilgan toplam bo‘lgani sababli 1- teoremada isbotlangan $|2^A|=2^{|A|}$ tenglik A to‘plamning buleanini 2^A ko‘rinishda belgilashga asos bo‘la oladi.

Kombinatorikada sodda, o‘z-o‘zidan ravshan bo‘lgan, ammo muhim qoidalar bor. Bunday qoidalar sifatida qo‘shish, ko‘paytirish hamda kiritish va chiqarish qoidalari deb ataluvchi qoidalarni ko‘rsatish mumkin.

m ta elementli A to‘plam va n ta elementli B to‘plamlar berilgan bo‘lib, ular kesishmasin. **Qo‘shish qoidasiga** ko‘ra, A yoki B to‘plamga tegishli bo‘ladigan birorta elementni tanlash imkoniyatlari soni ($m+n$)ga tengdir. **“Yoki” qoidasi** deb ham ataluvchi bu qoida mazmunini quyidagi teorema orqali ham ifodalash mumkin.

2- teorema. *Agar ixtiyoriy chekli A va B to‘plamlar uchun $A\cap B=\varnothing$ bo‘lsa, u holda $|A\cup B|=|A|+|B|$ bo‘ladi.*

Isboti o‘quvchiga havola qilinadi. ■

Demak, qo‘shish qoidasiga ko‘ra, kesishmaydigan ikkita to‘plam birlashmasining quvvati shu to‘plamlar quvvatlarining yig‘indisiga tengdir.

Ko‘paytirish qoidasiga asosan, m ta elementli A va n ta elementli B to‘plamlarning elementlaridan tuzish mumkin bo‘lgan barcha $<a,b>$ ($a\in A$, $b\in B$) kortejlar (juftliklar) soni mn ga teng. Bu qoida **“va” qoidasi** deb ham ataladi. Uni quyidagi teorema ko‘rinishda ifodalash ham mumkin.

3- teorema. *Ixtiyoriy chekli A va B to‘plamlar uchun $|A\times B|=|A|\cdot|B|$ tenglik o‘rinlidir.*

Isboti o‘quvchiga havola qilinadi. ■

Demak, ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra, ixtiyoriy ikkita chekli to‘plam Dekart ko‘paytmasining quvvati shu to‘plamlar quvvatlarining ko‘paytmasiga tengdir.

Umumiy holda, agar chekli A va B to‘plamlar hech bo‘lmaganda bitta umumiy elementga ega bo‘lsa, u holda $|A|+|B|$ yigindining qiymatini aniqlashda $A\cup B$ to‘plamning ba’zi elementlarini, aniqrog‘i, $A\cap B$ to‘plamning elementlarini ikki marta hisobga olishga to‘g‘ri keladi. Bu mulohaza asosida quyidagi tasdiqqa kelamiz.

4- teorema. *Ixtiyoriy chekli A va B to‘plamlar uchun $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$ tenglik o‘rinlidir.*

Isboti. Osonlik bilan ko'rish mumkinki:

a) $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ va $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$;

b) $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ va $(A \cap B) \cap (B \setminus A) = \varnothing$.

Bu munosabatlarga 2- teoremani qo'llasak, mos ravishda $|A \cup B| = |A| + |B \setminus A|$ va $|B| = |A \cap B| + |B \setminus A|$ tengliklarni hosil qilamiz. Bu tengliklardan isbotlanishi kerak bo'lgan tenglikni hosil qilish qiyin emas. ■

4- teoremaning tasdig'ini umumiy holda ikkita chekli to'plamlar birlashmasining quvvatini hisoblash qoidasi deyish mumkin. Bu qoidaning ma'nosidan kelib chiqqan holda, uni **kiritish va chiqarish qoidasi** deb atash qabul qilingan.

Ravshanki, 4- teoremada keltirilgan tenglikdan foydalanib $|A|$, $|B|$, $|A \cup B|$ va $|A \cap B|$ miqdorlarning ixtiyoriy uchtasi ma'lum bo'lganda to'rtinchisini hisoblash formulasini hosil qilish mumkin.

Yuqorida bayon qilingan ikkita to'plam uchun qo'shish, ko'paytirish hamda kiritish va chiqarish qoidalarini chekli sondagi istalgan chekli to'plamlar uchun umumlashtirish mumkin.

Avvalo, kiritish va chiqarish qoidasining umumlasmasi sifatida quyidagi teoremani keltiramiz.

5-teorema (umumlashgan kiritish va chiqarish qoidasi). *Ixtiyoriy chekli $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ to'plamlar uchun*

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + \ldots + |A_n| -$$
$$- |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \ldots - |A_{n-1} \cap A_n| +$$
$$+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \ldots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| -$$
$$- \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

munosabat o'rinlidir.

Isboti. Teoremani isbotlash uchun matematik induksiya usulini qo'llaymiz. $k = 1$ bo'lgan hol uchun teoremaning tasdig'i trivialdir.

Induksiya usulining bazasi sifatida $k = 2$ bo'lgan holni qaraymiz. Bu holda teoremaning tasdig'i 3- teoremaga asosan to'g'ri.

Induksion o'tish: teoremaning tasdig'i $n = k$ uchun to'g'ri, ya'ni

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_k| -$$
$$- |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \ldots - |A_{k-1} \cap A_k| +$$
$$+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \ldots + |A_{k-2} \cap A_{k-1} \cap A_k| -$$
$$- \ldots + (-1)^{k-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k|$$

tenglik o'rinli bo'lsin. Tasdiqning $n = k + 1$ bo'lgan holda to'g'ri ekanligini ko'rsatamiz. Avvalo, $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k, A_{k+1}$ to'plamlarning $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_k \cup A_{k+1}$ birlashmasini $(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_k) \cup A_{k+1}$ ko'rinishda ifodalaymiz. So'ngra 3- teoremani va kesishmaga nisbatan umumlashgan distributivlik qonunini qo'llab hamda teorema tasdig'ining $n = k$ uchun to'g'riligini hisobga olib, quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$|(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_k) \cup A_{k+1}| = |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_k| +$$
$$+ |A_{k+1}| - |(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_k) \cap A_{k+1}| =$$
$$= |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_k| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \ldots - |A_{k-1} \cap A_k| +$$

$$+|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + ... + |A_{k-2} \cap A_{k-1} \cap A_k| -$$
$$- ... + (-1)^{k-1}|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k| + |A_{k+1}| -$$
$$-|(A_1 \cap A_{k+1}) \cup (A_2 \cap A_{k+1}) \cup (A_3 \cap A_{k+1}) \cup ... \cup (A_k \cap A_{k+1})|.$$

Bu ifodadagi oxirgi ayriluvchi $A_i \cap A_{k+1}$ ($i = 1,2,3,...,k$) ko'rinishdagi k ta to'plamlar birlashmasining quvvatini ifodalaydi. Shuning uchun, induksiya faraziga ko'ra, bu ayriluvchini quyidagicha yozish mumkin:

$$|(A_1 \cap A_{k+1}) \cup (A_2 \cap A_{k+1}) \cup (A_3 \cap A_{k+1}) \cup ... \cup (A_k \cap A_{k+1})| =$$
$$|A_1 \cap A_{k+1}| + |A_2 \cap A_{k+1}| + |A_3 \cap A_{k+1}| + ... + |A_k \cap A_{k+1}| -$$
$$-|(A_1 \cap A_{k+1}) \cap (A_2 \cap A_{k+1})| - |(A_1 \cap A_{k+1}) \cap (A_3 \cap A_{k+1})| -$$
$$- ... - |(A_{k-1} \cap A_{k+1}) \cap (A_k \cap A_{k+1})| +$$
$$+|(A_1 \cap A_{k+1}) \cap (A_2 \cap A_{k+1}) \cap (A_3 \cap A_{k+1})| +$$
$$+|(A_1 \cap A_{k+1}) \cap (A_2 \cap A_{k+1}) \cap (A_4 \cap A_{k+1})| + ... +$$
$$+|(A_{k-2} \cap A_{k+1}) \cap (A_{k-1} \cap A_{k+1}) \cap (A_k \cap A_{k+1})| -$$
$$- ... + (-1)^{k-1}|(A_1 \cap A_{k+1}) \cap (A_2 \cap A_{k+1}) \cap ... \cap (A_k \cap A_{k+1})| =$$
$$= |A_1 \cap A_{k+1}| + |A_2 \cap A_{k+1}| + |A_3 \cap A_{k+1}| + ... + |A_k \cap A_{k+1}| -$$
$$-|A_1 \cap A_2 \cap A_{k+1}| - |A_1 \cap A_3 \cap A_{k+1}| - ... - |A_1 \cap A_k \cap A_{k+1}| +$$
$$+|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_{k+1}| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_{k+1}| + ... +$$
$$+|A_1 \cap A_2 \cap A_k \cap A_{k+1}| + ... + (-1)^{k-1}|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k \cap A_{k+1}|.$$

Bu ifodani o'z o'rniga qo'yib

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_k \cup A_{k+1}| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + ... + |A_k| + |A_{k+1}| -$$
$$-|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - ... - |A_k \cap A_{k+1}| +$$
$$+|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + ... + |A_{k-1} \cap A_k \cap A_{k+1}| -$$
$$- ... + (-1)^k|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k \cap A_{k+1}|$$

tenglikni hosil qilamiz. ■

6- t e o r e m a (umumlashgan qo'shish qoidasi). *Juft-jufti bilan kesishmaydigan ixtiyoriy chekli $A_1, A_2, ..., A_n$ to'plamlar uchun*

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + ... + |A_n|$$

tenglik o'rinlidir.

I s b o t i. Teorema shartiga ko'ra barcha $i, j = \overline{1,n}$, $i \neq j$, indekslar uchun $A_i \cap A_j = \varnothing$ bo'lgani sababli 5- teorema asosida kerakli tenglikni hosil qilamiz. ■

7- t e o r e m a . *Ixtiyoriy chekli $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ to'plamlar uchun*

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_n| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + ... + |A_n| -$$

$$-|A_1 \cup A_2| - |A_1 \cup A_3| - \ldots - |A_{n-1} \cup A_n| +$$

$$+|A_1 \cup A_2 \cup A_3| + |A_1 \cup A_2 \cup A_4| + \ldots + |A_{n-2} \cup A_{n-1} \cup A_n| -$$

$$- \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|.$$

munosabat o'rinlidir.

Isboti o'quvchiga havola qilinadi. ■

8- teorema (umumlashgan ko'paytirish qoidasi). *Elementlari soni mos ravishda $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ bo'lgan $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$ to'plamlardan faqat bittadan element olib tuzilgan k uzunlikka ega kortejlar soni $n_1 n_2 n_3 \ldots n_k$ ga tengdir.*

Isboti. Teoremani isbotlash uchun matematik induksiya usulini qo'llaymiz. $k=1$ bo'lgan hol uchun teoremaning tasdig'i trivialdir.

Induksiya usulining bazasi sifatida $k=2$ bo'lgan holni qaraymiz. Bu holda teoremaning tasdig'i yuqorida keltirilgan ikkita to'plam uchun ko'paytirish qoidasidan kelib chiqadi.

Induksion o'tish: teoremaning tasdig'i $k=s$ $(s=\overline{1,k-1})$ uchun to'g'ri bo'lsin, ya'ni, $A_1, A_2, \ldots, A_s$ to'plamlardan faqat bittadan element olib tuzilgan s uzunlikdagi kortejlar soni $n_1 n_2 \ldots n_s$ bo'lsin deb faraz qilamiz. Teorema tasdig'ining $k=s+1$ uchun ham to'g'ri ekanligini ko'rsatamiz.

$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{s+1}$ to'plamlardan faqat bittadan element olib uzunligi $(s+1)$ga teng bo'lgan kortejlar sonini aniqlash uchun turlicha usullardan foydalanish mumkin. Bu yerda quyidagi usul bilan kerakli natijani olsa bo'ladi. Dastlab uzunligi birga teng bo'lgan kortejlarni tuzamiz. Uzunligi birga teng bo'lgan kortejlar berilgan to'plamlarning ixtiyoriy biridan faqat bitta elementni tanlash yordamida tuzilishi ravshan. Tabiiyki, agar uzunligi birga teng kortejlar $A_1 = \{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n_1}\}$ to'plamning elementlaridan tuzilsa, bunday kortejlar soni n_1 ga tengdir.

Uzunligi birga teng kortejlardan ixtiyoriy birini, masalan, a_{11}ni olib, uning o'ng tomoniga A_1 to'plamdan boshqa biror to'plamning, masalan, $A_2 = \{a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n_2}\}$ to'plamning elementlaridan birini joylashtirib, birinchi koordinatasi a_{11} bo'lgan uzunligi ikkiga teng n_2 ta kortejlar hosil qilamiz. Uzunligi birga teng kortej sifatida n_1 ta kortejlardan ixtiyoriy birini olish mumkinligini hisobga olib, hammasi bo'lib uzunligi ikkiga teng $n_1 n_2$ ta kortejlarga ega bo'lamiz.

Uzunligi ikkiga teng kortejlarning har biriga o'ng tomondan A_1 va A_2 to'plamlardan boshqa biror to'plamning, masalan, $A_3 = \{a_{31}, a_{32}, \ldots, a_{3n_3}\}$ to'plamning n_3 ta elementlaridan birini joylashtirib, uzunligi uchga teng n_3 ta kortejlar hosil qilamiz. Bu yerda uzunligi ikkiga teng kortej sifatida $n_1 n_2$ ta kortejlardan ixtiyoriy birini olish mumkinligini e'tiborga olib, uzunligi uchga teng $n_1 n_2 n_3$ ta kortejlarni hosil qilamiz.

Kortejlar hosil qilish jarayonini yuqoridagiga o'xshash mulohazalar bilan davom ettirib, bu kortejlarning har biriga o'ng tomondan $A_1, A_2, \ldots, A_s$ to'plamlardan boshqa $A_{s+1} = \{a_{(s+1)1}, a_{(s+1)2}, \ldots, a_{(s+1)n_s}\}$ to'plamning n_{s+1} ta elementlaridan birini joylashtirib, uzunligi $(s+1)$ ga teng bo'lgan n_{s+1} ta kortejlar hosil qilamiz. Bu yerda ham uzunligi s ga teng kortej sifatida $n_1 n_2 \ldots n_s$ ta kortejlardan ixtiyoriy birini olish mumkinligini e'tiborga olamiz. Shunday qilib, $n_1 n_2 \ldots n_s$ marta n_{s+1} ta kortej hosil bo'ldi. Demak, uzunligi $(s+1)$ ga teng bo'lgan kortejlar $n_1 n_2 \ldots n_s n_{s+1}$ tadir. ■

Berilgan n ta elementdan m tadan gruppalashlar soni C_n^m uchun bir necha qatorlarni 1- jadvaldagidek yozamiz:

1- jadval

n	Gruppalashlar soni C_n^m $(m=\overline{0,n})$
1	$C_1^0=1$, $C_1^1=1$
2	$C_2^0=1$, $C_2^1=2$, $C_2^2=1$
3	$C_3^0=1$, $C_3^1=3$, $C_3^2=3$, $C_3^3=1$
4	$C_4^0=1$, $C_4^1=4$, $C_4^2=6$, $C_4^3=4$, $C_4^4=1$
5	$C_5^0=1$, $C_5^1=5$, $C_5^2=10$, $C_5^3=10$, $C_5^4=5$, $C_4^4=1$
...	....

Bu jadvalda gruppalashlar sonining quyidagi xossalarini kuzatish mumkin:

- har bir qatorning chetlarida birlar joylashgan (bu tasdiq $C_n^0=C_n^n=1$ formula bilan ifodalanadi, ushbu bobning 2- paragrafiga qarang);
- har bir qatordagi C_n^m sonlar qatorning teng o'rtasiga nisbatan simmetrik joylashgan, ya'ni qatorning boshidan va oxiridan baravar uzoqlikda turgan sonlar o'zaro teng ($C_n^m=C_n^{n-m}$);
- ikkinchi qatordan boshlab har bir qatordagi birlardan tashqari ixtiyoriy son bu qatordan yuqorida joylashgan qatordagi biri shu son ustida, ikkinchisi esa undan chapda joylashgan ikkita gruppalashlar sonining yig'indisiga teng ($C_{n+1}^{m+1}=C_n^m+C_n^{m+1}$);
- har bir qatordagi C_n^m sonlar shu qator teng o'rtasigacha o'sib, so'ng kamayadi (3.3 band, 5- xossaga qarang).

Ta'rif sifatida $C_0^0=1$ deb qabul qilinsa va bu son yuqoridagi jadvalning $n=1$ raqamli qatoridan oldin $n=0$ raqamli qatori sifatida joylashtirilsa, uchburchak figurasiga o'xshash 1-shakldagi sonlar jadvalini hosil qilish mumkin.

1- shakldagi sonlar jadvali **Paskal uchburchagi** deb ataladi. Bu jadval **arifmetik uchburchak** nomi bilan ham yuritiladi. Uning Paskal nomi bilan atalishiga qaramasdan, bunday sonlar jadvali juda qadimdan dunyoning turli mintaqalarida, jumladan, sharq mamlakatlarida ham ma'lum bo'lgan. Masalan, Erondagi Tus shahrida (hozirgi Mashhadda) yashab ijod qilgan Nosir at-Tusiy[23] XIII asrda bu jadvaldan foydalanib, berilgan ikkita son yig'indisining natural darajasini hisoblash usulini o'zining ilmiy ishlarida keltirgan bo'lsa, g'arbda Al-Kashi nomi bilan mashhur Samarqandlik olim Ali Qushchi[24] butun sonning istalgan natural ko'rsatkichli arifmetik ildizi qiymatini taqribiy hisoblashda bu jadvaldan foydalana bilganligi haqida ma'lumotlar bor. Keyinchalik G'arbiy Yevropada bu sonlar uchburchagi haqida M. Shtifel[25] arifmetika bo'yicha qo'llanmalarida yozgan va u ham butun sondan istalgan natural ko'rsatkichli arifmetik ildizning taqribiy

$$
\begin{array}{c}
1\\
1\quad 1\\
1\quad 2\quad 1\\
1\quad 3\quad 3\quad 1\\
1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1\\
1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1\\
1\quad 6\quad 15\quad 20\quad 15\quad 6\quad 1\\
1\quad 7\quad 21\quad 35\quad 35\quad 21\quad 7\quad 1\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}
$$

1- shakl

[23] At-Tusiy (Nosir ad-Din-Muhammad ibn Muhammad ibn-al-Hasan, 1201-1274) – Eron astronomi va matematigi.

[24] Ali Qushchi (Jamshid ibn Ma'sud, tug'ilgan yili noma'lum–taxminan 1436 yoki 1437 yilda vafot etgan) – o'zbek matematigi va astronomi, 1420-30 yillarda Samarqandda Mirzo Ulug'bek observatoriyasida ishlagan.

[25] Shtifel Mixel (Michel, 1487-1567) – olmon matematigi.

qiymatini hisoblashda bu uchburchakdan foydalana bilgan. 1556 yilda bu sonlar jadvali bilan N. Tartalya[26], keyinroq logarifmik lineyka ijodkori U. Otred[27] (1631 yil) ham shug'ullanganlar. 1654 yilga kelib B. Paskal o'zining "Arifmetik uchburchak haqidagi traktat" nomli asarida bu sonlar jadvali haqidagi ma'lumotlarni e'lon qildi.

Paskal uchburchagidagi qatorlar istalgancha davom ettirilishi mumkin. Shunisi qiziqki, Paskal uchburchagi yordamida istalgan n ta elementdan m tadan gruppalashlar sonini faqat qo'shish amali yordamida hosil qilish mumkin (ushbu bobning 2- paragrafdagi C_n^m sonni hisoblash $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, $C_n^m = \frac{n(n-1)...(m+1)}{1\cdot 2\cdot ...(n-m)}$ va $C_n^m = \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot m}$ formulalariga qarang). Bu amal $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$ formulaga asoslanadi.

Paskal uchburchagi ko'plab ajoyib xossalarga ega. B. Paskal yuqorida zikr etilgan traktatda: "Bu xossalarning haqiqatdan ham bitmas-tuganmasligi naqadar ajoyibdir" deb yozgan edi. Ushbu paragrafning 3.3 bandida Paskal uchburchagining ba'zi xossalari keltirilgan.

Nazorat uchun savollar:

1. Kombinatorika predmeti nima?
2. Kombinatorika sohasida ilmiy tadqiqotlar olib borgan qaysi olimlarni bilasiz?
3. Kombinatorika matematikaning alohida ilmiy yo'nalishi sifatida qachon shakllandi?
4. Figurali sonlar deganda nimani tushunasiz?
5. "Kombinatorika" iborasi kim tomonidan qachon kiritilgan?
6. Matematik induksiya usulidan foydalanib tasdiq qanday isbotlanadi?
7. Qo'shish va ko'paytirish qoidalari qanday ifodalanadi?
8. Umumlashgan qo'shish va ko'paytirish qoidalarini bilasizmi?
9. Paskal uchburchagi deganda nimani tushunasiz?
10. Paskal uchburchagining qanday xossalarini bilasiz?
11. B. Paskalgacha Paskal uchburchagidan foydalangan sharq va g'arb olimlaridan kimlarni bilasiz?

Adabiyotlar:

1. Mendelson E. Introduction to mathematical logic. Sixth edition. New York.Taylor&Francis Group,2015
2. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012.
3. H.T. To'rayev, I. Azizov Matematik mantiq va diskret matematika. 1,2 jild. "Tafakkur-Bo'stoni", Toshkent, 2011y.
4. Anderson D.A.Diskretnaya matematika I kombinatorika. M."Vilyams",2004g.-960s.ISBN5-8459-0498-6

12- ma'ruza: Binomial koeffisiyentlar va ularga oid ayniyatlar.

Reja:

1. Nyuton binomi haqida umumiy ma'lumotlar.
2. Binomial koeffitsientlar.
3. Binomial koeffitsientlarning xossalari.

**Kalit so`zlar:** binom, binomila koeffitsient qo`shish va ko`paytirish qoidalari.

[26] Tartalya Nikkolo (Tartalia Nic-colo, 1499 yil atrofida tug'ilgan-1557) – italyan matematigi va mexanigi.
[27] Otred Uilyam (Outred William, 1574-1660) – ingliz matematigi.

O‘rta maktab matematikasi kursidan quyidagi ikkita qisqa ko‘paytirish formulalarini eslaylik:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ – yig‘indining kvadrati;

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ – yig‘indining kubi.

Yig‘indining navbatdagi ikkita, ya’ni 4- va 5- darajalarini hisoblaymiz:

$$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)^3 = (a+b)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) =$$

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

$$(a+b)^5 = (a+b)(a+b)^4 =$$

$$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Shunday qilib, **yig‘indining bikvadrati** (ya’ni to‘rtinchi darajasi)

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

va yig‘indining beshinchi darajasi

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

formulalariga ega bo‘lamiz.

Yuqorida keltirilgan yig‘indining kvadrati, kubi, bikvadrati va beshinchi darajasi formulalari o‘ng tomonlaridagi ko‘phad koeffitsientlari Paskal uchburchagining mos qatorlaridagi C_n^m ($n = 2,3,4,5$) sonlar ekanligini payqash qiyin emas.

1- teorema. *Barcha haqiqiy a va b hamda natural n sonlar uchun*

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

formula o‘rinlidir.

Isboti. Matematik induksiya usulini qo‘llaymiz.

Baza: $n=1$ bo‘lganda formula to‘g‘ri: $(a+b)^1 = a+b$.

Induksion o‘tish: isbotlanishi kerak bo‘lgan formula $n=k$ uchun to‘g‘ri bo‘lsin, ya’ni

$$(a+b)^k = a^k + C_k^1 a^{k-1}b + C_k^2 a^{k-2}b^2 + \ldots + C_k^{k-1}ab^{k-1} + b^k.$$

Formula $n=k+1$ bo‘lganda ham to‘g‘ri ekanligini isbotlaymiz. Haqiqatdan ham, $C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$ formuladan foydalanib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k =$$

$$= (a+b)(a^k + C_k^1 a^{k-1}b + C_k^2 a^{k-2}b^2 + \ldots + C_k^{k-1}ab^{k-1} + b^k) =$$

$$= a^{k+1} + C_k^1 a^k b + C_k^2 a^{k-1}b^2 + \ldots + C_k^k ab^k +$$

$$+ C_k^0 a^k b + C_k^1 a^{k-1}b^2 + \ldots + C_k^{k-1}ab^k + b^{k+1} =$$

$$= a^{k+1} + (C_k^0 + C_k^1)a^k b + (C_k^1 + C_k^2)a^{k-1}b^2 + \ldots$$

$$\ldots + (C_k^{k-1} + C_k^k)ab^k + b^{k+1} =$$

$$= a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b + C_{k+1}^2 a^{k-1}b^2 + \ldots + C_{k+1}^k ab^k + b^{k+1}. \blacksquare$$

Ixtiyoriy a va b haqiqiy sonlar hamda n natural son uchun $(a+b)^n$ ifodaning ko‘phad shaklidagi yoyilmasi (tasvirlanishi) **Nyuton**[28] **binomi** deb ataladi. Umuman olganda, “Nyuton binomi” iborasiga tanqidiy nuqtai nazardan yondoshilsa, undagi ikkala so‘zga nisbatan ham shubha tug‘iladi: birinchidan, $(a+b)^n$ ifoda birdan katta natural n sonlar uchun

[28] Isaak Nyuton (Newton, 1643-1727) –ingliz fizigi, mexanigi va matematigi.

binom (ya'ni ikkihad) emas; ikkinchidan, natural sonlar uchun bu ifodaning yoyilmasi Nyutongacha ma'lum edi[29].

Greklar $(a+b)^n$ ifodaning qatorga yoyilmasini n ning faqat $n=2$ bo'lgan holida (ya'ni, yig'indi kvadratining formulasini) bilar edilar. Umar Hayyom[30] va Ali Qushchi $(a+b)^n$ ifodani $n>2$ bo'lgan natural sonlar uchun ham qatorga yoya bilganlar. Nyuton esa 1767 yilda yoyilma formulasini isbotsiz manfiy va kasr n sonlar uchun ham qo'llagan. L. Eyler 1774 yilda Nyuton binomi formulasini kasr n sonlar uchun isbotladi, K. Makloren[31] esa bu formulani darajaning ratsional ko'rsatkichlari uchun qo'lladi. Nihoyat, 1825 yilda N. Abel[32] daraja ko'rsatkichining istalgan kompleks qiymatlari uchun binom haqidagi teoremani isbotladi.

C_n^m sonlarni **binomial koeffitsientlar** deb ham atashadi. Bunday ta'rif bu koefitsientlarning Nyuton binomi formulasida tutgan o'rniga qarab berilgan bo'lib, C_n^m son

$$(a+b)^n=\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^{n-m}b^m$$

yoyilmadagi $a^{n-m}b^m$ ifodaning koeffitsientidir.

2- teorema. *Barcha haqiqiy a va b hamda natural n sonlar uchun*

$$(a-b)^n=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_n^m a^{n-m}b^m$$

formula o'rinlidir.

Isboti. Nyuton binomi formulasida b ni $(-b)$ga almashtirsak kerakli formulani hosil qilamiz. ■

1- misol. Oxirgi formuladan xususiy holda quyidagi qisqa ko'paytirish formulalari kelib chiqadi:

$n=2$ bo'lganda ayirmaning kvadrati formulasi

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2;$$

$n=3$ bo'lganda ayirmaning kubi formulasi

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3. \ ■$$

Nyuton binomi formulasini kombinatorik amallar yordamida ham hosil qilish mumkin.

Haqiqatdan ham, ixtiyoriy $a,b_1,b_2,...,b_n$ sonlar uchun $(a+b_1)(a+b_2)...(a+b_n)$ ifodani

$$(a+b_1)(a+b_2)...(a+b_n)=a^n+a^{n-1}(b_1+b_2+...+b_n)+$$
$$+a^{n-2}(b_1b_2+b_1b_3+...+b_{n-1}b_n)+$$
$$+a^{n-3}(b_1b_2b_3+...+b_{n-2}b_{n-1}b_n)+...+b_1b_2...b_n.$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu tenglikning o'ng tomonida joylashgan a^n oldidagi koeffitsient birga ($1=C_n^0$) teng. Birinchi qavslar ichidagi qo'shiluvchilar soni n ga ($n=C_n^1$) tengligi yaqqol ko'rinib turibdi. Ikkinchi qavslar ichidagi qo'shiluvchilar $b_1,b_2,...,b_n$ (n ta) elementlardan ikkitadan ko'paytmalar (soni C_n^2 ga teng gruppalashlar) ekanligini ham payqash qiyin emas. Uchinchi qavslar ichidagi qo'shiluvchilar esa o'sha n ta elementlardan uchtadan ko'paytmalar bo'lib, ularning soni C_n^3 ga teng va hokazo. Oxirgi qo'shiluvchi oldidagi koeffitsient birga ($1=C_n^n$) teng. Yuqoridagi tenglikda

---

[29] Ushbu paragrafning 3.1 bandidagi xronologik ma'lumotlarga qarang.

[30] Umar Hayyom G'iyosiddin Abul-Fatx ibn Ibrohim (عمر خيام, 1048 yil atrofida tug'ilgan-1122 yildan so'ng vafot etgan) – fors va tojik shoiri, matematigi va faylasufi.

[31] Makloren Kolin (Maclaurin Colin, 1698-1746) – Shotlandiya matematigi.

[32] Abel Nils Xenrik (Niels Henric, 1802-1829) – Norvegiya matematigi.

$b_1 = b_2 = ... = b_n = b$ deb olsak, Nyuton binomi formulasini hosil qilamiz.

Binomial koeffitsientlarning xossalari. Binomial koeffitsientlarning ba'zi xossalarini keltiramiz. Bu xossalar bevosita gruppalashlarga oid bo'lib, tabiiyki, ular Paskal uchburchagining xossalarini ham ifodalaydi.

1-xossa. $\frac{C_n^{m+1}}{C_n^m} = \frac{n-m}{m+1}$ *($m = 0,1,2,...,n-1$) tenglik o'rinlidir.*

Haqiqatdan ham,

$$\frac{C_n^{m+1}}{C_n^m} = \frac{\dfrac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!}}{\dfrac{n!}{m!(n-m)!}} = \frac{m!(n-m)!}{(m+1)!(n-m-1)!} =$$

$$= \frac{m!(n-m-1)!(n-m)}{m!(m+1)(n-m-1)!} = \frac{n-m}{m+1}. \blacksquare$$

Bu xossa binomial koeffitsientlar qatoridagi istalgan ketma-ket ikki elementning biri ma'lum bo'lsa, boshqasini osonlik bilan hisoblash mumkinligini ko'rsatadi:

$$C_n^{m+1} = \frac{n-m}{m+1} C_n^m, C_n^m = \frac{m+1}{n-m} C_n^{m+1},$$

bu yerda $m = 0,1,2,...,n-1$.

2-xossa. *Ixtiyoriy natural n son uchun barcha C_n^m ($m = \overline{0,n}$) binomial koeffitsientlar yig'indisi 2^n ga teng, ya'ni*

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

Bu tenglik Nyuton binomi formulasida $a = b = 1$ deb olganda hosil bo'ladi. $\blacksquare$

3-xossa. *Toq o'rinlarda turgan binomial koeffitsientlar yig'indisi juft o'rinlarda turgan binomial koeffitsientlar yig'indisiga teng.*

Haqiqatdan ham, Nyuton binomi formulasida $a = 1$ va $b = -1$ deb olganda

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + ... + (-1)^n C_n^n$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikdan xossadagi tasdiqning to'g'riligi kelib chiqadi. $\blacksquare$

2- va 3- xossalar asosida quyidagi xossani hosil qilamiz.

4-xossa. *n natural sondan oshmaydigan eng katta toq m son uchun $C_n^1 + C_n^3 + ... + C_n^m = 2^{n-1}$ tenglik hamda n sondan oshmaydigan eng katta juft m son uchun $C_n^0 + C_n^2 + ... + C_n^m = 2^{n-1}$ tenglik o'rinlidir.*

5-xossa. *Toq n son uchun*

$$C_n^0 < C_n^1 < ... < C_n^{\frac{n-1}{2}} = C_n^{\frac{n-1}{2}+1}, \quad C_n^{\frac{n-1}{2}+1} > C_n^{\frac{n-1}{2}+2} > ... > C_n^n,$$

juft n son uchun esa

$$C_n^0 < C_n^1 < ... < C_n^{\frac{n}{2}}, C_n^{\frac{n}{2}} > C_n^{\frac{n}{2}+1} > ... > C_n^n,$$

munosabatlar o'rinlidir.

Haqiqatdan ham, $m < \frac{n-1}{2}$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy natural n va m sonlar uchun $\frac{n-m}{m+1} > 1$ tengsizlik o'rinlidir, $m > \frac{n-1}{2}$ bo'lganda esa $\frac{n-m}{m+1} < 1$ tengsizlikka ega bo'lamiz. Bu yerda $C_n^{m+1} = \frac{n-m}{m+1} C_n^m$ formulani (1- xossaga qarang) qo'llab, xossadagi barcha tengsizliklarni hosil qilamiz.

Agar n toq son bo‘lsa, $m = \frac{n-1}{2}$ butun son bo‘lib, $\frac{n-m}{m+1} = \frac{n - \frac{n-1}{2}}{\frac{n-1}{2}+1} = \frac{2n-n+1}{n-1+2} = \frac{n+1}{n+1} = 1$ munosabat o‘rinlidir. Demak, $C_n^{m+1} = \frac{n-m}{m+1} C_n^m$ formuladan $m = \frac{n-1}{2}$ bo‘lganda $C_n^{\frac{n-1}{2}+1} = C_n^{\frac{n-1}{2}}$ tenglik kelib chiqadi. ■

Binomial koeffitsientlarning 5- xossasi Paskal uchburchagining yuqorida keltirilgan xossalari tasdig‘i bo‘lib, unga ko‘ra binomial koeffitsientlar oldin $C_n^0 = 1$ dan $C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ gacha[33] o‘sadi, keyin esa $C_n^n = 1$ gacha kamayadi hamda n toq bo‘lganda binomial koeffitsientlar qatorining o‘rtasidagi ikkita hadi tengdir va n juft bo‘lganda uning o‘rtadasigi hadi eng katta va yagonadir.

Quyidagi 6–8- xossalar o‘rinlidir.

6- x o s s a . $C_n^n + C_{n+1}^n + \ldots + C_{n+k}^n = C_{n+k+1}^{n+1}$.

7- x o s s a . $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n$.

8- x o s s a . $C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \ldots + C_n^k C_m^0 = C_{n+m}^k$.

Oxirgi tenglik **Koshi**[34] **ayniyati** deb aytiladi.

Endi bu uchta xossalarni isbotlaymiz. Dastlab 6- xossaning isbotini keltiramiz. Birinchidan,

$$s = (1+x)^n + (1+x)^{n+1} + \ldots + (1+x)^{n+k}$$

ko‘phad uchun Nyuton binomi formulasini qo‘llab, quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$s = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m + \sum_{m=0}^{n+1} C_{n+1}^m x^m + \ldots + \sum_{m=0}^{n+k} C_{n+k}^m x^m .$$

Bu yerdan, s ko‘phaddagi x^n ifodaning koeffitsienti

$$C_n^n + C_{n+1}^n + \ldots + C_{n+k}^n$$

yig‘indiga tengligini aniqlash mumkin.

Ikkinchidan, $s = (1+x)^n(1+(1+x)+\ldots+(1+x)^k)$ ifodani geometrik progressiya hadlari yig‘indisi formulasiga binoan quyidagicha ham yozish mumkin:

$$s = (1+x)^n \frac{(1+x)^{k+1}-1}{1+x-1} = \frac{1}{x}\left((1+x)^{n+k+1} - (1+x)^n\right).$$

Bu yerda ham Nyuton binomi formulasini qo‘llab, hosil bo‘lgan ko‘phadning x^n daraja qatnashgan hadi koeffitsienti C_{n+k+1}^{n+1} ekanligini ko‘rish mumkin. Keltirilgan bu mulohazalar asosida 6- xossadagi tenglikka ega bo‘lamiz. ■

Ravshanki, $C_n^m = C_n^{n-m}$ formula e’tiborga olinsa, 7- xossa 8- xossadan $m = k = n$ bo‘lganda xususiy hol sifatida kelib chiqadi. Shuning uchun faqat 8- xossaning isbotini keltirish bilan chegaralanamiz.

Birinchidan, Nyuton binomi formulasiga ko‘ra

$$(1+x)^n = \sum_{s=0}^{n} C_n^s x^s, \quad (1+x)^m = \sum_{t=0}^{m} C_m^t x^t, \quad (1+x)^{n+m} = \sum_{p=0}^{n+m} C_{n+m}^p x^p$$

---

[33] $[a]$ yozuv a sonning butun qismini anglatadi.

[34] Koshi (Cauchy Ogyusten Lui, 1789-1857) –fransuz matematigi.

tengliklarga, bulardan esa $(1+x)^n(1+x)^m=(1+x)^{n+m}$ bo‘lgani uchun $\sum_{s=0}^{n} C_n^s x^s \sum_{t=0}^{m} C_m^t x^t = \sum_{p=0}^{n+m} C_{n+m}^p x^p$ tenglikka ega bo‘lamiz. Oxirgi tenglikning ikkala tomonidagi x^k ($k=0,1,...,\min(m,n)$) daraja koeffitsientlarini bir-biriga tenglashtirsak, isbotlanishi kerak bo‘lgan formulani hosil qilamiz. ■

Albatta, yuqoridagu uchta xossalar boshqa usullar bilan ham isbotlanishi mumkin. Quyida 8- xossaning kombinatorik tahlilga asoslangan isboti keltirilgan.

2- misol. Koshi ayniyatini kombinatorik tahlilga asoslangan holda isbotlaymiz. n nafar o‘g‘il va m nafar qiz bolalardan tashkil topgan talabalar guruhidan k ($k=0,1,...,\min(m,n)$) nafar talaba tanlash zarur bo‘lsin. $n+m$ nafar talabalardan k nafar talabani C_{n+m}^k xil usul bilan tanlash mumkinligi ravshan.

Boshqa tomondan olib qaraganda, $n+m$ nafar talabalardan iborat to‘plamdan tanlanadigan barcha k elementli qism to‘plamlarni ularning tarkibidagi o‘g‘il bolalar soniga qarab sinflarga ajratishning quyidagicha imkoniyati bor. Tarkibida s $(0\le s\le k)$ nafar o‘g‘il bola bo‘lgan k elementli qism to‘plamni oldin C_n^s xil usul bilan tanlab, keyin $(k-s)$ nafar qiz bolalarni C_m^{k-s} xil usullardan birortasi yordamida tanlash mumkin. Demak, tarkibida s nafar o‘g‘il bola bo‘lgan k nafar talabadan iborat qism to‘plamlar soni, ko‘paytirish qoidasiga asosan, $C_n^s C_m^{k-s}$ songa tengdir. Noldan k gacha bo‘lgan barcha butun s sonlar uchun barcha kombinatsiyalarni hosil qilib va bu kombinatsiyalarga mos ko‘paytmalarni yig‘ib, Koshi ayniyatining chap tomonini hosil qilamiz. ■

Binomial koeffitsientlarning yuqorida keltirilgan xossalarini tahlil qilish natijasida ularning turli sohalardagi tadbiqlari doirasining kengligini payqash mumkin. Misol sifatida to‘plamlamlar nazariyasiga tadbiqini qaraymiz.

3- misol. Chekli A to‘plam 2^A buleanining elementlari va bu elementlar soni bilan binomial koeffitsientlarning uzviy bog‘lanishi bor. Bu bog‘lanish quyidagicha ifodalashi mumkin. Chekli A to‘plam 2^A buleani tarkibidagi elementlar A to‘plamning qism to‘plamlaridan iborat bo‘lgani uchun, shu qism to‘plamlarni quvvatlari bo‘yicha $(|A|+1)$ta guruhlarga ajratish mumkin. Tushunarliki, bu yerda k raqamli guruh ($k=\overline{0,|A|}$) quvvati k ga teng bo‘lgan barcha qism to‘plamlardan tashkil topadi va undagi qism to‘plamlar soni C_n^k ga teng. Bu mulohazani hisobga olgan holda 2- xossa yordamida ushbu bobning 1- paragrafidagi 1- teoremaning boshqa bir isbotiga ega bo‘lamiz. ■

Nazorat uchun savollar:

1. Nyuton binomi formulasini qanday qo‘llash mumkin?
2. Nyuton binomi formulasini Isaak Nyutondan oldin kimlar qo‘llagan?
3. Nima uchun binomial koeffitsientlarlarning xossalari Paskal uchburchagining xossalari ham hisoblanadi?
4. Nyuton binomi formulasini kombinatorik tahlil yordamida isbot qilganda qanday tushunchalar qo‘llaniladi?
5. Koshi ayniyatining kombinatorik tushunchalarga asoslangan isbotini bilasizmi?
6. Nima uchun gruppalashlar sonlarini binomial koeffitsientlar deb ham atashadi?
7. Nima uchun 7- xossa 8- xossaning xususiy holi bo‘ladi?
8. Binomial koeffitsientlarlarning ushbu kitobda bayon etilmagan yana qanday xossalarini bilasiz?

Adabiyotlar:

1. Mendelson E. Introduction to mathematical logic. Sixth edition. New York.Taylor&Francis Group,2015

2. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012.
3. H.T. To‘rayev, I. Azizov Matematik mantiq va diskret matematika. 1,2 jild. “Tafakkur-Bo‘stoni”, Toshkent, 2011y.
4. Anderson D.A.Diskretnaya matematika I kombinatorika. M."Vilyams",2004g.-960s.ISBN5-8459-0498-6

13- ma'ruza: Umumlashgan o‘rinlashtirishlar va kombinasiyalar.

Reja:

1. O‘rin almashtirishlar.
2. O‘rinlashtirishlar.
3. Gruppalashlar.

**Kalit so`zlar:** betakror o`rin almashtirish, o`rinlashtirish, kortej, faktorial.

O‘rin almashtirishlar. Elementlari $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ bo‘lgan to‘plamni qaraymiz. Bu to‘plam elementlarini har xil tartibda joylashtirib (yozib), tuzilmalar (kombinatsiyalar) hosil qilish mumkin, masalan,

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n;\ a_2, a_1, a_3, ..., a_n;\ a_2, a_3, a_1, ..., a_n.$$

Bu tuzilmalarning har birida berilgan to‘plamning barcha elementlari ishtirok etgan holda ular bir-biridan faqat elementlarning joylashish o‘rinlari bilan farq qiladilar. Shu usul yordamida hosil qilingan kombinatsiyalarning har biri berilgan $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ to‘plam elementlarining **o‘rin almashtirishi** deb ataladi.

Aslida “o‘rin almashtirish” iborasi to‘plam elementlarining o‘rinlarini o‘zgartirish harakatini anglatsada, bu yerda uni shu harakat natijasidagi hosil bo‘lgan tuzilma sifatida qo‘llaymiz. Bu iboradan uning asl ma’nosida ham foydalanamiz.

O‘rin almashtirishni ifodalashda uning elementlarini ajratuvchi belgi sifatida yuqorida “,” (vergul) belgisidan foydalanildi. Ammo bu muhim emas, bu yerda boshqa belgidan ham foydalanish, hattoki, yozuvning ixchamligi maqsadida, elementlar orasidagi ajratuvchi belgilarni tushirib qoldirilish ham mumkin. Bu eslatma bundan keyin bayon etiladigan boshqa kombinatorik tuzilmalar uchun ham o‘rinlidir.

To‘plam tushunchasiga asoslanib, bu yerda qaralayotgan o‘rin almashtirishlar tarkibida elementlarning takrorlanmasligini eslatib o‘tamiz. Shu sababli bunday o‘rin almashtirishlarni **betakror (takrorli emas) o‘rin almashtirishlar** deb ham atash mumkin. Ushbu bobning 4- paragrafida takrorli o‘rin almashtirishlar ko‘riladi.

Berilgan n ta elementli to‘plam uchun barcha o‘rin almashtirishlar sonini P_n bilan belgilash qabul qilingan[35].

Bitta elementli $\{a\}$ to‘plam uchun faqat bitta a ko‘rinishdagi o‘rin almashtirish borligi ravshandir: $P_1 = 1$.

Ikkita elementli $\{a,b\}$ to‘plam elementlaridan o‘rin almashtirishlarni bitta elementli $\{a\}$ to‘plam uchun a o‘rin almashtirishidan foydalanib quyidagicha tashkil qilamiz: b element a elementdan keyin yozilsa ab o‘rin almashtirishga, oldin yozilsa esa ba o‘rin

[35] Fransuzcha “permution” so‘zi o‘rin almashtirish ma’nosini anglatadi.

almashtirishga ega bo'lamiz. Demak, ko'paytirish qoidasiga (ushbu bobning 1- paragrafiga qarang) binoan ikkita o'rin almashtirish bor: $P_2 = 2 = 1\cdot 2$.

Uchta elementli $\{a,b,c\}$ to'plam uchun o'rin almashtirishlar tashkil qilishda ikkita elementli $\{a,b\}$ to'plam uchun tuzilgan ab va ba o'rin almashtirishlardan foydalanish mumkin. Berilgan to'plamning c elementini ab va ba o'rin almashtirishning har biriga uch xil usul bilan joylashtirish mumkin: ularning elementlaridan keyin, elementlarining orasiga va elementlaridan oldin. Ko'paytirish qoidasini qo'llasak, uchta elementli $\{a,b,c\}$ to'plam uchun oltita ($P_3 = 6 = 1\cdot 2\cdot 3$) har xil o'rin almashtirishlar hosil bo'lishini aniqlaymiz. Ular quyidagilardir:

$$abc,\ acb,\ cab,\ bac,\ bca,\ cba.$$

To'rtta elementli $\{a,b,c,d\}$ to'plamni qarab, uchta elementli $\{a,b,c\}$ to'plam uchun tuzilgan oltita o'rin almashtirishlarning har biriga d elementni to'rt xil usul bilan joylashtirish imkoniyati borligini e'tiborga olsak, ko'paytirish qoidasiga ko'ra, $P_4 = 24 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$ bo'lishini topamiz. Bu yerda barcha o'rin almashtirishlar quyidagilardir:

$$abcd,\ abdc,\ adbc,\ dabc,$$
$$acbd,\ acdb,\ adcb,\ dacb,$$
$$cabd,\ cadb,\ cdab,\ dcab,$$
$$bacd,\ badc,\ bdac,\ dbac,$$
$$bcad,\ bcda,\ bdca,\ dbca,$$
$$cbad,\ cbda,\ cdba,\ dcba.$$

Shu tarzda davom etib "n ta elementli to'plam uchun barcha o'rin almashtirishlar soni birdan n gacha bo'lgan barcha natural sonlarning ko'paytmasiga teng" deb faraz qilish mumkin: $P_n = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)n$. Bu farazning to'g'riligi quyidagi 1- teoremada isbot qilinadi.

Dastlabki n ta natural sonlar ko'paytmasini $n!$ ko'rinishida[36] belgilash qabul qilingan, ya'ni $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n = n!$. $n!$ belgisidan bunday ma'noda birinchi bo'lib K. Kramp[37] 1808 yilda nashr etilgan algebra bo'yicha qo'llanmada foydalangan.

$1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots n$ ifodada $n=1$ bo'lganda faqat 1 soni ishtirok etadi, shuning uchun, ta'rif sifatida $1!=1$ deb hisoblash qabul qilingan. Bundan tashqari, $n=0$ bo'lganda esa $n!$ ifoda umuman ma'nosini yo'qotadi. Lekin, ta'rif sifatida $0!=1$ deb qabul qilinadi.

1- teorema. *Elementlari soni n ta bo'lgan to'plam uchun o'rin almashtirishlar soni $n!$ ga teng, ya'ni $P_n = n!$.*

Isboti. Teoremani isbotlash uchun matematik induksiya usulidan foydalanamiz. Asos to'g'riligini, ya'ni teoremaning tasdig'i $n=1$ uchun to'g'riligini yuqorida ko'rdik. Induksion o'tish uchun teoremaning tasdig'i biror natural $n=k$ uchun to'g'ri bo'lsin deb faraz qilamiz, ya'ni $P_k = k!$ bo'lsin. Ravshanki, $(k+1)$ ta elementli to'plamni k ta elementli to'plamga yangi $(k+1)$- elementni kiritish yordamida hosil qilish mumkin. Bu $(k+1)$- elementni k elementli to'plam uchun barcha $k!$ ta o'rin almashtirishlarning har biriga quyidagicha $(k+1)$ xil usul bilan kiritish mumkin:

1- elementdan oldin,
1- va 2- elementlar orasiga,
2- va 3- elementlar orasiga,
....
$(k-1)$- va k- elementlar orasiga,
k- elementdan keyin.

---

[36] "En faktorial" deb o'qiladi; faktorial so'zi lotincha "factor" so'zidan olingan bo'lib, ko'paytuvchi ma'nosini anglatadi.

[37] Kristian Kramp (Christian, 1760-1826) – olmon matematigi. Asosiy ishlari kombinatorika, geometriya va algebraga bag'ishlangan.

Shunday qilib, ko'paytirish qoidasiga binoan, $(k+1)$ ta elementli to'plam uchun jami $k!(k+1)=(k+1)!$ ta o'rin almashtirishlar hosil bo'ladi, ya'ni $P_{k+1}=(k+1)!$. ■

1- misol. Besh nafar tomoshabinlarning beshta o'rinni egallash imkoniyatlari (variantlari) sonini toping.

Agar tomoshabinlarni a,b,c,d,e harflar bilan belgilasak, u holda $T=\{a,b,c,d,e\}$ tomoshabinlar to'plamiga ega bo'lamiz. Tomoshabinlarni o'rinlarga joylashtirish imkoniyatlarining (variantlarining) har biriga tomoshabinlar T to'plami elementlarining qandaydir o'rin almashtirishi mos keladi. T to'plam beshta elementli bo'lgani uchun, 1-teoremaga asosan, $P_5=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$ bo'ladi. Demak, besh nafar tomoshabinning beshta o'rinni egallash imkoniyatlari soni 120ga teng. ■

2- misol. Shaxmat bo'yicha musobaqada har birining tarkibida to'rt nafar o'yinchi bo'lgan ikkita komanda ishtirok etmoqda. Har bir komanda rahbariga to'rtta shaxmat taxtasida o'yinlar o'tkazish uchun o'yinchilarni ixtiyoriy ravishda tartiblash imkoniyati berilgan. Musobaqa qatnashchilarining shaxmat taxtalarini egallash imkoniyatlari (variantlari) sonini toping.

Har bir komanda a'zolari uchun shaxmat taxtalarini egallash imkoniyatlarini $P_n=n!$ formula yordamida hisoblash mumkin: $P_4=4!=24$. Komandalardagi o'yinchilarni ixtiyoriy ravishda tartiblash mumkin bo'lganligidan, ko'paytirish qoidasiga ko'ra, musobaqa qatnashchilarining shaxmat taxtalarini egallash imkoniyatlari (variantlari) soni $24\cdot 24=576$ bo'ladi. ■

O'rinlashtirishlar. n ta elementli $\{a_1,a_2,a_3,...,a_n\}$ to'plam berilgan bo'lsin. Shu to'plamning ixtiyoriy m ta elementidan hosil qilingan tartiblangan $\{a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_m}\}$ tuzilmaga (kombinatsiyaga) **n ta elementdan m tadan o'rinlashtirish** deb ataladi.

Bu ta'rifdan ko'rinib turibdiki, elementlari soni bir xil bo'lgan ikkita har xil o'rinlashtirishlar bir-biridan elementlari bilan yoki bu elementlarning joylashish tartibi bilan farq qiladilar. Bundan tashqari, n ta elementdan m tadan o'rinlashtirishlar uchun $m\leq n$ bo'lishi ham ravshan. Bu yerda qaralayotgan o'rinlashtirishlar tarkibidagi elementlarning takrorlanmasligini eslatib o'tamiz. Shu sababli bunday o'rinlashtirishlarni **betakror (takrorli emas) o'rinlashtirishlar** deb ham atash mumkin. Ushbu bobning 4- paragrafida takrorli o'rinlashtirishlar ko'riladi.

Berilgan n ta elementdan m tadan o'rinlashtirishlar soni, odatda, A_n^m bilan belgilanadi[38].

Ravshanki, berilgan n ta $a_1,a_2,a_3,...,a_n$ elementlardan bittadan o'rinlashtirishlar n ta bo'ladi (bular: a_1; a_2; va hokazo, a_n), ya'ni $A_n^1=n$.

n ta elementdan bittadan o'rinlashtirishlar yordamida n ta elementdan ikkitadan o'rinlashtirishlarni quyidagicha tuzish mumkin. n ta elementdan bittadan o'rinlashtirishlarning har biridagi elementdan keyin yoki oldin qolgan $(n-1)$ ta elementlardan ixtiyoriy bittasini joylashtirsa bo'ladi. Natijada, ko'paytirish qoidasiga binoan, jami soni $A_n^2=n(n-1)$ ta bo'lgan n ta elementdan ikkitadan o'rinlashtirishlarni hosil qilamiz.

Shu kabi, n ta elementdan uchtadan o'rinlashtirishlarni hosil qilish uchun n ta elementdan ikkitadan o'rinlashtirishlarga murojaat qilish mumkin. Bu yerda n ta elementdan ikkitadan o'rinlashtirishlarning har biri uchun uni tashkil etuvchi ikkita elementlardan oldin, elementlar orasiga yoki elementlardan keyin qolgan $(n-2)$ ta elementlardan ixtiyoriy bittasini joylashtirish imkoniyati bor. Ko'paytirish qoidasiga ko'ra natijada jami soni $A_n^3=n(n-1)(n-2)$ ta bo'lgan n ta elementdan uchtadan o'rinlashtirishlarni hosil qilamiz.

[38] Fransuzcha "arrangement" so'zi o'rinlashtirish ma'nosini beradi.

Shunga o‘xshash mulohaza yuritib, n ta elementdan to‘rttadan, beshtadan va hokazo o‘rinlashtirishlar soni uchun mos ifodalarni aniqlash qiyin emas.

2- teorema. *n ta elementdan m tadan o‘rinlashtirishlar soni eng kattasi n ga teng bo‘lgan m ta ketma-ket natural sonlarning ko‘paytmasiga tengdir, ya’ni* $A_n^m = n(n-1)...(n-m+1)$.

Isboti. n – ixtiyoriy natural son bo‘lsin. Teoremani isbotlash uchun matematik induksiya usulini qo‘llab, teorema tasdig‘ining n dan oshmaydigan ixtiyoriy m natural son uchun to‘g‘riligini ko‘rsatamiz (ya’ni induksiyani m bo‘yicha bajaramiz).

Baza: yuqorida $A_n^1 = n$ ekanligi aniqlangan edi, ya’ni teorema tasdig‘i $m=1$ uchun to‘g‘ridir.

Induksion o‘tish: $A_n^m = n(n-1)...(n-m+1)$ formula $m=k<n$ uchun to‘g‘ri bo‘lsin deb faraz qilamiz va uning $m=k+1$ uchun ham to‘g‘ri ekanligini ko‘rsatamiz. n ta elementdan $(k+1)$ tadan o‘rinlashtirishlarning ixtiyoriy bittasini quyidagicha hosil qilish mumkin. Bunday o‘rinlashtirishning birinchi elementi sifatida berilgan $\{a_1,a_2,a_3,...,a_n\}$ to‘plamning istalgan elementini, masalan, a_1 ni tuzilayotgan o‘rinlashtirishga joylashtiramiz. Undan keyin umumiy soni A_{n-1}^k ga teng bo‘lgan $(n-1)$ ta elementdan k tadan o‘rinlashtirishlarning ixtiyoriy biridagi barcha elementlarni joylashtiramiz. Birinchi elementi a_1 dan iborat bo‘lgan barcha n ta elementdan $(k+1)$ tadan o‘rinlashtirishlarning soni A_{n-1}^k ga tengdir. Bunday o‘rinlashtirishlarning birinchi elementi sifatida $\{a_1,a_2,a_3,...,a_n\}$ to‘plamning ixtiyoriy elementini tanlash mumkinligini e’tiborga olsak, ko‘paytirish qoidasiga binoan, berilgan n ta elementdan $(k+1)$ tadan o‘rinlashtirishlar soni quyidagicha aniqlanishi kelib chiqadi:

$$A_n^{k+1} = nA_{n-1}^k = n(n-1)(n-2)...((n-1)-k+1) =$$
$$= n(n-1)...(n-(k+1)+1).$$

Bu munosabat isbotlanayotgan formulaning $m=k+1$ uchun to‘g‘riligini ko‘rsatadi. ■

3- misol. Guruh 25 nafar talabadan tashkil topgan bo‘lsin. Bu guruhda guruh sardori, guruh sardorining yordamchisi va kasaba uyushmasining guruh bo‘yicha vakilini saylash zarur. Har bir talaba bu vazifalardan faqat bittasini bajaradi deb hisoblansa, saylov natijalari uchun qancha imkoniyat mavjud?

Bu yerda 25ta elementli talabalar to‘plamining tartiblangan uchta elementli (guruh sardori, guruh sardorining yordamchisi va kasaba uyushmasining guruh bo‘yicha vakili) qism to‘plamlari sonini aniqlash zarur. Bu esa 25ta elementdan uchtadan o‘rinlashtirishlar sonini topish demakdir. Qo‘yilgan savolga javob topish maqsadida 2- teoremadagi isbotlangan formulani $n=25$ va $m=3$ bo‘lgan holda qo‘llab, $A_{25}^3 = 25\cdot 24\cdot 23 = 13800$ ekanligini aniqlaymiz. Demak, guruhdagi saylov natijalari uchun 13800ta imkoniyat mavjud. ■

$A_n^m = n(n-1)...(n-m+1)$ formulani $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ ko‘rinishda ham yozish mumkin. Haqiqatdan ham,

$$A_n^m = n(n-1)...(n-m+1) = \frac{n(n-1)...(n-m+1)(n-m)!}{(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Yuqorida ta’kidlaganganidek, n ta elementdan m tadan o‘rilashtirishlar n elementli to‘plamning bir-biridan tarkibi bilan ham, elementlarining joylashishi bilan ham farqlanadigan qism to‘plamlaridan iboratdir. Agar bu o‘rinlashtirishlarda n ta elementli to‘plamning barcha elementlari qatnashsa (ya’ni $m=n$ bo‘lsa), n ta elementli to‘plam uchun barcha o‘rin almashtirishlar hosil bo‘lishi tabiiydir. Shu tufayli, o‘rin almashtirishlarning oldin keltirilgan ta’rifiga ekvivalent quyidagi ta’rifni ham berish mumkin.

n ta elementli to'plam uchun o'rin almashtirishlar deb n ta elementdan n tadan o'rinlashtirishlarga aytiladi. Bunda har bir element faqat bir marta qatnashadi va ular bir-biridan faqat o'zaro joylashishlari bilan farq qiladilar.

O'rin almashtirishlarning bu ta'rifiga asoslanib n ta elementli to'plam uchun o'rin almashtirishlar soni formulasini o'rinlashtirishlar soni formulasi yordamida hosil qilish mumkin. Haqiqatdan ham,

$$P_n = A_n^n = n(n-1)...(n-(n-1)) = n(n-1)...2\cdot 1 = n!$$

yoki $P_n = A_n^n = \dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{0!} = \dfrac{n!}{1} = n!$.

Gruppalashlar. $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ to'plam berilgan bo'lsin. Bu n elementli to'plamning elementlaridan m ta elemetga ega qism to'plamlarni shunday tashkil etamizki, ular bir-biridan elementlarining joylashish tartibi bilan emas, faqat tarkibi bilan farq qilsinlar. Bunday m ta elementli qism to'plamlarning har biriga **n ta elementdan m tadan gruppalash** deb ataladi.

n ta elementdan m tadan gruppalashlar sonini C_n^m bilan belgilaymiz[39].

Gruppalashlar sonini $\binom{m}{n}$ yoki $\binom{n}{m}$ shaklda belgilashlar ham uchraydi. Gruppalash ta'rifidan $1 \le m \le n$ ekanligi va agar biror gruppalashda qandaydir usul bilan elementlar o'rinlari almashtirilsa, u (gruppalash sifatida) o'zgarmasligi kelib chiqadi. Bu yerda qaralaytgan gruppalash tarkibida elementlarning takrorlanmasligini eslatib o'tamiz. Shu sababli bunday gruppalashni **betakror (takrorli emas) gruppalash** deb ham atash mumkin. Ushbu bobning 4- paragrafida takrorli gruppalashlar o'rganiladi.

Bir ($n=1$) elementli $\{a\}$ to'plam uchun faqat bitta gruppalash mavjud, u ham bo'lsa bir ($m=1$) elementlidir: a. Demak, $C_1^1 = 1$.

Ikki ($n=2$) elementli $\{a, b\}$ to'plam uchun bittadan ($m=1$) gruppalashlar ikkita (a va b), ikkitadan ($m=2$) gruppalashlar esa faqat bitta (ab). Demak, $C_2^1 = 2$, $C_2^2 = 1$.

Uch ($n=3$) elementli $\{a, b, c\}$ to'plam uchun gruppalashlar: bittadan ($m=1$) – a, b va c (uchta); ikkitadan ($m=2$) – ab, ac, bc (uchta); uchtadan ($m=3$) – abc (faqat bitta). Demak, $C_3^1 = 3$, $C_3^2 = 3$, $C_3^3 = 1$.

To'rtta ($n=4$) elementdan tashkil topgan $\{a, b, c, d\}$ to'plam elementlaridan tuzilgan gruppalashlar: bittadan – a, b, c va d (to'rtta); ikkitadan – ab, ac, ad, bc, bd, cd (oltita); uchtadan – abc, abd, acd, bcd (to'rtta); to'rttadan $abcd$ (faqat bitta). Demak, $C_4^1 = 4$, $C_4^2 = 6$, $C_4^3 = 4$, $C_4^4 = 1$.

Yuqoridagi mulsohazalar gruppalashlar sonini hisoblash formulasi qanday bo'lishiga to'liq oydinlik kiritmasada, dastlabki tahlil uchun muhimdir. Masalan, n ta elementdan barcha elementlarni o'z ichiga oladigan faqat bitta gruppalash tashkil etish mumkin degan yoki n ta elementdan bittadan n ta gruppalash bor degan xulosalar ustida o'ylab ko'rish mumkin.

C_n^m sonni hisoblash uchun formula topish maqsadida quyidagicha mulohaza yuritamiz. Ravshanki, agar n ta elementdan m tadan barcha gruppalashlarning har birida elementlarning o'rinlari imkoniyat boricha almashtirilsa, natijada n ta elementdan m tadan barcha o'rinlashtirishlar hosil bo'ladi. Bu yerda n ta elementdan m tadan tuzilgan C_n^m ta gruppalashning har biridagi m ta elementdan $P_m = m!$ ta o'rin almashtirishlar hosil qilish mumkin bo'lganligi tufayli, ko'paytirish qoidasiga asosan, $P_m C_n^m = A_n^m$ tenglik to'g'ridir. Demak,

[39] Fransuzcha "combinasion" so'zi gruppalash ma'nosini beradi.

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot m}$$

formula o‘rinlidir. Shunday qilib, quyidagi teorema isbotlandi.

3- teorema. *n ta elementdan m tadan gruppalashlar soni eng kattasi n ga teng bo‘lgan m ta ketma-ket natural sonlar ko‘paytmasining dastlabki m ta natural sonlar ko‘paytmasiga nisbati kabidir:* $C_n^m = \dfrac{n(n-1)...(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot m}$.

4- misol. Qurilish tashkilotining duradgorlar bo‘limida 15 nafar ishchi bor. Ko‘p qavatli uyning eshiklarini ta’mirlash uchun 3 nafar duradgorni tanlash zarur. Agar bo‘limdagi har bir duradgor bu topshiriqni bajarishga layoqatli bo‘lsa, bunday tanlash imkoniyatlari (variantlari) qancha?

Bo‘limdagi har bir duradgor ta’mirlash ishini bajarishga layoqatli bo‘lgani uchun, bu masalani hal qilishda gruppalashlar sonini topish formulasidan foydalanish mumkin. Bu yerda $n=15$, $m=3$ va $C_{15}^3 = \dfrac{15\cdot 14\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3} = 455$. Demak, 15 nafar duradgorlar orasidan 3 nafarini tanlash imkoniyatlari soni 455 ekan. ■

Agar ta’rif sifatida $C_n^0 = 1$ qabul qilinsa, n ta elementdan m tadan gruppalashlar soni uchun yuqorida keltirilgan formula $m=0$ bo‘lgan holda ham to‘g‘ri bo‘ladi: $C_n^0 = \dfrac{n!}{0!n!} = 1$. Tabiiyki, n ta elementdan barcha elementlarni o‘z ichiga oladigan faqat bitta gruppalash tashkil etish mumkin: $C_n^n = \dfrac{n!}{n!0!} = 1$.

Gruppalashlar sonini hisoblash uchun

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, C_n^m = \frac{n(n-1)...(m+1)}{1\cdot 2\cdot ...(n-m)}$$

ko‘rinishdagi formulalardan ham foydalanish mumkin. Bu formulalar quyidagi tengliklardan kelib chiqadi:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{\frac{n!}{(n-m)!}}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{\frac{n!}{m!}}{(n-m)!} =$$

$$= \frac{\frac{n!}{(n-(n-m))!}}{(n-m)!} = \frac{A_n^{n-m}}{P_{n-m}} = \frac{n(n-1)...(m+1)}{1\cdot 2\cdot ...(n-m)}.$$

Ixtiyoriy natural n soni uchun gruppalashlar soni bir qator xossalarga ega, masalan,

$$C_n^m = C_n^{n-m} \; (m = 0,1,2,...,n),$$

$$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1} \; (m = 0,1,2,...,n-1).$$

Haqiqatdan ham,

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} = C_n^{n-m},$$

$$C_n^m + C_n^{m+1} = \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} =$$

$$= \frac{n!}{m!(n-m-1)!}\left(\frac{1}{n-m} + \frac{1}{m+1}\right) =$$

$$= \frac{n!(n+1)}{m!(m+1)(n-m-1)!(n-m)} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{(m+1)!((n+1)-(m+1))!} = C_{n+1}^{m+1}.$$

Nazorat uchun savollar:

1. O'rin almashtirishlar sonini qanday hisoblash mumkin?
2. O'rinlashtirishlar soni formulasini isbotlay olasizmi?
3. O'rin almashtirish va o'rinlashtirish orasida qanday farq bor?
4. Gruppalashlar tushunchasi va gruppalashlar soni formulasi.
5. Gruppalashlar sonining qanday xossalari bor?
6. O'rin almashtirishlar, o'rinlashtirishlar va gruppalashlar sonlari orasida qanday munosabatlarni bilasiz?

Adabiyotlar:

1. Mendelson E. Introduction to mathematical logic. Sixth edition. New York.Taylor&Francis Group,2015
2. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012.
3. H.T. To'rayev, I. Azizov Matematik mantiq va diskret matematika. 1,2 jild. "Tafakkur-Bo'stoni", Toshkent, 2011y.
4. Anderson D.A. Diskretnaya matematika i kombinatorika. M."Vilyams",2004g.-960s.ISBN5-8459-0498-6

14- ma'ruza: Takrorli o'rinlashtirishlar, o'rinlashtirishlar va gruppalashlar.

Reja:

1. **Takrorli o'rin almashtirishlar.**
2. **Takrorli o'rinlashtirishlar.**
3. **Takrorli gruppalashlar.**

**Kalit so`zlar:** takrorli o`rin almashtirish, takrorli guruppalash.

Takrorli o'rin almashtirishlar. Kombinatorikada oldin qaralgan birlashmalardan tashqari tarkibidagi elementlari takrorlanishi mumkin bo'lgan boshqa birlashmalar ham o'rganiladi. Masalan, takrorlanuvchi elementlar qatnashgan o'rin almashtirishlar, o'rinlashtirishlar va gruppalashlar.

Avval o'rganilgan o'rin almashtirishlar shunday tuzilmalar ediki, ular tarkibidagi elementlar bir-biridan farq qilardi. Endi o'rin almashtirishlar tarkibidagi elementlar takrorlanishi mumkin bo'lgan holni qaraymiz. Tabiiyki, aynan bir xil elementlar o'rinlari almashtirilishi natijasida yangi o'rin almashtirish hosil bo'lmaydi. Shuning uchun tarkibidagi elementlari soni o'zgarmaganda elementlari takrorlanishi mumkin bo'lgan o'rin almashtirishlar soni turli elementlardan tashkil topgan o'rin almashtirishlar soniga qaraganda kichik bo'ladi.

Faraz qilaylik, qandaydir kortejning n ta elementlari orasida bir xil (aynan bir xil) n_1 ta birinchi tur, bir xil n_2 ta ikkinchi tur, va hokazo, bir xil n_k ta k- tur elementlar bo'lsin, bu yerda n_1, $n_2,\dots n_k$ – hech bo'lmaganda bittasi 1dan farqli natural sonlar. Bu n ta elementlarning o'rinlarini imkoniyati boricha almashtirishlar natijasida hosil bo'lgan kortejlar (kombinatsiyalar) **takrorlanuvchi elementlar qatnashgan o'rin almashtirishlar** (qisqacha, **takrorli o'rin almashtirishlar**) deb ataladi.

n ta elementlari orasida n_1 ta birinchi tur, n_2 ta ikkinchi tur, va hokazo, n_k ta k - tur bir xil elementlar bo‘lgan takrorli o‘rin almashtirishlar sonini $C_n(n_1,n_2,...,n_k)$ bilan belgilaymiz.

1- teorema. *Takrorli o‘rin almashtirishlar soni uchun*

$$C_n(n_1,n_2,...,n_k)=\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

formula o‘rinlidir, bu yerda $n_1+n_2+...+n_k=n$ *– elementlar soni,* k *– turlar soni.*

Isboti. Har bir o‘rin almashtirishdagi elementlar soni $n_1+n_2+...+n_k=n$ ga teng. Bu n ta elementlarni quyidagi tartibda joylashtirib, o‘rin almashtirishlardan birini qaraymiz: birinchi bo‘lib barcha n_1 ta birinchi tur, ulardan keyin barcha n_2 ta ikkinchi tur, va hokazo, oxirda barcha n_k ta k - tur elementlar joylashgan bo‘lsin. Qaralayotgan takrorli o‘rin almashtirishda birinchi tur elementlar soni n_1 ga teng bo‘lgani uchun ularning mumkin bo‘lgan hamma o‘rin almashtirishlari soni $n_1!$ ga teng. Ammo bu elementlar bir-biridan farq qilmaganligi sababli ularning o‘rinlarini almashtirish natijasida yangi takrorli o‘rin almashtirish hosil bo‘lmaydi.

Qaralayotgan takrorli o‘rin almashtirishda ikkinchi tur elementlarning o‘rinlarini almashtirishlar soni $n_2!$ bo‘lib, bu yerda ham bir-biridan farq qilmagan elementlar o‘rinlarini almashtirishlar jarayonida yangi takrorli o‘rin almashtirish hosil qilinmaydi. Ikkinchi tur elementlarning o‘rinlarini almashtirishlar birinchi tur elementlarning o‘rin almashtirishlariga bog‘liqsiz ravishda amalga oshirilishi mumkinligini ta’kidlaymiz.

Uchinchi tur elementlarning o‘rinlarini almashtirishlar soni $n_3!$ bo‘lib, ularning ham hech qaysi biri yangi takrorli o‘rin almashtirish hosil qilmaydi. Bu o‘rin almashtirishlar $n_1!$ ta birinchi tur elementlarning o‘rinlarini almashtirishlarga va $n_2!$ ta ikkinchi tur elementlarning o‘rinlarini almashtirishlarga, jami, ko‘paytirish qoidasiga asosan, $n_1!n_2!$ ta o‘rin almashtirishlarga bog‘liqsiz ravishda amalga oshirilishi mumkin.

Shunday davom etib, qaralayotgan takrorli o‘rin almashtirishda oxirgi k - tur elementlar o‘rinlarini almashtiramiz. Bunday o‘rin almashtirishlar soni $n_k!$ ga teng bo‘lib, bu o‘rin almashtirishlar ham yangi takrorli o‘rin almashtirishni hosil qilmaydi. Bu o‘rin almashtirishlarni birinchi tur, ikkinchi tur va hokazo $(k-1)$- tur elementlarning jami soni, umumlashgan ko‘paytirish qoidasiga asosan, $n_1!n_2!...n_{k-1}!$ bo‘lgan o‘rin almashtirishlariga bog‘liqsiz ravishda bajarish mumkin.

Shunday qilib, $n!$ ta o‘rin almashtirishlarni har birida $n_1!n_2!...n_k!$ tadan bir xil o‘rin almashtirishlar bo‘lgan qismlarga ajratildi deb hisoblash mumkin. Demak, biz izlagan takrorli o‘rin almashtirishlar soni $C_n(n_1,n_2,...,n_k)=\dfrac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$ bo‘ladi, bu yerda $n_1+n_2+...+n_k=n$.

1- misol. Ikkita a, bitta b va ikkita c harflardan tashkil topgan kortej uchun barcha takrorli o‘rin almashtirishlarni tuzing.

Bu misolda uch turdagi ($k=3$) harflar soni beshga teng (n=5) bo‘lib, $n_1=2$ (ikkita a), $n_2=1$ (bitta b) va $n_3=2$ (ikkita c). Dastlabki ikkita harflarning (xuddi shuningdek, oxirgi ikkita harflarning ham) o‘rinlarini o‘zaro almashtirsak yangi o‘rin almashtirishlar hosil bo‘lmaydi. Barcha takrorli o‘rin almashtirishlar soni $C_5(2,1,2)=\dfrac{5!}{2!\cdot1!\cdot2!}=\dfrac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot1\cdot1\cdot2}=30$ bo‘ladi. Bu o‘ttizta o‘rin almashtirishlarning hammasi quyida keltirilgan:

$$aabcc, aacbc, aaccb, abacc, abcac, abcca,$$
$$acabc. acacb, acbac, acbca, accab, accba,$$
$$baacc, bacac, bacca, bcaac, bcaca, bccaa,$$
$$caabc, caacb, cabac, cabca, cacab, cacba,$$

$$cbaac, cbaca, cbcaa, ccaab, ccaba, ccbaa. \ \blacksquare$$

Takrorli o‘rinlashtirishlar. n ta elementlardan tashkil topgan to‘plam berilgan bo‘lsin. Bu elementlardan foydalanib, m ta elementdan tashkil topgan kortejlarni shunday tuzamizki, bu kortejlarga har bir element hohlagancha marta (albatta m dan oshmagan miqdorda) kirishi mumkin bo‘lsin va bu kortejlar bir-biridan ularni tashkil etuvchi elementlar turlari bilan yoki bu elementlarning joylashishlari bilan farq qilishsin. Shunday usul bilan tuzilgan kortejlarning har biri **n ta turli elementlardan takrorlanuvchi elementlar qatnashgan m tadan o‘rinlashtirish** (qisqacha, **takrorli o‘rinlashtirish**) deb ataladi.

n ta turli elementlardan m tadan takrorli o‘rinlashtirishlar sonini $\overline{A}_n^m$ bilan belgilaymiz.

2- teorema. *n ta turli elementlardan m tadan takrorli o‘rinlashtirishlar soni n^m ga teng, ya'ni $\overline{A}_n^m = n^m$.*

Isboti. Berilgan n uchun takrorli o‘rinlashtirishdagi elementlar soni m bo‘yicha matematik induksiya usulini qo‘llaymiz. Baza: takrorli o‘rinlashtirishlar $m=1$ bo‘lganda bitta elementdan tuzilishi ravshan. Tabiiyki, bunda hech qanaqa takrorlanish haqida gap bo‘lishi mumkin emas. Bu holda elementlar soni n bo‘lgani uchun takrorli o‘rinlashtirishlar soni ham n ga teng: $\overline{A}_n^1 = n = n^1$.

Induksion o‘tish: teoremaning tasdig‘i $m=k$ bo‘lganda to‘g‘ri, ya’ni $\overline{A}_n^k = n^k$ bo‘lsin. Bu tasdiq $m=k+1$ bo‘lganda ham to‘g‘ri bo‘lishini isbotlaymiz. Buning uchun n ta turli elementlardan k tadan takrorli o‘rinlashtirishning istalgan birini olib, unga n elementli to‘plamning ixtiyoriy bitta elementini ($k+1$)- element sifatida kiritamiz. Natijada qandaydir ($k+1$)tadan takrorli o‘rinlashtirishni paydo qilamiz. Tabiyki, qaralayotgan k tadan o‘rinlashtirishlarning har biridan yangi n ta ($k+1$)tadan takrorli o‘rinlashtirishlar hosil qilish mumkin. Shunday usul bilan ishni davom ettirsak, barcha mumkin bo‘lgan ($k+1$)tadan takrorli o‘rinlashtirishlarni hosil qilamiz, bu yerda birorta ham ($k+1$)tadan takrorli o‘rinlashtirishlar qolib ketmaydi va hech qaysi ilgari ko‘rilgan ($k+1$)tadan takrorli o‘rinlashtirish qaytadan paydo bo‘lmaydi. Ko‘paytirish qoidasiga asosan n ta turli elementlardan ($k+1$)tadan takrorli o‘rinlashtirishlar soni k tadan takrorli o‘rinlashtirishlar soniga nisbatan n marta ortiqdir, ya’ni $\overline{A}_n^{k+1} = n\overline{A}_n^k = nn^k = n^{k+1}$. ■

2- misol. Oila a’zolari besh kishidan iborat bo‘lib, ular ikkita ishni bajarishlari zarur (masalan, non sotib olish va uni bo‘laklash), bunda oilaning har bir a’zosi ikkala ishni ham bajarish imkoniyatiga ega. Oila a’zolariga bu ishlarni taqsimlashda mumkin bo‘lgan imkoniyatlar soni aniqlansin.

Bu masalani hal qilish uchun oila a’zolarini a, b, c, d, va e harflari bilan belgilab, ishlar ikkita bo‘lgani uchun beshta turli elementlardan ikkitadan barcha takrorli o‘rinlashtirishlarni tuzamiz:

$$aa, ab, ac, ad, ae, ba, bb, bc, bd, be, ca, cb, cc,$$

$$cd, ce, da, db, dc, dd, de, ea, eb, ec, ed, ee.$$

Hammasi bo‘lib 25ta ($\overline{A}_5^2 = 5^2 = 25$) takrorli o‘rinlashtirishlar tuzildi. Demak, besh kishidan iborat oila a’zolariga ikkita ishlarni taqsimlashda mumkin bo‘lgan imkoniyatlar soni 25dir. ■

3- misol. O‘zbekiston Respublikasi fuqarosi pasportining raqami ikki qismdan iborat: lotin alifbosining ikkita harfi va yetti xonali son. O‘zbekiston Respublikasi fuqarosi pasportining barcha mumkin bo‘lgan raqamlari sonini aniqlang.

Lotin alifbosidagi yigirma oltita turli harflar yordamida 676ta ($\overline{A}_{26}^2 = 26^2 = 676$) ikkitadan takrorli o‘rinlashtirishlar tashkil etish mumkin. O‘nta 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 va 9 raqamlardan esa 10.000.000ta ($\overline{A}_{10}^7 = 10^7 = 10000000$) turli yetti xonali raqamlarni (bu raqamlarda dastlabki nollar tashlab yuborilmaydi) hosil qilish mumkin. Shunday qilib, O‘zbekiston Respublikasi fuqarosi pasportining raqamlari soni 6.760.000.000ga ($\overline{A}_{26}^2 \overline{A}_{10}^7 = 6760000000$) teng. ■

Takrorli gruppalashlar. Har bir elementi birlashmaga istalgancha marta kiritiladigan va turli n ta elementlardan m tadan olinadigan hamda elementlar tartibi e'tiborga olinmaydigan birlashmalarni (kortejlarni) qaraymiz. Bunaqa birlashmalar **n ta turli elementlardan m tadan takrorlanuvchi elementlar qatnashgan gruppalashlar** (qisqacha, **takrorli gruppalashlar**) deb ataladi.

n ta elementlardan m tadan takrorlanuvchi elementlar qatnashgan gruppalashlar ta'rifidan ko'rinib turibdiki, turli kombinatsiyalar bir-birlaridan hech bo'lmasa bitta elementi bilan farq qiladi. n ta elementdan m tadan takrorli gruppalashlar sonini $\overline{C}_n^m$ deb belgilaymiz.

3- teorema. *n ta elementdan m tadan takrorli gruppalashlar soni C_{n+m-1}^m ga teng, ya'ni $\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$.*

Isboti. $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ to'plam uchun n ta elementdan m tadan takrorli gruppalashlar sonini aniqlash zarur. Har bir takrorli gruppalashdagi elementlarni n ta qismga shunday bo'lish mumkinki, har bir i- bo'lakda a_i element qanchadir marta qatnashadi yoki biror marta ham qatnashmaydi. Har bir shunday gruppalashni nol va birlardan iborat kod yordamida quyidagicha shifrlaymiz: har bir a_i element o'rniga bu element i- bo'lakda necha marta qatnashsa, shuncha birlar yozamiz (tabiiyki, bu element biror marta ham qatnashmasligi mumkin, u holda hech narsa yozilmaydi); turli bo'lak elementlarini bir-biridan nollar bilan ajratamiz (bu yerda yonma-yon joylashgan nollar hosil bo'lishi mumkin – bu nollar mos elementlarning gruppalashda qatnashmaganligini anglatadi). Masalan, $\{a, b, c, d, e, f\}$ to'plam elementlaridan tuzilgan 6ta elementdan 9tadan takrorli *bbbcddddf* gruppalashga 01110101111001 shifr, 6ta elementdan 12tadan takrorli *aaaabeeeeeff* gruppalashga esa 1111010011111011 shifr, aksincha, 10100011110 shifrga 6ta elementdan 6tadan takrorli *abeeee* gruppalash mos keladi.

Shunday qilib, n ta elementdan m tadan har bir takrorli gruppalash uchun qandaydir m ta birlar va $(n-1)$ta nollardan iborat ketma-ketlikni va, aksincha, m ta birlar va $(n-1)$ta nollardan tashkil topgan har bir ketma-ketlik uchun n ta elementdan m tadan biror takrorli gruppalashni mos qo'ygan bo'lamiz (bir qiymatli moslik o'rnatildi). Binobarin, n ta elementdan m tadan takrorli gruppalashlar soni $(n-1)$ta nol va m ta birlardan tashkil topgan kortej elementlaridan tuzilgan takrorli o'rin almashtirishlar soniga, ya'ni $C_{n+m-1}(m, n-1)$ ga tengdir. Demak,

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}(m, n-1) = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} = C_{n+m-1}^m. \ \blacksquare$$

4- misol. Har birining yoqlariga 1, 2, 3, 4, 5 va 6 sonlari yozilgan kub shaklidagi ikkita soqqalarni tashlaganda jami nechta sonlar juftligini hosil qilish mumkin?

Soqqalarni tashlaganda jami quyidagi 21 imkoniyatlardan biri ro'y beradi:

$$<1,1>, <1,2>, <1,3>, <1,4>, <1,5>, <1,6>, <2,2>,$$
$$<2,3>, <2,4>, <2,5>, <2,6>, <3,3>, <3,4>, <3,5>,$$
$$<3,6>, <4,4>, <4,5>, <4,6>, <5,5>, <5,6>, <6,6>.$$

Bu juftliklar oltita elementdan ikkitadan takrorli gruppalashlarni tashkil etadi. Ularning soni 3- teoremaga asosan $\overline{C}_6^2 = C_{6+2-1}^2 = C_7^2 = 21$ bo'ladi. ■

Ko'phad formulasi. Takrorli kombinatsiyalar vositasida Nyuton binomi tushunchasini umumlashtiramiz, ya'ni $(a_1 + a_2 + ... + a_m)^n$ ifodaning yoyilmasini topish muammosini qaraymiz. Buning uchun qaralayotgan ifodani n ta bir xil ifodalar ko'paytmasi, ya'ni

$$\underbrace{(a_1 + a_2 + ... + a_m)(a_1 + a_2 + ... + a_m)...(a_1 + a_2 + ... + a_m)}_{n\text{ta ko'paytuvchi}}$$

shaklida yozib, qavslarni ochamiz va o'xshash hadlarni ixchamlaymiz. Natijada, $(a_1+a_2+...+a_m)^n$ ifodaning yoyilmasi hosil bo'ladi. Yoyilmaning tarkibidagi qo'shiluvchilarning har birida $a_1, a_2, ..., a_m$ elementlardan tashkil topgan takrorli o'rin almashtirishlar bor, bu yerda har bir qo'shiluvchi qandaydir koeffitsient va n ta elementlarning $a_1^{n_1}a_2^{n_2}...a_m^{n_m}$ ko'rinishdagi ko'paytmasidan iboratdir. Yoyilmadagi $a_1^{n_1}a_2^{n_2}...a_m^{n_m}$ ko'paytmaning koeffitsientini aniqlash uchun n ta $(n=n_1+n_2+...+n_m)$ elementli takrorli o'rin almashtirishlar sonini topish kerak, ya'ni $C_n(n_1,n_2,...,n_m)$ sonni hisoblash kerak. Shunday qilib, quyidagi teorema isbotlandi.

4- teorema. *Ixtiyoriy haqiqiy $a_1, a_2, ..., a_m$ va natural n sonlar uchun*

$$(a_1+a_2+...+a_m)^n = \sum_{n_1+n_2+...+n_m=n} C_n(n_1,n_2,...,n_m)\,a_1^{n_1}a_2^{n_2}...a_m^{n_m}$$

formula o'rinlidir, bu formulaning o'ng tomonidagi yig'indi $n_1+n_2+...+n_m=n$ shartni qanoatlantiruvchi barcha manfiymas butun $n_1, n_2, ..., n_m$ sonlar uchun amalga oshiriladi.

Isbotlangan oxirgi tenglik **ko'phad formulasi** yoki **umumlashgan Nyuton binomi formulasi** deb ataladi. $C_n(n_1,n_2,...,n_m)$ sonlarni **ko'phadiy koeffitsientlar** deb ataymiz.

C_n^k binomial koeffitsient $C_n(n_1,n_2,...,n_m)$ ko'phadiy koeffitsientning $m=2$ bo'lgandagi xususiy holidir. Haqiqatdan ham, $n_1+n_2=n$ tenglikda $n_1=k$ deb olsak, u holda $n_2=n-n_1=n-k$ va $C_n(n_1,n_2)=\dfrac{n!}{n_1!\,n_2!}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=C_n^k$ bo'ladi.

5- misol. $(a+b+c)^3$ ifodaning yoyilmasini toping. Avvalo 3 sonini bo'laklaymiz, ya'ni 3ni mumkin bo'lgan barcha imkoniyatlar bilan manfiymas butun sonlar yig'indisi shaklida yozamiz:

3=3+0+0, 3=2+1+0, 3=2+0+1, 3=1+2+0, 3=1+1+1,
3=1+2+0, 3=0+3+0, 3=0+2+1, 3=0+1+2, 3=0+0+3.

Demak, ko'phad formulasiga ko'ra,

$$(a+b+c)^3 = C_3(3,0,0)a^3 + C_3(2,1,0)a^2b + C_3(2,0,1)a^2c +$$

$$+C_3(1,2,0)ab^2 + C_3(1,1,1)abc + C_3(1,0,2)ac^2 + C_3(0,3,0)b^3 +$$

$$+C_3(0,2,1)b^2c + C_3(0,1,2)bc^2 + C_3(0,0,3)c^3.$$

Takrorli o'rin almashtirishlar soni $C_n(n_1,n_2,...,n_k)=\dfrac{n!}{n_1!\,n_2!...n_k!}$ formulasini qo'llab quyidag tenglikni hosil qilamiz:

$$(a+b+c)^3 =$$

$$= a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+6abc+3ac^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3. \blacksquare$$

Ko'phad yoyilmasining hadlarini yozganda shunga e'tibor berish kerakki, agar $n_1, n_2, ..., n_m$ $(n_1+n_2+...+n_m=n)$ sonlar $k_1, k_2, ..., k_m$ $(k_1+k_2+...+k_m=n)$ sonlarning o'rin almashtirishlari yordamida hosil qilinishi mumkin bo'lsa, u holda $a_1^{n_1}a_2^{n_2}...a_m^{n_m}$ va $a_1^{k_1}a_2^{k_2}...a_m^{k_m}$ hadlarning koefitsientlari o'zaro teng bo'ladi. Shuning uchun n sonining $n=n_1+n_2+...+n_m$ ko'rinishda ifodalanishlaridan qandaydir shartni bajaradigan birortasini, masalan, $n_1 \geq n_2 \geq ... \geq n_m$ (yoki $n_1 \leq n_2 \leq ... \leq n_m$) shartni qanoatlantiradiganini topib, unga mos $a_1^{n_1}a_2^{n_2}...a_m^{n_m}$ ifodada daraja ko'rsatgichlarini mumkin bo'lgan barcha usullar bilan almashtirish kerak bo'ladi.

Masalan, 5- misoldagi a^2b, a^2c, ab^2, ac^2, b^2c va bc^2 hadlarning ko'phadiy koeffitsientlari o'zaro tengdir. Yuqorida ko'rsatilgan shart asosida 3 sonini manfiymas butun sonlar yigindisi ko'rinisida bo'laklashning 3 imkoniyati bor: 3=3+0+0, 3=2+1+0, 3=1+1+1. Shuning uchun, $(a+b+c)^3$ ifodaning yoyilmasida 3 xil turli koeffitsientlarga egamiz: $C_3(3,0,0)=1$, $C_3(2,1,0)=3$ va $C_3(1,1,1)=6$. Demak,

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+$$

$$+3(a^2b+a^2c+ab^2+ac^2+b^2c+bc^2)+6abc.$$

Ko'phad formulasi yordamida ko'phadiy koeffitsientlarning, ya'ni $C_n(n_1,n_2,...,n_m)$ sonlarning ba'zi xossalarini osonlik bilan isbotlash mumkin. Masalan,

$$\sum_{n=n_1+n_2+...+n_m} C_n(n_1,n_2,...,n_m)=m^n,$$

bu yerda yig'indi $n_1+n_2+...+n_m=n$ shartni qanoatlantiruvchi barcha manfiymas butun $n_1,n_2,...,n_m$ sonlar uchun amalga oshiriladi va qo'shiluvchilar tartibi e'tiborga olinadi.

Haqiqatdan ham, agar ko'phad formulasida $a_1=a_2=...=a_m=1$ deb olsak, kerakli tenglikni hosil qilamiz.

Nazorat uchun savollar:

1. Takrorli o'rin almashtirishlar sonini qanday hisoblash mumkin?
2. Takrorli o'rin almashtirish va takrorli o'rinlashtirish orasida qanday farq bor?
3. Takrorli o'rin almashtirishlar soni formulasidan foydalanib takrorlanishi bo'lmagan gruppalashlar sonini hisoblash mumkinmi?
4. Ko'phad formulasining Nyuton binomi formulasidan qanday farqi bor?
5. Ko'phad koeffitsientlarning qanday xossalarini bilasiz?

Adabiyotlar:

1. Mendelson E. Introduction to mathematical logic. Sixth edition. New York.Taylor&Francis Group,2015
2. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012.
3. H.T. To'rayev, I. Azizov Matematik mantiq va diskret matematika. 1,2 jild. "Tafakkur-Bo'stoni", Toshkent, 2011y.
4. Anderson D.A.Diskretnaya matematika i kombinatorika. M."Vilyams",2004g.-960s.ISBN5-8459-0498-6

15 ma'ruza: Graflar va graf modellari. Graf terminologiyasi va graflarning maxsus tiplari.

Reja:

1. **Graflar nazariyasining boshlang'ich ma'lumotlari.**
2. **Grafning geometrik ifodalanishi, uchlar.**
3. **Qirralar va yoylar insidentligi.**
4. **Grafning abstrakt ta'rifi va u bilan bog'liq boshlang'ich tushunchalar.**

**Kalit so`zlar:** uch, sirtmoq, qirra, yoy, multigraf, tugun, boshlang`ich, insidentlik, yo`nalish, nolgraf, izomorf, valentlik.

Ushbu ma'ruzada graflar nazariyasi elementlari qaraladi. Dastlab graflar haqida qisqa tarixiy ma'lumotlar, grafning abstrakt matematik tushuncha sifatidagi ta'rifi va u bilan bog'liq boshlang'ich tushunchalar, graflarning geometrik ravishda, maxsus turdagi ko'phad yordamida, qo'shnilik va insidentlik matritsalari vositasida berilishi yoritiladi. So'ngra grafning elementlari ustida sodda amallar, graflarni birlashtirish, biriktirish va ko'paytirish amallari, marshrutlar va zanjirlar, grafning bog'lamliligi tushunchasi, Eyler va Gamilton graflari, graflarda masofa tushunchasi, minimal masofali yo'l haqidagi masala, daraxt va unga ekvivalent tushunchalar, grafning siklomatik soni bayon qilinadi[2, 641 bet].

Graflar nazariyasi haqida umumiy ma'lumotlar. 1736 yilda L. Eyler tomonidan o'sha davrda qiziqarli amaliy masalalardan biri hisoblangan Kyonigsberg[40] ko'priklari haqidagi masalaning qo'yilishi va yechilishi **graflar nazariyasining** paydo bo'lishiga asos bo'ldi.

Kyonigsberg shahridagi Pregel daryosi ustida qurilgan yettita ko'priklar joylashuvi 1-shakldagi qadimiy xaritada tasvirlangan va qurilishi tartibida 1, 2, 3, 4, 5, 6 va 7 raqamlar bilan belgilangan. Pregel daryosi Kyonigsberg shahrini o'sha davrda to'rtta A, B, C va D qismlarga bo'lgan. Shaharning ixtiyoriy qismida joylashgan uydan chiqib yettita ko'priklardan faqat bir martadan o'tib, yana o'sha uyga qaytib kelish mumkinmi? Kyonigsberg ko'priklari haqidagi bu masalani hal qilish jarayonida graflarda maxsus marshrut mavjudligi shartlari ham topildi. Bu natijalar e'lon qilingan tarixiy ilmiy ishning birinchi sahifasi 2- shaklda keltirilgan. L. Eylerning bu maqolasi yuz yildan ko'p vaqt mobaynida graflar nazariyasi bo'yicha yagona ilmiy ish bo'lib keldi.

XIX asrning o'rtalarida graflar nazariyasi bilan bog'liq tadqiqotlar G. Kirxgof[41] va A. Keli[42] ishlarida paydo bo'ldi.

"Graf" iborasi D. Kyonig[43] tomonidan 1936 yilda graflar nazariyasiga bag'ishlangan dastlabki darslikda[44] uchraydi.

Graflar nazariyasi bo'yicha tadqiqotlar natijalari inson faoliyatining turli sohalarida qo'llaniladi. Ulardan ba'zilari quyidagilardir: boshqotirmalarni hal qilish; qiziqarli o'yinlar; yo'llar, elektr zanjirlari, integral sxemalari va boshqarish sistemalarini loyihalashtirish; avtomatlar, blok-sxemalar va komp'yuter uchun programmalarni tadqiq qilish va hokazo.

Grafning abstrakt ta'rifi va u bilan bog'liq boshlang'ich tushunchalar. Avvalo, grafning abstrakt matematik tushuncha sifatidagi ta'rifini va boshqa ba'zi sodda tushunchalarni keltiramiz. V qandaydir bo'shmas to'plam bo'lsin. Uning $v_1 \in V$ va $v_2 \in V$ elementlaridan tuzilgan $< v_1, v_2 >$ ko'rinishdagi barcha juftliklar (kortejlar) to'plamini (V to'plamning o'z-o'ziga Dekart ko'paytmasini) $V \times V$ bilan belgilaymiz.

Graf deb shunday $< V, U >$ juftlikka aytiladiki, bu yerda $V \neq \varnothing$ va U – $< v_1, v_2 >$ ($v_1 \in V$, $v_2 \in V$) ko'rinishdagi juftliklar korteji[45] bo'lib, $V \times V$ to'plamning elementlaridan tuzilgandir.

Bundan buyon grafni belgilashda $< V, U >$ yozuv o'rniga (V, U) yozuvdan foydalanamiz. Grafning tashkil etuvchilarini ko'rsatish muhim bo'lmasa, u holda uni lotin alifbosining bitta harfi, masalan, G bilan belgilaymiz.

$G = (V, U)$ graf berilgan bo'lsin. V to'plamning elementlariga G **grafning uchlari**, V to'plamning o'ziga esa, **graf uchlari to'plami** deyiladi.

Graflar nazariyasida "uch" iborasi o'rniga, ba'zan, **tugun** yoki **nuqta** iborasi ham qo'llaniladi. Umuman olganda, hanuzgacha graflar nazariyasining ba'zi iboralari bo'yicha

---

[40] Kyonigsberg (Königsberg) – bu shahar 1255 yilda asoslangan bo'lib, Sharqiy Prussiyadagi Pregel daryosi qirg'oqlarida joylashgan. 1946 yildan boshlab Kaliningrad, hozir Rossiya Federatsiyasi tarkibida.

[41] Kirxgof (Kirchhoff Gustav Robert, 1824-1887) – olmon faylasufi, fizigi.

[42] Keli yoki Keyli (Cayley Artur, 1821-1895) – ingliz matematigi.

[43] Kyonig (Dénes König, 1884-1944) – venger matematigi.

[44] Bu darslik olmon tilida yozilgan.

[45] Bundan keyin "juftliklar korteji" iborasi o'rniga, qisqacha kortej iborasini qo'llaymiz.

umumiy kelishuv qaror topmagan. Shuning uchun, bundan keyingi ta'riflarda, imkoniyat boricha, muqobil (alternativ) iboralarni ham keltirishga harakat qilamiz.

$G=(V,U)$ grafning ta'rifiga ko'ra, U bo'sh kortej bo'lishi ham mumkin. Agar U bo'sh bo'lmasa, u holda bu kortej (a,b) ($a\in V$, $b\in V$) ko'rinishdagi juftliklardan[46] tashkil topadi, bunda $a=b$ bo'lishi hamda ixtiyoriy (a,b) juftlik U kortejda istalgancha marta qatnashishi mumkin.

$(a,b)\in U$ juftlikni tashkil etuvchi a va b uchlarning joylashish tartibidan bog'liq holda, ya'ni yo'nalishning borligi yoki yo'qligiga qarab, uni turlicha atash mumkin. Agar (a,b) juftlik uchun uni tashkil etuvchilarning joylashish tartibi ahamiyatsiz, ya'ni $(a,b)=(b,a)$ bo'lsa, (a,b) juftlikka **yo'naltirilmagan (oriyentirlanmagan) qirra** (yoki, qisqacha, **qirra**) deyiladi. Agar bu tartib muhim, ya'ni $(a,b)\neq(b,a)$ bo'lsa, u holda (a,b) juftlikka **yoy** yoki **yo'naltirilgan (oriyentirlangan) qirra** deyiladi.

U kortejning tarkibiga qarab, uni yo **grafning qirralari korteji**, yo **yoylari korteji**, yoki **qirralari va yoylari korteji** deb ataymiz.

Grafning uchlari va qirralari (yoylari) uning **elementlari** deb ataladi. $G=(V,U)$ graf elementlarining soni ($|V|+|U|$)ga tengdir, bu yerda G grafning uchlari soni $|V|\neq 0$ va $|U|$ bilan uning qirralari (yoylari) soni belgilangan[2](641bet).

Grafning qirrasi (yoyi), odatda, uni tashkil etuvchi uchlar yordamida (a,b), yoki ab, yoki $(a;b)$ ko'rinishda belgilanadi. Boshqa belgilashlar ham ishlatiladi: masalan, yoy uchun $\overrightarrow{(a,b)}$ yoki $\overleftarrow{(a,b)}$, qirra uchun $\overleftrightarrow{(a,b)}$, yoy yoki qirra uchun u (ya'ni uchlari ko'rsatilmasdan bitta harf vositasida) ko'rinishda.

Graf yoyi uchun uning chetki uchlarini ko'rsatish tartibi muhim ekanligini ta'kidlaymiz, ya'ni (a,b) va (b,a) yozuvlar bir-biridan farq qiluvchi yoylarni ifodalaydi. Agar yoy (a,b) ko'rinishda ifodalangan bo'lsa, u holda a uning **boshlang'ich uchi**, b esa **oxirgi uchi** deb ataladi. Bundan tashqari, yoy (a,b) ko'rinishda yozilsa, u haqida a **uchdan chiquvchi (boshlanuvchi)** va b **uchga kiruvchi (uchda tugovchi)** yoy deb aytish ham odat tusiga kirgan.

Qirra uchun uning (a,b) yozuvidagi harflar joylashish tartibi muhim rol o'ynamaydi va a va b elementlar **qirraning uchlari** yoki **chetlari** deb ataladi.

Agar grafda yo (a,b) qirra, yo (a,b) yoy, yoki (b,a) yoy topilsa, u holda a **va** b **uchlar tutashtirilgan** deyiladi. Agar grafning ikkita uchini tutashtiruvchi qirra yoki yoy bor bo'lsa, u holda ular **qo'shni uchlar** deb, aks holda esa, **qo'shni bo'lmagan uchlar** deb aytiladi.

Grafning ikkita uchi qo'shni bo'lsa, ular shu uchlarni tutashtiruvchi **qirraga (yoyga) insident**, o'z navbatida, qirra yoki yoy bu **uchlarga insident** deyiladi.

Grafda ikkita qirra (yoy) umumiy chetga ega bo'lsa, ular **qo'shni qirralar (yoylar)** deyiladi.

Shuni ta'kidlash kerakki, qo'shnilik tushunchasi grafning bir jinsli, insidentlik tushunchasi esa uning turli jinsli elementlari orasidagi munosabatni ifodalaydi.

Ba'zan graf undagi elementlar soniga qarab, ya'ni **uchlar soni** m va **qirralar (yoylar) soni** n ga qarab belgilanadi va bu holda grafni (m,n)**-graf** deb ataydilar.

Agar $G=(V,U)$ grafda U kortej faqat qirralardan iborat bo'lsa, u holda **yo'naltirilmagan (oriyentirlanmagan)** va faqat yo'naltirilgan (oriyentirlangan) qirralardan (ya'ni, yoylardan) tashkil topgan bo'lsa, u holda u **yo'naltirilgan (oriyentirlangan) graf** deb ataladi. Oriyentirlangan graf, qisqacha, **orgraf** deb ham ataladi.

Qator hollarda oriyentirlanmagan qirralari ham, oriyentirlangan qirralari ham bo'lgan graflar bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi. Bunday graflar **aralash graflar** deb ataladi.

---

[46] Bu yerda ham juftlikning (kortejning) odatdagi $<a,b>$ yozuvi o'rniga (a,b) yozuvdan foydalanamiz.

Agar $G=(V,U)$ grafning (orgrafning) U korteji tarkibida $V\times V$ to‘plamdan olingan takrorlanuvchi elementlar bo‘lsa, u holda ular **karrali** yoki **parallel qirralar (yoylar)** deb ataladi. Karrali qirralari yoki yoylari bo‘lgan graf **multigraf** deyiladi.

Ikkala chetki (boshlang‘ich va oxirgi) uchlari ustma-ust tushgan qirra (yoy), ya’ni grafning $(a,a)\in U$ elementi **sirtmoq** deb ataladi. Sirtmoq, odatda, yo‘naltirilmagan deb hisoblanadi. Qirralari (yoylari) orasida sirtmoqlari bo‘lgan graf **psevdograf** deyiladi.

Umumiy holda uchlar to‘plami V va (yoki) qirralar (yoylar, qirra va yoylar) korteji U cheksiz ko‘p elementli bo‘lishi mumkin. Bundan keyin V to‘plam va U kortej faqat chekli bo‘lgan $G=(V,U)$ graflarni qaraymiz. Bunday graflar **chekli graflar** deb ataladi.

Hech qanaqa qirra (yoy) bilan bog‘lanmagan uch **yakkalangan (ajralgan, xolis, yalong‘och) uch** deb ataladi.

Faqat yakkalangan uchlardan tashkil topgan graf (ya’ni, grafda qirralar va yoylar bo‘lmasa) **nolgraf** yoki **bo‘sh graf** deb ataladi. Uchlari soni m ga teng bo‘lgan bo‘sh grafni O_m yoki N_m kabi belgilash qabul qilingan.

Istalgan ikkita uchlari qo‘shni bo‘lgan sirtmoqsiz va karrali qirralarsiz oriyentirlanmagan graf **to‘la graf** deb ataladi. Uchlari soni m ga teng bo‘lgan to‘la graf K_m bilan belgilanadi. Ravshanki, K_m grafning qirralar soni $C_m^2=\dfrac{m(m-1)}{2}$ bo‘ladi.

Agar orgrafning istalgan ikkita uchini har bir yo‘nalishda tutashtiruvchi faqat bittadan yoy mavjud bo‘lsa, u holda unga **to‘la orgraf** deb ataladi. Ravshanki, to‘la grafdagi qirralarning har birini ikkita (yo‘nalishlari bir-biriga qarama-qarshi bo‘lgan) yoylarga almashtirilsa, natijada to‘la orgraf hosil bo‘ladi. Shuning uchun, to‘la orgrafdagi yoylar soni oriyentirlanmagan to‘la grafdagi qirralar sonidan ikki baravar ko‘pdir, ya’ni uchlari m ta bo‘lgan to‘la orgrafdagi yoylar soni $2C_m^2=m(m-1)$ bo‘ladi.

Agar grafning uchlariga qandaydir belgilar, masalan, $1,2,...,m$ sonlari mos qo‘yilgan bo‘lsa, u **belgilangan graf** deb ataladi.

Agar $G=(V,U)$ va $G'=(V',U')$ graflarning uchlari to‘plamlari, ya’ni V va V' to‘plamlar orasida uchlarning qo‘shnilik munosabatini saqlaydigan o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatish mumkin bo‘lsa, u holda G va G' graflar **izomorf graflar** deb ataladi. Bu ta’rifni quyidagicha ham ifodalash mumkin: agar $\forall x,y\in V$ va ularga mos bo‘lgan $x',y'\in V'$ ($x\leftrightarrow y$, $x'\leftrightarrow y'$) uchun $xy\leftrightarrow x'y'$ ($xy\in U$, $x'y'\in U'$) bo‘lsa, u holda G va G' graflar izomorfdir. Agar izomorf graflardan biri oriyentirlangan bo‘lsa, u holda ikkinchisi ham, albatta, oriyentirlangan bo‘lishi va ulardagi mos yoylarning yo‘nalishlari ham bir-birlariga mos bo‘lishlari shart[2](668 bet).

Graf uchiga insident qirralar soni shu **uchning lokal darajasi**, yoki, qisqacha, **darajasi**, yoki **valentligi** deb ataladi. Grafdagi a uchning darajasini $\rho(a)$ bilan belgilaymiz.

Sirtmoqqa insident bo‘lgan uchning darajasini aniqlashda shuni e’tiborga olish kerakki, qaralayotgan masalaga bog‘liq holda sirtmoqni bitta qirra deb ham, ikkita qirra deb ham hisoblash mumkin. Ravshanki, ajralgan uchning darajasi nolga teng. Darajasi birga teng uch **chetki** (yoki **osilgan**) **uch** deb ataladi. Chetki (osilgan) uchga insident qirra ham **chetki** (yoki **osilgan**) **qirra** deb ataladi.

Agar grafning barcha uchlari bir xil r darajaga ega bo‘lsa, u holda bunday graf r **darajali regulyar graf** deb ataladi. Uch darajali regulyar graf **kubik** (yoki **uch valentli**) **graf** deb ataladi. O_m graf nol darajali regulyar graf ekanligini, K_m esa ($m-1$) darajali regulyar graf ekanligini ta’kidlaymiz.

Ko‘rinib turibdiki, oriyentirlanmagan grafda barcha uchlar darajalarining yig‘indisi qirralar sonining ikki baravariga teng juft son bo‘ladi, chunki qirralarni sanaganda har bir qirra hisobda ikki marta qatnashadi. Shunday qilib, XVIII asrdayoq L. Eyler tomonidan isbotlangan quyidagi tasdiq o‘rinlidir.

1-lemma ("ko'rishishlar" haqida). *Ixtiyoriy oriyentirlanmagan grafda barcha uchlar darajalari yig'indisi qirralar sonining ikki baravariga teng[2]653bet).*

Agar grafning uchlar to'plamini o'zaro kesishmaydigan shunday ikkita qism to'plamlarga (bo'laklarga) ajratish mumkin bo'lsaki, grafning ixtiyoriy qirrasi bu to'plamlarning biridan olingan qandaydir uchni ikkinchi to'plamdan olingan biror uch bilan tutashtiradigan bo'lsa, u holda bunday graf **ikki bo'lakli graf (bixromatik** yoki **Kyonig grafi)** deb ataladi. Ta'rifdan ko'rinib turibdiki, ikki bo'lakli grafning har bir bo'lagidagi ixtiyoriy ikkita uchlar qo'shni bo'la olmaydi. Biror bo'lagida faqat bitta uch bo'lgan to'la ikki bo'lakli graf **yulduz** deb ataladi.

Agar ikki bo'lakli grafning turli bo'laklariga tegishli istalgan ikkita uchi qo'shni bo'lsa, u holda bu graf **to'la ikki bo'lakli graf** deb ataladi. To'la ikki bo'lakli grafni $K_{m,n}$ bilan belgilaymiz, bu yerda m va n bilan grafning bo'laklaridagi uchlar sonlari belgilangan. $K_{m,n}=(V,U)$ graf uchun $|V|=m+n$ va $|U|=mn$ bo'lishi ravshan, bu yerda $|V|$ – $K_{m,n}$ grafning uchlari soni, $|U|$ – uning qirralari soni.

Grafning ikki bo'lakli graf bo'lishi haqidagi ba'zi qo'shimcha ma'lumotlar (Kyonig teoremasi) ushbu bobning 4- paragrafida keltirilgan.

Ikkidan katta ixtiyoriy natural k son uchun k **bo'lakli graf** tushunchasini ham kiritish mumkin.

1- misol. O'zbekiston Respublikasi hududidagi aeroportlar to'plamini V bilan, bu shaharlar orasida belgilangan vaqt mobaynida amalga oshirilayotgan samolyotlarning uchib qo'nish hodisalari kortejini U bilan belgilaymiz. U holda (V,U) juftlikni graf deb qarash mumkin. Bu yerda grafning uchlariga aeroportlar, yoylariga esa samolyotlarning uchib qo'nish hodisalari mos keladi. Tabiiyki, (V,U) grafda karrali yoylar bo'lishi mumkin, agar, qandaydir sababga ko'ra, samolyot uchgan aeroportga qaytib qo'nsa, u holda bu hodisaga qaralayotgan grafdagi sirtmoq mos keladi. ■

2- misol. Qadimgi boshqotirma masalalar qatoriga kiruvchi quyidagi masalani qaraymiz. Biror idishdagi hajmi 8 birlik suyuqlikni faqat o'sha idish hamda 5 va 3 birlik hajmli idishlar vositasida teng ikki qismga bo'ling[47]. 8, 5 va 3 birlik hajmli idishlardagi suyuqlik hajmini mos ravishda a, b va c bilan belgilab, muayyan bir vaqt uchun idishlardagi suyqlikning hajmlari asosida qaralayotgan sistemaning holatini ifodalovchi $<a,b,c>$ uchliklarni tuzamiz. Masalaning shartiga ko'ra a, b va c o'zgaruvchilar butun qiymatlar qabul qilgan holda $0\le a\le 8$, $0\le b\le 5$ va $0\le c\le 3$ shartlarni qanoatlantirishlari kerak. Bu shartlarni qanoatlantiruvchi holatlar quyidagilardir:

$$<8,0,0>,\ <7,1,0>,\ <7,0,1>,\ <6,2,0>,\ <6,1,1>,\ <6,0,2>,\ <5,3,0>,\ <5,2,1>,\ <5,1,2>$$
$$,\ <5,0,3>,\ <4,4,0>,\ <4,3,1>,\ <4,2,2>,\ <4,1,3>,\ <3,5,0>,\ <3,4,1>,\ <3,3,2>,$$
$$<3,2,3>,\ <2,5,1>,\ <2,4,2>,\ <2,3,3>,\ <1,5,2>,\ <1,4,3>,\ <0,5,3>.$$

Holatlar to'plamini V bilan belgilaymiz. Suyuqlikni (yoki uning bir qismini) idishlarning biridan boshqa birortasiga quyish natijasida sistema bir holatdan boshqa holatga o'tishi mumkin. Ta'kidlash kerakki, yuqoridagi holatlarning ixtiyoriysidan boshqa birortasiga bevosita yoki bilvosita o'tish imkoniyati mavjud bo'lmasligi ham mumkin. Sistemaning bir holatdan boshqa holatga bevosita o'tishlari to'plamini U bilan belgilaymiz. Natijada hosil bo'lgan (V,U) juftlikni graf deb qarash mumkin. Bu grafning uchlari sistema holatlariga, yoylari (qirralari) esa, bevosita o'tishlarga mos keladi.

Berilgan masalani hal qilish uchun (V,U) grafning yoylaridan tashkil topgan shunday ketma-ketlik tuzish kerakki, bu ketma-ketlikning birinchi hadi $<8,0,0>$, oxirgi hadi esa $<4,4,0>$ bo'lsin. Bunday ketma-ketliklardan biri quyida keltirilgan:

$$<8,0,0>,\ <5,0,3>,\ <5,3,0>,\ <2,3,3>,\ <2,5,1>,$$

---

[47] Bu masalani fransuz shoiri va yozuvchisi Bashe de Mezeriakning (1587-1638) matematikaga bag'ishlangan ishlarida topish mumkin.

$$<7,0,1>, <7,1,0>, <4,1,3>, <4,4,0>. \blacksquare$$

Nazorat uchun savollar:

1. Qanday masalaning qo'yilishi va yechilishi graflar nazariyasining paydo bo'lishiga asos bo'ldi?
2. "Graf" iborasi birinchi bo'lib kim tomonidan va qachon kiritilgan?
3. Grafning abstrakt matematik tushuncha sifatidagi ta'rifini bilasizmi?
4. Grafning abstrakt ta'rifidagi juftlikni tashkil etuvchilar bir-biridan nima bilan farq qiladi?
5. Grafning uchi deganda nimani tushunasiz?
6. Grafning qirrasi nima?
7. Grafning elementlari deganda nimani tushunasiz?

Adabiyotlar:

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012.
2. H.T. To'rayev, I. Azizov Matematik mantiq va diskret matematika. 1,2 jild. "Tafakkur-Bo'stoni", Toshkent, 2011y.
3. Anderson D.A.Diskretnaya matematika I kombinatorika. M."Vilyams",2004g.-960s.ISBN5-8459-0498-6

16-ma'ruza. Graflarning berilish usullari. Bog'lanishli graflar.

Reja:

1. **Grafning geometrik ifodalanishi.**
2. **Grafning maxsus turdagi ko'phad yordamida berilishi.**
3. **Qo'shnilik matritsalari.**
4. **Insidentlik matritsalari.**

**Kalit so`zlar:** matritsa, ko`phad, qo`shnilik matritsasi, insidentlik matritsasi. muntazam ko`pyoq, planar graf.

Grafning geometrik ifodalanishi. Graflarning turlicha berilish usullari mavjud. Grafning abstrakt matematik ta'rifi uning berilish usullaridan biridir. Grafning abstrakt matematik ta'rifi uni tasavvur qilish, anglash, uning xossalarini o'rganish va bu xossalarni amalda qo'llash jarayonida ba'zi qiyinchiliklar tug'dirishi tabiiydir. Shuning uchun grafning boshqa berilish usullaridan ham foydalaniladi. Masalan, grafning elementlarini, ya'ni uchlari va qirralarini (yoylarini) yozish yoki aytish grafning berilish usuli sifatida qaralishi munkin. Albatta, grafning yana boshqa berilish usullari ham mavjud. Quyida bu usullarning bir nechasi bilan tanishamiz.

Grafning uchlarini tekislikda yoki fazoda nuqtalar bilan, qirralarini (yoylarini) esa mos uchlarni tutashtiruvchi uzluksiz chiziqlar bilan ifodalab, qandaydir diagrammaga – **grafning ko'rgazmali tasviriga** ega bo'lamiz. Agar uchlar to'plami va bu uchlarning tutashishlarini ko'rgazmali qilib taqdim qilish kerak bo'lsa, grafning geometrik tasvirlanishiga mos shaklni qog'ozda chizib grafni tasvirlash mumkin.

Shuni ta'kidlaymizki, ba'zi hollarda diagrammada graf uchlari doirachalar yordamida yoki qandaydir boshqa usulda ifodalanadi. Grafning qirralariga (yoylariga) mos chiziqlarning to'g'ri yoki egri bo'lishi va ularning uzunligi ahamiyatga ega emas. Muhimi, bu chiziqlar uzluksiz bo'lib, grafning qandaydir ikkita uchlarini tutashtirishi lozim. Agar qirra yo'nalishga ega bo'lsa (ya'ni u yoy bo'lsa), u holda bunday qirrani ifodalovchi chiziqda yo'nalish biror usul bilan, masalan, strelka bilan ko'rsatiladi.

Ixtiyoriy graf uchun bunday diagrammalarni istalgancha tuzish mukinligi ravshan. Agar biror diagrammada grafning uchlariga mos keluvchi nuqtalar ustma-ust tushmasa, qirralarga mos keluvchi chiziqlar, chetki nuqtalarni hisobga olmaganda, umumiy nuqtalarga ega bo'lmasa, bunday diagramma **grafning geometrik ifodalanishi** deyiladi. Shuni ta'kidlash kerakki, bitta graf turlicha geometrik ifodalanishi mumkin.

Graflar izomorfligining ta'rifi va grafni geometrik ifodalashning mohiyatidan kelib chiqadiki, abstrakt ta'rif yordamida ifodalangan graf va uning geometrik ifodalanishi o'zaro izomorf bo'ladi. Tabiiyki, izomorf graflar turlicha geometrik ifodalanishlari mumkin.

1- teorema. *Har qanday chekli grafni 3 o'lchovli Evklid*[48] *fazosida*[49] *geometrik ifodalash mumkin.*

Isboti. Teoremaning quyidagi konstruktiv isbotini keltiramiz. Grafning abstrakt ta'rifiga binoan uning hech bo'lmasa bitta uchi mavjud. Agar grafda faqat bitta uch bo'lsa, u holda uni 3 o'lchovli Evklid fazosining biror nuqtasi sifatida ifodalaymiz. Agar grafda uchlar bittadan ko'p bo'lsa, u holda ularni uch o'lchovli Evklid fazosidagi biror to'g'ri chiziqning (hech qaysi ikkitasi ustma-ust tushmaydigan) nuqtalariga mos keladi deb hisoblaymiz. Shu to'g'ri chiziqdan qirralarning (yoylarning) har biriga mos keluvchi turli yarim tekisliklarni o'tkazamiz (graf chekli bo'lgani uchun buning imkoniyati bor). Har bir qirrani (yoyni) unga mos yarim tekislikda, chetlari mos uchlarni ifodalovchi nuqtalarda bo'lgan hamda bu to'g'ri chiziq bilan boshqa umumiy nuqtasi bo'lmagan qandaydir chiziq vositasida ifodalaymiz. Yarim tekisliklarning tuzilishiga ko'ra bu chiziqlar, chetki nuqtalarni hisobga olmaganda, umumiy nuqtalarga ega emas. ■

Shuni ham ta'kidlash kerakki, 1- teoremadagi 3ni 2ga almashtirib bo'lmaydi, chunki tekislikda qirralarini (yoylarini) ifodalovchi kesishmaydigan (aniqrog'i, chetki nuqtalaridan boshqa umumiy nuqtalari bo'lmagan) chiziqlar yordamida tasvirlash imkoniyati faqat ba'zi graflargagina xos, ya'ni har qanday grafning 2 o'lchovli Evklid fazosida (tekislikda) geometrik ifodalanishi mavjud bo'lavermaydi.

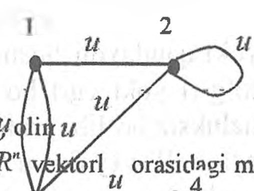
Graflarning geometrik ifodalanishiga doir misollar keltiramiz.

1- misol. 1- shaklda tasvirlangan grafni $G=(V,U)$ deb belgilaymiz. Berilgan G graf belgilangan graf bo'lib, 4ta uch va 6ta qirraga ega. Demak, u (4,6)-grafdir. Bu graf uchun: $V=\{1,2,3,4\}$, $U=<u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6>$, $u_1=(1,2)$, $u_2=u_3=(1,3)$, $u_4=(2,3)$, $u_5=(3,4)$, $u_6=(2,2)$. G grafning barcha u_i $(i=\overline{1,6})$ qirralari oriyentirlanmagan (chunki

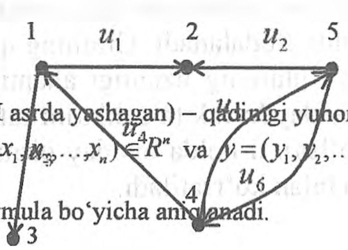
uchlarini tutashtiruvchi chiziklarda yo'nalish ko'rsatilmagan) bo'lgani uchun G oriyentirlanmagan grafdir. Grafning qirralaridan biri, aniqrog'i, u_6 sirtmoqdir, u_2 va u_3 esa karrali qirralardir. Bu grafda, masalan, 1 va 2 uchlar qo'shni, 1 va 4 uchlar esa qo'shni emas. Undagi 2 va 3 uchlar u_4 qirraga insident va, aksincha, u_4 qirra 2 va 3 uchlarga insidentdir. Bu yerda u_4 va u_5 qirralar qo'shni qirralardir, chunki ular umumiy uchga (3 uch) ega, u_1 va u_5 qirralar esa qo'shni emas. ■

2- misol. Geometrik ifodalanishi 2- shakldagi ko'rinishda bo'lgan oriyentirlangan grafni qaraymiz. Bu grafda o'n bitta element bor: 5ta uch va 6ta yoy, ya'ni shaklda (5,6)-orgraf berilgan. Bu grafni $G=(V,U)$ bilan belgilaymiz, bu yerda $V=\{1,2,3,4,5\}$, $U=<(1,2),(1,3),(5,2),(4,1),(4,5),(5,4)>$ yoki $U=<u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6>$. Berilgan G orgrafda sirtmoq ham, karrali yoylar ham yo'q. Bu grafning $(1,3)$ yoyi uchun 1 boshlang'ich, 3 uch esa oxirgi uchdir. ■

3- misol. XVIII asrda Kyonigsberg ko'priklari haqidagi masalaning qo'yilishi va L. Eyler



1- shakl



2- shakl

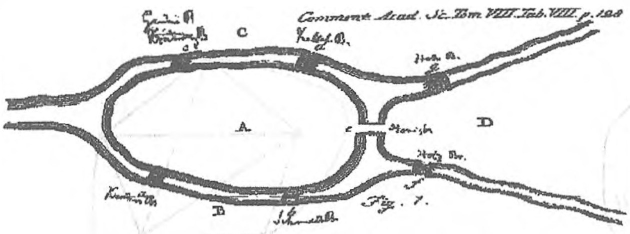
---

[48] Evklid (Ευκλείδης, eramizdan oldingi III asrda yashagan) – qadimgi yunon (grek) olimi.

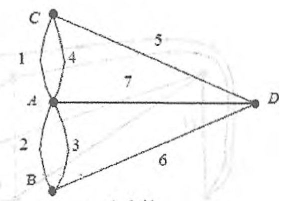
[49] n o'lchovli Evklid fazosida ikkita $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n$ va $y=(y_1,y_2,...,y_n)\in R^n$ vektorlar orasidagi masofa (metrika) $d(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2\right)^{1/2}$ formula bo'yicha aniqlanadi.

tomonidan yechlishi graflarning matematik nazariyasi paydo bo‘lishiga xizmat qilganligi yuqorida ta’kidlangan edi.

Kyonigsberg shahridagi Pregel daryosi ustida qurilgan yettita ko‘priklar joylashuvi 3- shaklda tasvirlangan (bu shakl L. Eylerning birinchi sahifasi ushbu bobning 1- paragrafda keltirilgan ilmiy ishidan olindi).



3- shakl



4- shakl

Kyonigsberg ko‘priklari haqidagi masalada quyidagi savolga javob berish so‘raladi: “Shaharning to‘rtta A, B, C va D qismlaridan birida joylashgan uydan chiqib, yettita ko‘priklarning har biridan faqat bir marta o‘tgan holda yana o‘sha uyga qaytib kelish mumkinmi?”

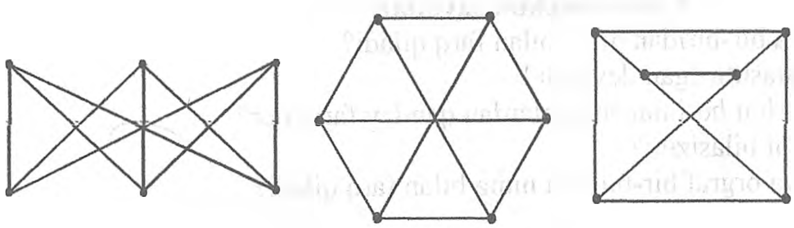
Bu savolga javob izlash maqsadida ko‘priklardan o‘tishlar muhimligini e’tiborga olgan holda qo‘yilgan masalani tahlil qilish uchun 4- shaklda tasvirlangan grafni qaraymiz. Bu grafning uchlari shaharning A, B, C va D qismlariga, qirralari esa ko‘priklarga mos keladi. Qaralayotgan graf oriyentirlanmagan graf bo‘lib, 4ta uch va 7ta qirralardan tashkil topgan. Uning qirralari orasida karralilari bor, lekin sirtmoqlar yo‘q.

Kyonigsberg shahridagi ko‘priklardan faqat bir marta o‘tgan holda yurish boshlangan joyga qaytib kelish muammosi, 4- shakldagi grafdan foydalangan holda, ushbu bobning 5- paragrafida hal qilinadi. ■

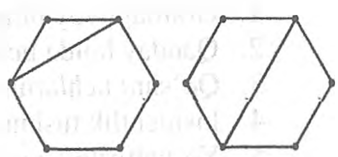
4- misol. 5- shaklda tasvirlangan graflar bir-biriga izomorfdir. ■

5- misol. 6- shaklda tasvirlangan graflarning har biri oltita uch va yettita qirralarga ega bo‘lib, ular izomorf emas. ■

Hammasi bo‘lib beshta **qavariq muntazam ko‘pyoqli** mavjudligi qadimdan ma’lum



5- shakl



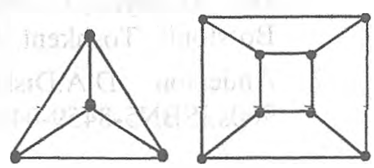
6- shakl

(Evklid isbotlagan): **tetraedr**, **kub**, **oktaedr**, **dodekaedr** va **ikosaedr**. Bu ko‘pyoqlilarning umumiy nomi ham bor – **Platon**[50] **jismlari**. Shunisi qiziqki, barcha Platon jismlariga mos graflar tekislikda geometrik ifodalanadi. Masalan, tetraedr va kubga mos graflarning geometrik ifodalanishi 7- shaklda tasvirlangan.

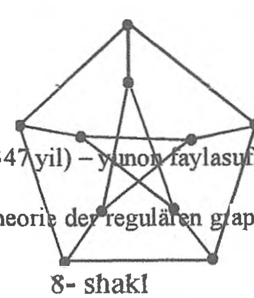
Darvoqe, Platon jismlaridan tetraedr, kub va dodekaedr kubik grafga misol bo‘ladi.

Petersen[51] **grafi**[52] deb ataluvchi 8- shaklda tasvirlangan graf ham kubik grafdir.

Agar graf tekislikda geometrik ifodalanishga ega bo‘lsa, u holda bunday graf **tekis (yassi) graf** deb ataladi. Bunday graf **tekislikda yotuvchi graf** deb ham atalishi mumkin.



7- shakl



8- shakl

---

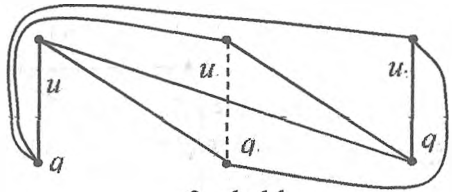
[50] Platon (Πλάτων, eramizdan oldingi 428 yoki 427 yil - eramizdan oldingi 348 yoki 347 yil) – yunon faylasufi.

[51] Petersen (Julius Peter Christian, 1839-1910) – Daniya matematigi.

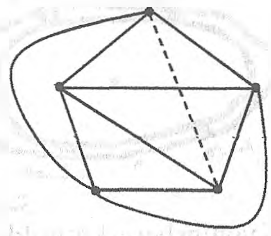
[52] Bu graf haqidagi dastlabki ma’lumot 1891 yilda e’lon qilingan: J. Petersen, Die Theorie der regulären graphs, Acta Math. 15 (1891) 193-220.

Boshqacha so'zlar bilan aytganda, tekis grafning barcha uchlari bir tekislikda yotadi hamda barcha qirralari (yoylari) o'sha tekislikda yotuvchi o'zaro kesishmaydigan uzluksiz chiziqlar bo'lib, ular faqat o'zlari insident bo'lgan uchlardagina umumiy nuqtalarga ega.

Platon jismlariga mos barcha graflar tekis graflardir. Tekis grafga izomorf graf **planar graf** deb ataladi. Tekis bo'lmagan grafga ajoyib misol **uchta uy va uchta quduq haqidagi boshqotirma masalaga** mos grafdir.



9- shakl


10- shakl

Uchta u_1, u_2, u_3 uylar va uchta q_1, q_2, q_3 quduqlar bor. Har bir uydan har bir quduqqa ixtiyoriy ikkitasi kesishmaydigan qilib uzluksiz yo'lakchalar o'tkazish mumkinmi?

Qog'ozda masala shartini qanoatlantiradigan grafni chizishga urinishlar muvaffaqiyatsiz tugaydi. Shunday urinishlardan biri 9- shaklda keltirilgan.

Darvoqe, uchta uy va uchta quduq haqidagi boshqotirma masalaga mos graf har bir bo'lagida uchtadan uchi bo'lgan ikki bo'lakli to'la grafga misol bo'la oladi.

Tekis bo'lmagan grafga yana bir misol beshta uchga ega bo'lgan to'la graf – K_5 grafdir. Bu grafning o'nta qirralari borligi ravshan. Bu yerda ham K_5 grafni hech qaysi ikkita qirralari kesishmaydigan qilib tekislikda chizish muvaffaqiyatsiz tugaydi. 10- shaklda K_5 grafning to'qqizta qirrasi kesishmaydigan uzluksiz chiziqlar qilib chizilgan, lekin o'ninchi chiziq esa uzilishlarga ega, unga tekislikda «joy yo'q»!

Nazorat uchun savollar.

1. Grafdagi yoy bilan qirra bir-biridan nima bilan farq qiladi?
2. Qanday holda uchlar tutashtirilgan deyiladi?
3. Qo'shni uchlarning qo'shni bo'lmagan uchlardan qanday farqi bor?
4. Insidentlik tushunchasini bilasizmi?
5. Yo'naltirilmagan graf va orgraf bir-biridan nima bilan farq qiladi?

Adabiyotlar:

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012.
2. H.T. To'rayev, I. Azizov Matematik mantiq va diskret matematika. 1,2 jild. "Tafakkur-Bo'stoni", Toshkent, 2011y.
3. Anderson D.A.Diskretnaya matematika I kombinatorika. M."Vilyams",2004g.-960s.ISBN5-8459-0498-6

17-ma'ruza. Eng qisqa yo'l muammosi. Graf ustida sodda amallar.

Reja:

1. Marshrutlar va zanjirlar haqida umumiy ma'lumotlar.
2. Marshrutning uzunligi.
3. Grafning bog'lamliligi tushunchasi.

**Kalit so`zlar:** marshrut, boshlanish uch, ichki uch, oraliq uch, zanjir, eng qisqa yo`l.

Uchlari to'plami $V = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ va qirralar korteji $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ bo'lgan oriyentirlanmagan $G = (V, U)$ graf berilgan bo'lsin. Bu G grafdagi uchlar va qirralarning har ikki qo'shni qirralari umumiy chetki uchga ega

$$(..., v_{i_1}, u_{j_1}, v_{i_2}, u_{j_2}, v_{i_3}, ...)$$

ko'rinishdagi chekli yoki cheksiz ketma-ketligi **marshrut** deb ataladi. Marshrutni uning uchlari ketma-ketligi $(..., v_{i_1}, v_{i_2}, ...)$ yoki qirralari ketma-ketligi $(..., u_{j_1}, u_{j_2}, ...)$ ko'rinishda ham belgilash mumkin.

Agar marshrutda qandaydir uchdan oldin uchlar bo'lmasa, bu uchni marshrutning **boshlang'ich uchi** deb, shu uchdan keyin marshrutga tegishli uchlar bo'lmaganda esa, uni marshrutning **oxirgi uchi** deb ataydilar.

Agar marshrutning boshlang'ich uchi v_p va oxirgi uchi v_q bo'lsa, u holda uni v_p **uchdan** v_q **uchga yo'nalgan marshrut** yoki **chetlari** v_p **va** v_q **bo'lgan marshrut** deb ataladi.

Marshrutdagi ikkita qoshni qirralarga tegishli uch **ichki uch** yoki **oraliq uch** deb ataladi.

Marshrutda qirralar va uchlar takrorlanishi mumkin bo'lgani uchun marshrutning ichki uchi, bir vaqtning o'zida, uning boshlang'ich va (yoki) oxirgi uchi bo'lishi ham mumkin va teskarisi, marshrutning boshlang'ich va (yoki) oxirgi uchi uning ichki uchi bo'lishi ham mumkin.

Tabiiyki, marshrut:

– boshlang'ich uchga ham oxirgi uchga ham ega bo'lmasligi mumkin (bunday marshrut **ikki tomonlama cheksiz marshrut** deb ataladi);

– boshlangich uchga ega bo'lib, oxirgi uchga ega bo'lmasligi mumkin yoki, aksincha, oxirgi uchga ega bo'lib, boshlangich uchga ega bo'lmasligi mumkin (**bir tomonlama cheksiz marshrut**);

– yagona qirradan iborat bo'lishi mumkin (**notrivial marshrut**);

– birorta ham qirraga ega bo'lmasligi mumkin (**nol marshrut** yoki **trivial marshrut**).

Marshrutning uzunligi deb undagi qirralar soniga aytiladi.

Turli qirralardan tashkil topgan marshrutga **zanjir** deb ataladi. Agar zanjirning chetlaridan tashqari barcha uchlari turlicha bo'lsa, u holda uni **oddiy zanjir** deb ataydilar.

Berilgan $(v_1, v_2, ..., v_s)$ zanjir yoki oddiy zanjir uchun $v_1 = v_s$ bo'lsa, u **yopiq zanjir** deb ataladi. Hech bo'lmaganda bitta qirraga ega yopiq oddiy zanjir **sikl** deb ataladi.

Sirtmoq yoki bir juft karrali qirralar sikl tashkil etishi ravshandir.

Tushunarliki, grafdagi zanjir grafning qism grafi deb qaralishi mumkin.

1- misol. Ushbu bobning 2- paragrafidagi 1- shaklda tasvirlangan graf uchun

$$(3, u_4, 2, u_1, 1, u_1, 2, u_6, 2, u_4, 3, u_5, 4)$$

ketma-ketlik 3 belgili uchdan 4 belgili uchga yo'nalgan marshrutdir, bunda 3 – boshlang'ich uch, 4 – oxirgi uchdir. Bu marshrutda 1, 2 va 3 belgili uchlar oraliq uchlar hisoblanadi. Qaralayotgan marshrutning uzunligi 6a teng bo'lib, u zanjir bo'la olmaydi, chunki unda 1 belgili uch 2 marta (bir marta oraliq uch sifatida, ikkinchi marta esa oxirgi uch sifatida) qatnashmoqda.

Yana o'sha graf uchun (3,2,1,3) zanjirning oxirgi bo'g'ini sifatida u_2 yoki u_3 qirralardan qaysisi olinishiga bog'liqsiz ravishda, u yopiq zanjir va sikldir. ■

Oriyentirlangan graflar uchun ham undagi yoylarning yo'nalishini (oriyentatsiyasini) inobatga olmasdan oriyentirlanmagan marshrut, zanjir va oddiy zanjir tushunchalarini kiritish mumkin. Lekin, oriyentirlangan graflar uchun oriyentirlangan marshrut tushunchasini kiritish tabiiydir.

Yoylarning oriyentatsiyalari hisobga olingan yoylar va uchlar ketma-ketligi **oriyentirlangan marshrut** deb ataladi.

Oriyentirlangan marshrut uchun zanjir tushunchasiga o'xshash **yo'l** (yoki **oriyentirlangan zanjir**) tushunchasini ham kiritish mumkin. Boshlang'ich va oxirgi uchlari ustma-ust tushadigan oriyentirlangan zanjir **kontur** deb ataladi.

2- misol. Ushbu bobning 2- paragrafidagi 2- shaklda tasvirlangan grafni qaraymiz. Uning uch va qirralaridan tuzilgan

$$(3, u_3, 1, u_4, 4, u_5, 5, u_2, 2, u_1, 1)$$

ketma-ketlik oriyentirlanmagan marshrut va zanjirdir, lekin u oddiy zanjir bo'la olmaydi. Bu ketma-ketlik oriyentirlangan marshrut ham bo'la olmaydi, chunki unda marshrut yo'nalishiga teskari yo'nalishga ega yoylar bor (u_3, u_4, u_1).

Qaralayotgan graf uchun (u_6, u_5, u_2) ketma-ketlik oriyentirlangan marshrutni tashkil etadi. Bu marshrut yo'ldir, lekin u kontur emas. Berilgan grafda faqat bitta kontur bo'lib, bu konturni $(4, u_5, 5, u_6, 4)$ yoki $(5, u_6, 4, u_5, 5)$ ko'rinishda ifodalash mumkin. ■

1- teorema. *Agar grafdagi har bir uchning lokal darajasi ikkidan kichik bo'lmasa, u holda bu graf siklga ega.*

Isboti. Agar grafda sirtmoqlar yoki karrali qirralar bo'lsa, teoremaning tasdig'i to'g'riligi ravshandir. Shuning uchun teorema tasdig'ini graf sirtmoqsiz va karrali qirralari bo'lmagan holda isbotlaymiz.

Faraz qilaylik, $v \in V$ berilgan sirtmoqsiz va karrali qirralari bo'lmagan $G = (V, U)$ grafning ixtiyoriy uchi bo'lsin. Qaralayotgan v uchga qo'shni v_1 uchni va bu uchga v dan farqli boshqa qo'shni v_2 uchni, v_2 uchga esa v_1 dan farqli boshqa qo'shni v_3 uchni, va hakoza, v_i uchga v_{i-1} dan farqli boshqa qo'shni v_{i+1} uchni, va hakoza, tanlab,

$$((v, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{i-1}, v_i), (v_i, v_{i+1}), \dots)$$

qirralar ketma-ketligini tuzamiz. Teoremaning shartlariga ko'ra yuqoridagi jarayonni amalga oshirish va talab etilgan xossaga ega v_{i+1} uchni topish mumkinligini ta'kidlaymiz.

Grafning uchlari to'plami V chekli to'plam bo'lganligidan, yuqorida bayon etilgan uchlar ketma-ketligini qurish jarayonida chekli qadamdan so'ng albatta oldin uchragan uchlardan birini tanlashga majbur bo'lamiz. Agar v_k uch ketma-ketlikda ikki marta uchragan dastlabki uch bo'lsa, ketma-ketlikka qirralar qo'shish jarayonini to'xtatamiz, chunki tuzilgan qirralar ketma-ketligining v_k uch ikki marta qatnashgan qismi biz izlayotgan sikldir.

Agar oriyentirlanmagan grafda chetlari a va b uchlardan iborat marshrut topilsa, bu a va b uchlar **bog'langan** deb, marshrutning o'zi esa a va b **uchlarni bog'lovchi marshrut** debataladi.

Tabiiyki, agar qandaydir uchlarni bog'lovchi marshrut biror a_i uchdan bir necha marta o'tsa, u holda marshrutning siklik qismini olib tashlab (bunda siklik qismning o'rniga marshrutda faqat a_i uch qoldiriladi) yana o'sha uchlarni bog'lovchi oddiy zanjir ko'rinishdagi marshrutni hosil qilish mumkin. Shuning uchun, marshrut bilan bog'langan uchlar doimo oddiy zanjir bilan ham bo'glangan bo'ladi degan xulosaga kelamiz.

Bir-biri bilan ustma-ust tushmaydigan ixtiyoriy ikkita uchlari bog'langan graf **bog'lamli graf** deb ataladi.

Agar grafdagi ikkita uchni biror oddiy zanjir bilan tutashtirish mumkin bo'lsa, u holda bu ikkita uch **ekvivalent** (**bog'langan**) deyiladi. Bunday uchlar to'plami grafda **ekvivalentlik munosabati** bilan aniqlangan deb hisoblanadi. Uchlar to'plami bo'yicha ekvivalentlik munosabatini inobatga olgan holda berilgan grafni **bog'lamlilik komponentalari** (qisqacha, **komponentalari**) deb ataluvchi bog'lamli qismlarning birlashmasi deb qarash mumkin. Bu yerda berilgan graf bog'lamlilik komponentalariga bo'laklandi (ajratildi) deb aytish mumkin.

Isbotlash mumkinki, har qanday graf o'zining bog'lamlilik komponentalarining diz'yunktiv birlashmasi sifatida ifodalanishi mumkin, bunda grafning bog'lamlilik komponentalariga bo'laklanishi bir qiymatli aniqlanadi.

Keyingi ma'lumotlarni bayon etish uchun **yoq** tushunchasi zarur bo'ladi. Tekislikda geometrik ifodalanuvchi grafni qaraymiz. Bu grafga tegishli bo'lmagan (ya'ni grafning hech qaysi uchi bilan ustma-ust tushmaydigan va uning hech qaysi qirrasida yotmaydigan) biror A nuqtani hech qaysi nuqtasi grafga tegishli bo'lmagan uzluksiz chiziq bilan tutashtirish mumkin bo'lgan barcha nuqtalar to'plami grafning A nuqtani o'zida saqlovchi **yoqi** deb ataladi.

Yoq tushunchasiga berilgan ta'rifga ko'ra yoq grafning geometrik ifodalanishi yordamida tekislikning "qirqib" olinadigan qismidan iboratdir. Tekislikda geometrik ifodalanuvchi ixtiyoriy grafning hech bo'lmaganda bitta yoqi bo'lishi va uning bitta yoqi chegaraga ega emasligi (cheksizligi) o'z-o'zidan ravshandir.

2- teorema (Eyler 1752). *Tekis va bog'lamli $G=(V,U)$ graf uchun $m+r=2+n$ tenglik o'rinlidir, bu yerda $m=|V|$, $n=|U|$, r – yoqlar soni.*

Isboti. Teoremani isbotlash uchun matematik induksiya usulini grafdagi qirralar soni n bo'yicha qo'llaymiz. Induksiya usulining bazasi sifatida $n=0$ bo'lgan holni qaraymiz. Bu holda teoremaning tasdig'iga ko'ra $m+r=2$ bo'lishi kerak. Haqiqatdan ham, G tekis va bog'lamli graf bo'lgani uchun, u yagona uchdan tashkil topadi va bu uch yagona (cheksiz) yoqda yotadi, ya'ni $m=1$ va $r=1$. Demak, bu holda teoremaning tasdig'i to'g'ridir.

Induksion o'tish: teoremaning tasdig'i $n=k$ uchun to'g'ri bo'lsin deb faraz qilib, uning $n=k+1$ uchun ham to'g'ri ekanligini ko'rsatamiz. Farazimizga ko'ra $m+r=2+k$ tenglik o'rinlidir. k ta qirraga ega G tekis va bog'lamli grafga ($k+1$)- qirrani (uni e bilan belgilaymiz) shunday qo'shish kerakki, bunda e qirra G graf joylashgan tekislikda yotsin va hosil bo'lgan graf ham bog'lamli bo'lsin. Bu amalni bajarganda quyidagi uchta holdan biri ro'y beradi:

1) qo'shilayotgan qirra sirtmoqdir – bu holda e qirra, albatta, G grafdagi uchlardan biriga insident bo'lib, yoqlardan birida yotadi va bu yoqni ikkiga (sirtmoq yotgan yoqning sirtmoq chizig'i bilan chegaralangan ichki va tashqi qismlari) ajratadi, ya'ni uchlar soni o'zgarmaydi, yoqlar soni esa birga oshadi: $m+r+1=2+k+1$;

2) qo'shilayotgan qirra G grafda bor bo'lgan ikkita uchlarni tutashtiradi – bu holda ham grafning biror (e qirra yotgan) yoqi ikkiga ajraladi, uchlari soni esa o'zgarmaydi: $m+r+1=2+k+1$;

3) qo'shilayotgan qirra sirtmoq emas va u G grafdagi uchlardan faqat bittasiga insidentdir – bu holda grafning biror yoqida e qirraga insident bo'lgan bitta boshqa uch yasaladi (grafning uchlari soni bittaga oshadi) va e qirra joylashgan yoq yaxlitlikni saqlagan holda e qirrani o'z ichiga oladi (yoqlar soni o'zgarmaydi): $m+1+r=2+k+1$. ■

2- teoremaning tasdig'idagi $m+r=2+n$ tenglik **Eyler formulasi** deb ataladi.

Eyler formulasi stereometriyada ham qo'llaniladi: uchlari m ta, yoqlari r ta va qirralari n ta ixtiyoriy ko'pyoqli uchun Eyler formulasi o'rinlidir. Bu tasdiqning negizida isboti o'quvchiga havola qilinayotgan quyidagi tasdiq yotadi: *stereometriyada berilgan ta'rifga ko'ra aniqlangan ixtiyoriy ko'pyoqliga mos tekis izomorf graf mavjuddir.*

Eyler teoremasidan bir qator natijalar kelib chiqadi. Masalan, bu teoremadan foydalanib uni osonlik bilan bog'lamli bo'lmagan graflar uchun quyidagicha umumlashtirish mumkin.

1- natija. *Tekis $G=(V,U)$ graf uchun $m+r=1+n+k$ tenglik o'rinlidir, bunda $m=|V|$, $n=|U|$, r – yoqlar soni, k – bog'lamlilik komponentalar soni.*

Isboti o'quvchiga havola qilinadi ■.

2- natija. *Karrali qirralari bo'lmagan sirtmoqsiz tekis (m,n)-graf uchun $n\leq 3m-6$ tengsizlik o'rinlidir.*

Isboti. Haqiqatdan ham, har bir yoq hech bo‘lmaqanda uchta qirra bilan chegaralanganligi va yoqlarni chegaralovchi qirralarni sanaganda har bir qirra ikki marta hisobda qatnashganligi uchun $3r \le 2n$ tengsizlik o‘rinlidir (ta’kidlaymizki, agar grafda uchta uch va ikkita qirra bo‘lsa, u holda $n \le 3m-6$ tengsizlik bajariladi). $3r \le 2n$ tengsizlikdan Eyler formulasini $r = 2+n-m$ ko‘rinishda qo‘llab, $n \le 3m-6$ tengsizlikni hosil qilamiz. ■

Ushbu bobning 2- paragrafida K_5 va $K_{3,3}$ graflarning planar emasligi ta’kidlangan (isbotsiz keltirilgan) edi. Endi bu tasdiqlarni qat’iy isbotlash mumkin.

3- teorema. *K_5 graf planar emas.*

Isboti. K_5 planar graf bo‘lsin deb faraz qilamiz. Planar graf uchun $n \le 3m-6$ tengsizlik o‘rinlidir. K_5 graf uchun $m=5$ va $n=10$ bo‘lganligidan bu tengsizlik $10 \le 9$ ko‘rinishdagi noto‘g‘ri munosabatga olib keladi. Demak, K_5 graf planar emas. ■

4- teorema. *$K_{3,3}$ graf planar emas.*

Isboti. $K_{3,3}$ planar graf bo‘lsin deb faraz qilamiz. Bu grafda 6ta uch ($m=6$) va 9ta qirra ($n=9$) bo‘lgani uchun, Eyler teoremasiga ko‘ra, unda 5ta ($r = 2+n-m = 2+9-6 = 5$) yoq bo‘lishi kerak. $K_{3,3}$ grafning har bir yoqi kamida to‘rtta qirra bilan chegaralanganligi sababli bu graf uchun $4r \le 2n$ tengsizlik o‘rinlidir. Lekin bu tengsizlik $K_{3,3}$ graf uchun $20 \le 18$ ko‘rinishdagi noto‘g‘ri munosabatga olib keladi. Demak, $K_{3,3}$ graf planar emas. ■

Isbotlash mumkinki, quyidagi tasdiq o‘rinlidir.

5- teorema. *Agar biror graf K_5 yoki $K_{3,3}$ grafga gomeomorf bo‘lgan qism grafga ega bo‘lsa, u holda bu graf tekislikda yotuvchi bo‘lmaydi.*

1930 yilda K. Kuratovskiy[53] bu tasdiqqa teskari tasdiqni isbot qildi: *agar graf tekislikda yotuvchi bo‘lmasa, u holda u K_5 yoki $K_{3,3}$ grafga gomeomorf bo‘lgan qism grafga ega bo‘ladi.* Umuman olganda, graflarning planarligi haqidagi bu asosiy natija K. Kuratovskiydan oldin 1922 yilda L. S. Pontryagin[54] tomonidan isbotlangan, lekin bu natija o‘sha vaqtda matbuotda e’lon qilinmagan edi.

6- teorema (Pontryagin-Kuratovskiy). *Graf planar bo‘lishi uchun u K_5 yoki $K_{3,3}$ grafga gomeomorf qism graflarga ega bo‘lishi zarur va yetarlidir.*

Isboti topshiriq sifatida o‘quvchiga havola qilinadi. ■

7- teorema. *Agar karrali qirralari bo‘lmagan sirtmoqsiz grafda m ta uch, n ta qirrai va k ta bog‘lamlilik komponentalari bo‘lsa, u holda quyidagi munosabat o‘rinlidir:*

$$m-k \le n \le \frac{(m-k)(m-k+1)}{2}.$$

Isboti. Avval qirralar soni n bo‘yicha matematik induksiya usulini qo‘llab $m-k \le n$ tengsizlikni isbotlaymiz. Agar grafda qirralar bo‘lmasa (ya’ni, matematik induksiya usulining bazasi sifatida $n=0$ deb olinsa), u holda grafdagi uchlar soni uning bog‘lamlilik komponentalari soniga tengdir: $k=m$. Demak, $n=0$ bo‘lganda $m-k \le n$ munosabat to‘g‘ridir.

Induksion o‘tish. Grafdagi qirralar sonini n_0 bilan belgilab, bu son minimal bo‘lsin, ya’ni grafdan istalgan qirrani olib tashlash amali bog‘lamlilik komponentalari soni o‘zgargan graf hosil qilsin deb faraz qilamiz. Bundan tashqari, matematik induksiya usuli talabiga binoan $n=n_0$ uchun isbotlanishi kerak bo‘lgan tengsizlik o‘rinli bo‘lsin deb faraz qilamiz. Tabiiyki, bu holda grafdan istalgan qirrani olib tashlasak (bunda olib tashlangan qirraning chetlaridagi uchlar grafga tegishli bo‘lib qolaveradi), hosil bo‘lgan grafning uchlari soni m ga, qirralari soni (n_0-1)ga, bog‘lamlilik komponentalari soni esa ($k+1$)ga teng bo‘ladi.

---

[53] Kuratovskiy (Kuratowski Kazimej, 1896-1980) – Polsha matematigi.

[54] Pontryagin Lev Semyonovich (Понтрягин Лев Семенович, 1908-1988) – rus matematigi, akademik.

Induksiya faraziga binoan $m-(k+1)\le n_0-1$ tengsizlik o‘rinlidir. Bu tengsizlikdan $m-k\le n_0$ kelib chiqadi. Shunday qilib, $m-k\le n$ tengsizlik isbotlandi.

Endi $n\le\dfrac{(m-k)(m-k+1)}{2}$ tengsizlikni isbotlaymiz. Buning uchun grafning har bir bog‘lamlilik komponentasi to‘la graf bo‘lsin deb faraz qilamiz. Berilgan grafning uchlari sonlari mos ravishda m_i va m_j bo‘lgan ikkita bog‘lamlilik komponentalari D_i va D_j graflardan iborat bo‘lsin, bu yerda $m_i\ge m_j>1$. Tushunarliki, D_i va D_j graflarning uchlari umumiy soni (m_i+m_j)ga tengdir. Bu D_i va D_j graflarni uchlari sonlari mos ravishda (m_i+1) va (m_j-1) bo‘lgan to‘la graflar bilan almashtirsak, uchlar umumiy soni o‘zgarmaydi, lekin qirralarning umumiy soni $(C_{m_i+1}^2+C_{m_j-1}^2)-(C_{m_i}^2+C_{m_j}^2)$ miqdorga o‘zgaradi. Oxirgi ifodaning ko‘rinishini quyidagicha o‘zgartiramiz:

$$(C_{m_i+1}^2+C_{m_j-1}^2)-(C_{m_i}^2+C_{m_j}^2)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[(m_i+1)m_i+(m_j-1)(m_j-2)-m_i(m_i-1)-m_j(m_j-1)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}(m_i^2+m_i+m_j^2-m_j-2m_j+2-m_i^2+m_i-m_j^2+m_j)=$$

$$=m_i-m_j+1>0\,.$$

Shunday qilib, uchlari soni m va bog‘lamlilik komponentalari soni k bo‘lgan grafda maksimal sondagi qirralar bo‘lishi uchun u ($k-1$)ta yakkalangan uchlar va ($m-k+1$)ta uchga ega to‘la graf birlashmasidan tashkil topishi kerak ekan. Bu yerdan isbotlanishi kerak bo‘lgan tengsizlik kelib chiqadi. ■

7- teoremaning tatbiqi sifatida quyidagi tasdiqni keltiramiz.

3- natija. *m ta uchga ega, qirralari soni $\dfrac{(m-1)(m-2)}{2}$ dan katta, karrali qirralari bo‘lmagan sirtmoqsiz graf bog‘lamlidir.*

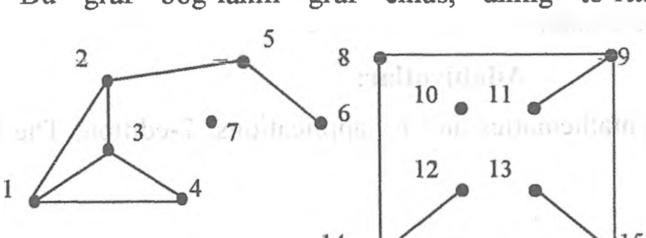
Isboti. Birinchidan, agar sirtmoqsiz va karrali qirralari bo‘lmagan grafning bog‘lamlilik komponentalari soni k ga teng bo‘lsa ($k\in N$), u holda, 7- teoremaga binoan, bunday grafning qirralari soni $\dfrac{(m-k)(m-k+1)}{2}$ dan katta emas. Ikkinchidan, $\dfrac{(m-1)(m-2)}{2}<\dfrac{(m-k)(m-k+1)}{2}$ tengsizlik faqat $k=1$ bo‘lsagina to‘g‘ridir. ■

Tabiiyki, bog‘lamli grafdan qirrani yoki bir necha qirralarni olib tashlash natijasida hosil bo‘lgan graf bog‘lamli bo‘lishi ham bo‘lmasligi ham mumkin. Agar bog‘lamli grafdan qirrani olib tashlash amali grafning bog‘lamlilik xususiyatini buzsa, u holda bunday qirrani **ajratuvchi qirra** deb ataymiz.

Ravshanki, berilgan bog‘lamli grafda ajratuvchi qirralar ko‘p bo‘lishlari mumkin. Ajratuvchi qirralar to‘plamining hech qaysi qism to‘plami elementlari ajratuvchi qirralar bo‘lmasa, bu qirralar to‘plamini **kesim** deb ataymiz. Grafdan kesimga tegishli qirralar olib tashlansa, natijada ikki bog‘lamli komponentalari bo‘lgan graf hosil bo‘lishi ravshandir. Agar kesim yagona qirradan iborat bo‘lsa, u holda bu qirra **ko‘prik** deb ataladi.

3- misol. 1- shaklda tasvirlangan (15,14)-grafni G bilan belgilaymiz.

Bu graf bog‘lamli graf emas, uning to‘rtta bog‘lamli komponentalari bor:



1- shakl

$G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$, bu yerda G_1 – uchlari to‘plami $\{1,2,3,4,5,6\}$ bo‘lgan oriyentirlanmagan (6,7)-graf, G_2 – bitta 7 belgili uchga ega oriyentirlanmagan (1,0)-graf, G_3 ham bitta 10 belgili uchga ega oriyentirlanmagan (1,0)-graf, G_4 esa uchlari to‘plami $\{8,9,11,12,13,14,15\}$ bo‘lgan oriyentirlanmagan (7,7)-grafdir. Agar G grafning G_4 bog‘lamli komponentasini alohida graf deb qarasak, bu grafda $\{(8,9),(14,15)\}$ ko‘rinishdagi ajratuvchi qirralar to‘plamini ko‘rsatish mumkin. Bu qirralar kesim tashkil etadi. G grafning G_1 va G_4 bog‘lamli komponentalari ko‘priklarga egadir. Masalan, (2,5) va (5,6) qirralar G_1 graf uchun ko‘priklardir. ■

Endi D. Kyonig tomonidan 1936 yilda isbotlangan ushbu teoremani grafning ikki bo‘lakli bo‘lishi yoki bo‘lmasligini tekshirish alomati (mezoni) sifatida keltiramiz.

8- teorema (D. Kyonig). *Grafning ikki bo‘lakli bo‘lishi uchun uning tarkibida uzunligi toq son bilan ifodalanuvchi sikl bo‘lmasligi zarur va yetarlidir[1](669bet).*

Isboti o‘quvchiga havola qilinadi. ■

Berilgan $G = (V,U)$ grafning ikki bo‘lakliligini aniqlashning sodda usuli bor. Bu usul **ko‘ndalangiga izlash** deb ataluvchi soddagina izlash g‘oyasiga asoslangan.

Ko‘ndalangiga izlash usuliga ko‘ra grafning uchlari 0,1,2,3,... raqamlar bilan quydagi qoida bo‘yicha belgilanadi. Dastlab grafning ixtiyoriy uchi 0 raqami bilan belgilab olinadi. Shu 0 belgili uchga qo‘shni barcha uchlarga 1 belgisi qo‘yiladi. Endi 1 belgili har bir uchga qo‘shni uchlarni aniqlab, ular orasidagi belgisi yo‘q uchlarga 2 belgisini qo‘aymiz. Keyin 2 belgisiga ega barcha uchlarni aniqlab, ular uchun ham yuqoridagiga o‘xshash ish yuritamiz. Bu jarayonni mumkin bo‘lgan qadar davom ettiramiz. Tushunarliki, agar G graf bog‘lamli bo‘lsa, u holda ko‘ndalangiga izlash usuli grafning barcha uchlarini raqamlab chiqish imkonini beradi.

Bog‘lamli graf uchlarini belgilash jarayoni tugagandan so‘ng, uning uchlari to‘plami V ni ikkita V_j va V_q to‘plamga quyidagicha ajratamiz: juft raqamli uchlarni V_j to‘plamga, qolgan uchlarni esa V_q to‘plamga kiritamiz (0 raqamli uch V_j to‘plamga kiritiladi). G grafning ikkala uchi ham V_j to‘plamga tegishli barcha qirralari kortejini U_j bilan, uning ikkala uchi ham V_q to‘plamga tegishli barcha qirralari kortejini esa U_q bilan belgilaymiz. Agar U_j va U_q kortejlar bo‘sh bo‘lsa, u holda berilgan G graf ikki bo‘laklidir, aks holda u ikki bo‘lakli emas.

Hozirgacha $k > 2$ bo‘lgan hol uchun grafning k bo‘lakliligini aniqlash bo‘yicha oddiy usul topilmagan

Nazorat uchun savollar:

1. Graflarda marshrut deganda nimani tushunasiz?
2. Marshrutdagi boshlang‘ich, oraliq va oxirgi uchlarning bir-biridan qanday farqlari bor?
3. Qanday marshrutlar cheksiz marshrutlar deb ataladi?
4. Notrivial marshrut bilan nol marshrutning bir-biridan farqi nimada?
5. Marshrutning uzunligi deganda nimani tushunasiz?
6. Zanjir nima?
7. Oddiy va yopiq zanjirlarning bir-biridan farqi nimada?
8. Yo‘l, kontur deganda nimani tushunasiz?
9. Qanday zanjir sikl deb ataladi va qanday graf siklga ega?
10. Qanday uchlar bog‘langan deb ataladi?

Adabiyotlar:

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012.

2. H.T. To'rayev, I. Azizov Matematik mantiq va diskret matematika. 1,2 jild. "Tafakkur-Bo'stoni", Toshkent, 2011y.
3. Anderson D.A.Diskretnaya matematika I kombinatorika. M."Vilyams",2004g.-960s.ISBN5-8459-0498-6

18-ma'ruza: Ehtimollik ta'rifi. Shartli ehtimollik. Hodisalar bog'liqsizligi. Bernulli formulasi.

Reja:

1. Tasodifiy hodisalar, ularning klassifikatsiyasi
2. Hodisalar ustida amallar
3. Ehtimollikning statistik ta'rifi.
4. Ehtimollikning klassik ta'rifi
5. Ehtimollikning geometrik ta'rifi

**Kalit so`zlar:** tasodifiy hodisa, elementar hodisa, muqarrar hodisa, tajriba, qo`shish va ko`paytirish qoidasi, tanlash, klassik ehtimollik, gipotezalar teoremasi.

Dastlab ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri "**tasodifiy hodisa**" tushunchasini keltiramiz. Natijasini oldindan aytib bo'lmaydigan tajriba o'tkazilayotgan bo'lsin. Bunday tajribalar ehtimollar nazariyasida **tasodifiy** deb ataladi.

Tasodifiy hodisa (yoki **hodisa**) deb, tasodifiy tajriba natijasida ro'y berishi oldindan aniq bo'lmagan hodisaga aytiladi.

Hodisalar, odatda, lotin alifbosining bosh harflari A,B,C, ...lar bilan belgilanadi.

Tajribaning har qanday natijasi **elementar hodisa** deyiladi va ω orqali belgilanadi.

Tajribaning natijasida ro'y berishi mumkin bo'lgan barcha elementar hodisalar to'plami **elementar hodisalar fazosi** deyiladi va Ω orqali belgilanadi [2] (9 bet).

1-misol. Tajriba nomerlangan kub (o'yin soqqasi) ni tashlashdan iborat bo'lsin. U holda tajriba 6 elementar hodisalar $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ lardan iborat bo'ladi. ω_i hodisa tajriba natijasida i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) ochko tushishini bildiradi. Bunda elementar hodisalar fazosi: $\Omega = \{ 1,2,3,4,5,6 \}$.

Tajriba natijasida albatta ro'y beradigan hodisaga **muqarrar hodisa** deyiladi. Elementar hodisalar fazosi muqarrar hodisaga misol bo'la oladi.

Aksincha, umuman ro'y bermaydigan hodisaga **mumkin bo'lmagan hodisa** deyiladi va u $\varnothing$ orqali belgilanadi.

1-misolda keltirilgan tajriba uchun quyidagi hodisalarni kiritamiz:

A={5 raqam tushishi};

B={juft raqam tushishi};

C={7 raqam tushishi};

D={butun raqam tushishi};

Bu yerda A va B hodisalar tasodifiy, C hodisa mumkin bo'lmagan va D hodisa muqarrar hodisalar bo'ladi.

Hodisalar ustida amallar

Tasodifiy hodisalar orasidagi munosabatlarni keltiramiz:

A va B **hodisalar yig'indisi** deb, A va B hodisalarning kamida bittasi (ya'ni yoki A, yoki B, yoki A va B birgalikda) ro'y berishidan iborat $C = A \cup B$ $(C = A + B)$ hodisaga aytiladi.

A va B **hodisalar ko'paytmasi** deb, A va B hodisalar ikkilasi ham (ya'ni A va B birgalikda) ro'y berishidan iborat $C = A \cap B$ $(C = A \cdot B)$ hodisaga aytiladi.

A hodisadan B **hodisaning ayirmasi** deb, A hodisa ro'y berib, B hodisa ro'y bermasligidan iborat $C = A \setminus B$ $(C = A - B)$ hodisaga aytiladi.

A hodisaga **qarama-qarshi** $\overline{A}$ hodisa faqat va faqat A hodisa ro'y bermaganda ro'y beradi (ya'ni $\overline{A}$ hodisa A hodisa ro'y bermaganda ro'y beradi). $\overline{A}$ ni A uchun **teskari hodisa** deb ham ataladi.

Agar A hodisa ro'y berishidan B hodisaning ham ro'y berishi kelib chiqsa A hodisa B hodisani **ergashtiradi** deyiladi va $A \subseteq B$ ko'rinishida yoziladi.

Agar $A \subseteq B$ va $B \subseteq A$ bo'lsa, u holda A va B hodisalar **teng (teng kuchli)** hodisalar deyiladi va $A = B$ ko'rinishida yoziladi.

2-misol. A, B va C-ixtiyoriy hodisalar bo'lsin. Bu hodisalar orqali quyidagi hodisalarni ifodalang: D={uchchala hodisa ro'y berdi}; E={bu hodisalarning kamida bittasi ro'y berdi}; F={bu hodisalarning birortasi ham ro'y bermadi}; G={bu hodisalarning faqat bittasi ro'y berdi}.

Hodisalar ustidagi amallardan foydalanamiz: $D = A \cap B \cap C (D = A \cdot B \cdot C)$;
$E = A + B + C$; $F = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$; $G = A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$.

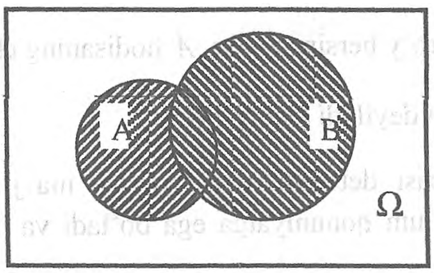
Demak, hodisalarni to'plamlar kabi ham talqin etish mumkin ekan.

Belgilash	To'plamlar nazariyasidagi talqini	Ehtimollar nazariyasidagi talqini
Ω	Fazo (asosiy to'plam)	Elementar hodisalar fazosi, muqarrar hodisa
ω, $\omega \in \Omega$	ω fazo elementi	ω elementar hodisa
A, $A \subseteq \Omega$	A to'plam	A hodisa
$A \cup B$, $A + B$	A va B to'plamlarning yig'indisi, birlashmasi	A va B hodisalar yig'indisi (A va B ning kamida bittasi ro'y berishidan iborat hodisa)
$A \cap B, A \cdot B$	A va B to'plamlarning kesishmasi	A va B hodisalar ko'paytmasi (A va B ning birgalikda ro'y berishidan iborat hodisa)
$A \setminus B, A - B$	A to'plamdan B to'plamning ayirmasi	A hodisadan B hodisaning ayirmasi (A ning ro'y berishi, B ning ro'y bermasligidan iborat hodisa)
$\varnothing$	Bo'sh to'plam	Mumkin bo'lmagan hodisa
$\overline{A}$	A to'plamga to'ldiruvchi	A hodisaga teskari hodisa (A ning ro'y bermasligidan iborat)
$A \cap B = \varnothing$, $A \cdot B = \varnothing$	A va B to'plamlar kesishmaydi	A va B hodisalar birgalikda emas
$A \subseteq B$	A to'plam B ning qismi	A hodisa B ni ergashtiradi

$A = B$	A va B to‘plamlar ustma-ust tushadi	A va B hodisalar teng kuchli

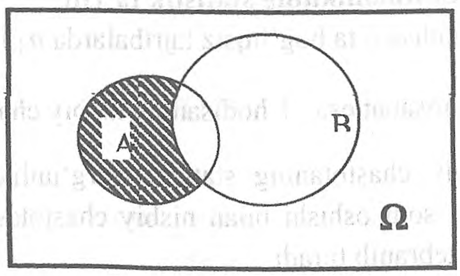
Hodisalar va ular ustidagi amallarni **Eyler-Venn** diagrammalari yordamida tushuntirish (tasavvur qilish) qulay. Hodisalar ustidagi amallarni 1-5 rasmlardagi shakllar kabi tasvirlash mumkin.

$A+B$



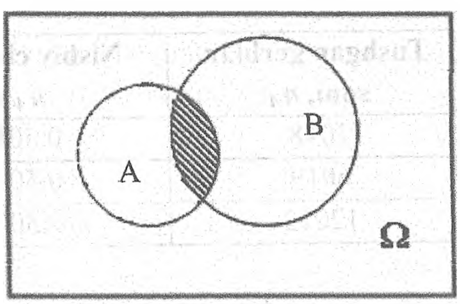
1-rasm.

$A-B$



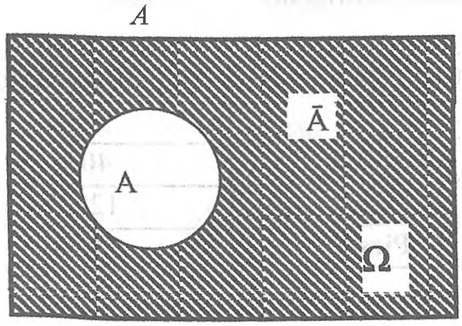
2-rasm.

$A \cdot B$



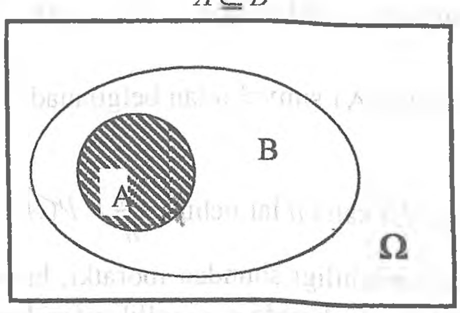
3-rasm.

$\overline{A}$



4-rasm.

$A \subseteq B$



5-rasm.

Hodisalar ustidagi amallar quyidagi xossalarga ega:

1. $A+B=B+A, \quad A \cdot B = B \cdot A$;
2. $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C,$;
3. $(A+B)+C = A+(B+C), \quad (A\cdot B)\cdot C = A\cdot (B\cdot C)$;
4. $A+A=A, \quad A\cdot A = A$;
5. $\mathrm{A}+\Omega=\Omega, \quad A\cdot\Omega = A \quad A+\varnothing = A, \quad A\cdot\varnothing=\varnothing$;
6. $A+\overline{A}=\Omega, \quad A\cdot\overline{A}=\varnothing$;

7. $\overline{\varnothing}=\Omega, \quad \overline{\Omega}=\varnothing, \quad \overline{\overline{A}}=A$;

8. $A-B=A\cdot\overline{B}$;

9. $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$ - de Morgan ikkilamchilik prinsipi.

10. $\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$ - de Morgan ikkilamchilik prinsipi.

Ehtimollikning statistik ta'rifi

A hodisa n ta bog'liqsiz tajribalarda n_A marta ro'y bersin. n_A son A hodisaning chastotasi. $\frac{n_A}{n}$ munosabat esa A hodisaning nisbiy chastotasi deyiladi [2](11-bet).

Nisbiy chastotaning statistik turg'unlik xossasi deb ataluvchi xossasi mavjud, ya'ni tajribalar soni oshishi bilan nisbiy chastotasi ma'lum qonuniyatga ega bo'ladi va biror son atrofida tebranib turadi.

Misol sifatida tanga tashlash tajribasini olaylik. Tanga A={Gerb} tomoni bilan tushishi hodisasini qaraylik. Byuffon va K.Pirsonlar tomonidan o'tkazilgan tajribalar natijasi quyidagi jadvalda keltirilgan:

Tajriba o'tkazuvchi	Tajribalar soni, n	Tushgan gerblar soni, n_A	Nisbiy chastota, n_A/n
Byuffon	4040	2048	0.5080
K.Pirson	12000	6019	0.5016
K.Pirson	24000	12012	0.5005

Jadvaldan ko'rinadiki, n ortgani sari n_A/n nisbiy chastota $\frac{1}{2}=0.5$ ga yaqinlashar ekan.

Agar tajribalar soni etarlicha ko'p bo'lsa, va shu tajribalarda biror A hodisaning nisbiy chastotasi biror o'zgarmas son atrofida tebransa, bu songa A hodisaning **statistik ehtimolligi** deyiladi.

A hodisaning ehtimolligi P(A) simvol bilan belgilanadi.

Demak,

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n_A}{n}=P(A)$ yoki yetarlicha katta n lar uchun $\frac{n_A}{n}\approx P(A)$.

Statistik ehtimollikning kamchiligi shundan iboratki, bu yerda statistik ehtimollik yagona emas. Masalan, tanga tashlash tajribasida ehtimollik sifatida nafaqat 0.5, balki 0.49 yoki 0.51 ni ham olishimiz mumkin. Ehtimollikni aniq hisoblash uchun katta sondagi tajribalar o'tkazishni talab qiladi, bu esa amaliyotda ko'p vaqt va xarajatlarni talab qiladi.

Statistik ehtimollik quyidagi xossalarga ega:

1. $0\le P(A)\le 1$;
2. $P(\varnothing)=0$;
3. $P(\Omega)=1$;
4. $A\cdot B=\varnothing$ bo'lsa, u holda $P(A+B)=P(A)+P(B)$;

Isboti. 1) Ihtiyoriy A hodisaning chastotasi uchun $0 \le n_A \le n \Rightarrow 0 \le \frac{n_A}{n} \le 1$. Etarlicha katta n lar uchun $\frac{n}{n_A} \approx P(A)$ bo'lgani uchun $0 \le P(A) \le 1$ bo'ladi.

2) Mumkin bo'lmagan hodisa uchun $n_A=0$.

3) Muqarrar hodisaning chastotasi $n_A=n$.

4) Agar $A \cdot B = \varnothing$ bo'lsa, u holda $n_{A+B} = n_A + n_B$ va

$$P(A+B) \approx \frac{n_{A+B}}{n} = \frac{n_A + n_B}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} \approx P(A) + P(B).$$

Ehtimollikning klassik ta'rifi

Ω chekli n ta teng imkoniyatli elementar hodisalardan tashkil topgan bo'lsin.

A hodisaning ehtimolligi deb, A hodisaga qulaylik yaratuvchi elementar hodisalar soni k ning tajribadagi barcha elementar hodisalar soni n ga nisbatiga aytiladi.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{k}{n} \tag{1}$$

Klassik ta'rifdan foydalanib, ehtimollik hisoblashda kombinatorika elementlaridan foydalaniladi. Shuning uchun kombinatorikaning ba'zi elementlari keltiramiz.

Kombinatirikada **qo'shish** va **ko'paytirish** qoidasi deb ataluvchi ikki muhim **qoida (prinsiplari)** mavjud.

$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ va $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$ chekli to'plamlar berilgan bo'lsin.

Qo'shish qoidasi: agar A to'plam elementlari soni n va B to'plam elementlari soni m bo'lib, $A \cdot B = \varnothing$ (A va B to'plamlar kesishmaydigan) bo'lsa, u holda $A+B$ to'plam elementlari soni $n+m$ bo'ladi.

Ko'paytirish qoidasi: A va B to'plamlardan tuzilgan barcha (a_i, b_j) juftliklar to'plami $C = \{(a_i, b_j) : i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}\}$ ning elementlari soni $n \cdot m$ bo'ladi.

n ta elementdan m ($0 < m \le n$) tadan tanlashda ikkita sxema mavjud: **qaytarilmaydigan** va **qaytariladigan tanlashlar**. Birinchi sxemada olingan elementlar qayta olinmaydi (orqaga qaytarilmaydi), ikkinchi sxemada esa har bir olingan element har qadamda o'rniga qaytariladi.

I. Qaytarilmaydigan tanlashlar sxemasi

Guruhlashlar soni: n ta elementdan m ($0 < m \le n$) tadan guruhlashlar soni quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{2}$$

C_n^m sonlar Nyuton binomi formulasining koeffisientlaridir:

$$(p+q)^n = p^n + C_n^1 p^{n-1} q + C_n^2 p^{n-2} q^2 + ... + q^n.$$

O'rinlashtirishlar soni: n ta elementdan m ($0 < m \le n$) tadan o'rinlashtirishlar soni quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{3}$$

O'rin almashtirishlar soni: n ta elementdan n tadan o'rinlashtirish o'rin almashtirish deyiladi va u quyidagicha hisoblanadi:

$$P_n = n!. \tag{4}$$

O'rin almashtirish o'rinlashtirishning xususiy holidir, chunki agar (3) da $n=m$ bo'lsa, $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{n!}{0!} = n!$ bo'ladi.

Qaytariladigan tanlashlar sxemasi.

Qaytariladigan guruhlashlar soni: n ta elementdan m ($0 < m \le n$) tadan qaytariladigan guruhlashlar soni quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m \tag{5}$$

Qaytariladigan o'rinlashtirishlar soni: n ta elementdan m ($0 < m \le n$) tadan qaytariladigan o'rinlashtirishlari soni quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$\overline{A}_n^m = n^m. \tag{6}$$

Qaytariladigan o'rin almashtirishlar soni: k hil n ta elementdan iborat to'plamda 1-element n_1 marta, 2-element n_2 marta,..., k- element n_k marta qaytarilsin va $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ bo'lsin, u holda n ta elementdan iborat o'rin almashtirish $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ orqali belgilanadi va u quyidagicha hisoblanadi:

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}. \tag{7}$$

Endi ehtimollik hisoblashga doir misollar keltiramiz.

1-misol. Telefon nomerini terayotganda abonent oxirgi ikki raqamni eslay olmadi. U bu raqamlar har xil ekanligini eslab, ularni tavakkaliga terdi. Telefon nomeri to'g'ri terilganligi ehtimolligini toping.

Oxirgi ikki raqamni A_{10}^2 usul bilan terish mumkin. A={telefon nomeri to'g'ri terilgan} hodisasini kiritamiz. A hodisa faqat bitta elementdan iborat bo'ladi(chunki kerakli telefon nomeri bitta bo'ladi). Shuning uchun klassik ta'rifga ko'ra $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{A_{10}^2} = \frac{1}{10 \cdot 9} = \frac{1}{90} \approx 0.011$.

2-misol. 100 ta lotoreya biletlarlaridan bittasi yutuqli bo'lsin. Tavakkaliga olingan 10 lotoreya biletlari ichida yutuqlisi bo'lishi ehtimolligini toping.

100 ta lotoreya biletlaridan 10 tasini C_{100}^{10} usul bilan tanlash mumkin. B ={10 lotoreya biletlari ichida yutuqlisi bo'lishi } hodisasi bo'lsa, $N(B) = C_1^1 \cdot C_{99}^9$ va $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{C_1^1 \cdot C_{99}^9}{C_{100}^{10}} = \frac{1}{10} = 0.1$.

3-misol. Pochta bo'limida 6 xildagi otkritka bor. Sotilgan 4 ta otkritkadan: a) 4 tasi bir xilda; b) 4 tasi turli xilda bo'lishi ehtimolliklarini toping.

6 xil otkritkadan 4 tasini $\overline{C_6^4}$ usul bilan tanlash mumkin. a) A={4 ta bir xildagi otkritka sotilgan} hodisasi bo'lsin. A hodisaning elementar hodisalari soni otkritkalar xillari soniga teng, ya'ni $N(A)$=6. Klassik ta'rifga ko'ra $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{6}{\overline{C_6^4}} = \frac{6}{126} = \frac{1}{21}$

bo‘ladi. b) B={4 ta har xil otkritka sotilgan} hodisasi bo‘lsin, u holda $N(B)=C_6^4$ ga teng va

$$P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{C_6^4}{C_6^4}=\frac{15}{126}=\frac{5}{42}.$$

Klassik ehtimollik quyidagi xossalarga ega:

1. $P(\varnothing)=0$;
2. $P(\Omega)=1$;
3. $0\le P(A)\le 1$;
4. Agar $A\cdot B=\varnothing$ bo‘lsa, u holda $P(A+B)=P(A)+P(B)$;
5. $\forall A,B\in\Omega$ uchun $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$

Isboti. 1) $N(\varnothing)=0$ bo‘lgani uchun klassik ta’rifga ko‘ra $P(\varnothing)=\dfrac{N(\varnothing)}{N(\Omega)}=0$. **2)** Klassik ta’rifga ko‘ra $P(\Omega)=\dfrac{N(\Omega)}{N(\Omega)}=1$. **3)** Ihtiyoriy A hodisa uchun $\varnothing\subseteq A\subseteq\Omega$ ekanligidan $0\le P(A)\le 1$ bo‘ladi. **4)** Agar $A\cdot B=\varnothing$ bo‘lsa, u holda $N(A+B)=N(A)+N(B)$ va

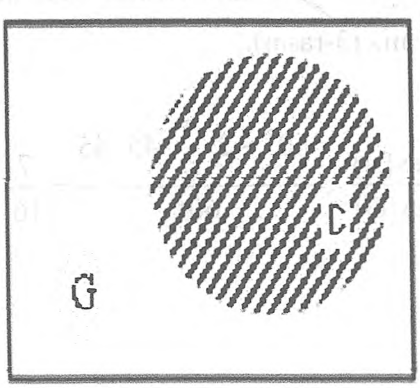
$$P(A+B)=\frac{N(A+B)}{N(\Omega)}=\frac{N(A)+N(B)}{N(\Omega)}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}+\frac{N(B)}{N(\Omega)}=P(A)+P(B).$$

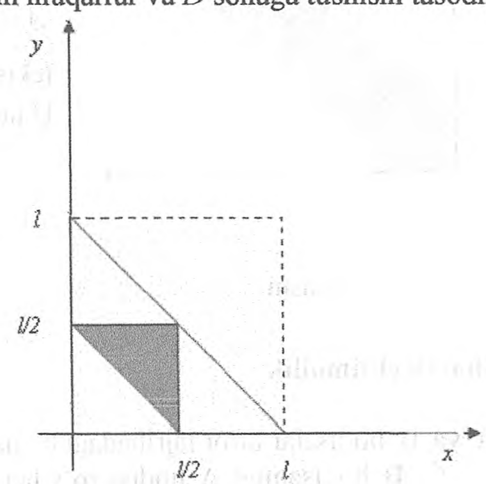
5) $A+B$ va B hodisalarni birgalikda bo‘lmagan ikki hodisalar yig‘ndisi shaklida yozib olamiz: $A+B=A+B\cdot\overline{A}$, $B=B\cdot\Omega=B\cdot(A+\overline{A})=A\cdot B+B\cdot\overline{A}$, u holda **4-xossaga ko‘ra** $P(A+B)=P(A)+P(B\cdot\overline{A})$ va $P(B)=P(A\cdot B)+P(B\cdot\overline{A})$. Bu ikki tenglikdan $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$ kelib chiqadi.

Ehtimollikning geometrik ta’rifi

Ehtimolning klassik ta’rifiga ko‘ra, Ω - elementar hodisalar fazosi chekli bo‘lgandagina hisoblashimiz mumkin. Agar Ω cheksiz teng imkoniyatli elementar hodisalardan tashkil topgan bo‘lsa, geometrik ehtimollikdan foydalanamiz.

O‘lchovli biror G soha berilgan bo‘lib, u D sohani o‘z ichiga olsin. G sohaga tavakkaliga tashlangan X nuqtani D sohaga tushishi ehtimolligini hisoblash masalasini ko‘ramiz. Bu yerda X nuqtaning G sohaga tushishi muqarrar va D sohaga tushishi tasodifiy





1-rasm. 2-rasm

hodisa bo‘ladi. $A=\{X \in D\}$ -X nuqtaning D sohaga tushishi hodisasi bo‘lsin.

A hodisaning **geometrik ehtimolligi** deb, D soha o‘lchovini G soha o‘lchoviga nisbatiga aytiladi, ya’ni

$$P(A)=\frac{mes\{D\}}{mes\{G\}},$$

bu yerda *mes* orqali uzunlik, yuza, hajm belgilangan.

1-misol. l uzunlikdagi sterjen tavakkaliga tanlangan ikki nuqtada bo‘laklarga bo‘lindi. Hosil bo‘lgan bo‘laklardan uchburchak yasash mumkin bo‘lishi ehtimolligini toping.

Birinchi bo‘lak uzunligini x, ikkinchi bo‘lak uzunligini y bilan belgilasak, uchinchi bo‘lak uzunligi l-x-y bo‘ladi. Bu yerda $\Omega=\{(x,y):0<x+y<l\}$, ya’ni $0<x+y<l$ sterjenning bo‘laklari uzunliklarining barcha bo‘lishi mumkin bo‘lgan kombinatsiyasidir.

Bu bo‘laklardan uchburchak yasash mumkin bo‘lishi uchun quyidagi shartlar bajarilishi kerak: $x+y>l-x-y,\ x+l-x-y>y,\ y+l-x-y>x$.

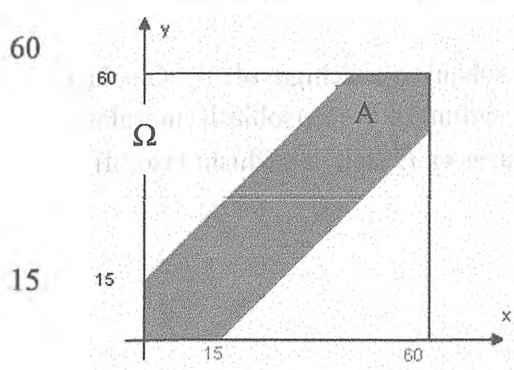
Bulardan $x<\frac{l}{2},\quad y<\frac{l}{2},\quad x+y>\frac{l}{2}$ ekanligi kelib chiqadi.

Bu tengsizliklar 2-rasmdagi bo‘yalgan sohani bildiradi. Ehtimollikning geometrik ta’rifiga ko‘ra:

$$P(A)=\frac{mes\{A\}}{mes\{G\}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{2}}{\frac{1}{2}\cdot l\cdot l}=\frac{1}{4}.$$

2-misol. (Uchrashuv haqida). Ikki do‘st soat 9 bilan 10 orasida uchrashishga kelishishdi. Birinchi kelgan kishi do‘stini 15 daqiqa davomida kutishini, agar shu vaqt mobaynida do‘sti kelmasa u ketishi mumkinligini shartlashib olishdi. Agar ular soat 9 bilan 10 orasida ixtiyoriy momentda kelishlari mumkin bo‘lsa, bu ikki do‘stning uchrashishi ehtimolini toping.

Birinchi kishi kelgan momenti x, ikkinchisinikini y bo‘lsin: $0 \le x \le 60$, $0 \le y \le 60$ U holda ularning uchrashishlari uchun $|x-y| \le 15$ tengsizlik bajarilishi kerak. Demak, $\Omega=\{(x,y):0\le x\le 60, 0\le y\le 60\}$, $A=\{(x,y):|x-y|\le 15\}$. x va y larni Dekart koordinatalar tekisligida tasvirlaymiz (3-rasm).



3-rasm

U holda

$$P(A)=\frac{mes\{A\}}{mes\{G\}}=\frac{60^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 45\cdot 45}{60^2}=\frac{7}{16}.$$

Shartli ehtimollik

A va B hodisalar biror tajribadagi hodisalar bo‘lsin.

✓ B hodisaning A hodisa ro‘y bergandagi *shartli ehtimolligi* deb,

$$\frac{P(A\cdot B)}{P(A)}\quad (P(A)\neq 0) \tag{1}$$

nisbatga aytiladi. Bu ehtimollikni $P(B/A)$ orqali belgilaymiz.
Shartli ehtimollik ham Kolmogorov aksiomalarini qanoatlantiradi:
1. $P(B/A)\geq 0$;

2. $P(\Omega/A)=\dfrac{P(\Omega\cdot A)}{P(A)}=\dfrac{P(A)}{P(A)}=1$;

3. Agar $B\cdot C=\varnothing$ bo'lsa, u holda

$$P((B+C)/A)=\frac{P((B+C)\cdot A)}{P(A)}=\frac{P(B\cdot A+C\cdot A)}{P(A)}=\frac{P(B\cdot A)+P(C\cdot A)}{P(A)}=$$

$$=\frac{P(B\cdot A)}{P(A)}+\frac{P(C\cdot A)}{P(A)}=P(B/A)+P(C/A),$$

chunki $B\cdot C=\varnothing$ ekanligidan, $(B\cdot A)\cdot(C\cdot A)=B\cdot A\cdot A\cdot C=B\cdot C\cdot A=\varnothing\cdot A=\varnothing$

1-misol. Idishda 3 ta oq va 7 ta qora shar bor. Tavakkaliga ketma-ket bittadan 2 ta shar olinadi. Birinchi shar oq rangda bo'lsa ikkinchi sharning qora rangda bo'lishi ehtimolligini toping.

Bu misolni ikki usul bilan yechish mumkin:
1) A={birinchi shar oq rangda}, B ={ikkinchi shar qora rangda}. A hodisa ro'y berganidan so'ng idishda 2 ta oq va 7 ta qora shar qoladi. Shuning uchun $P(B/A)=\dfrac{7}{9}$.

2) (1) formuladan foydalanib, hisoblaymiz: $P(A)=\dfrac{3}{10}$, $P(AB)=\dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{7}{9}=\dfrac{7}{30}$

Shartli ehtimollik formulasiga ko'ra: $P(B/A)=\dfrac{P(A\cdot B)}{P(A)}=\dfrac{7/30}{3/10}=\dfrac{7}{9}$.

Shartli ehtimollik formulasidan hodisalar ko'paytmasi ehtimolligi uchun ushbu formula kelib chiqadi:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B) \tag{2}$$

(2) tenglik ko'paytirish qoidasi(teoremasi) deyiladi. Bu qoidani n ta hodisa uchun umumlashtiramiz:

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)\ldots\cdot P(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1}). \tag{3}$$

✓Agar $P(A/B)=P(A)$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda A hodisa B hodisaga bog'liq emas deyiladi va $A\perp B$ orqali belgilanadi.
Agar $A\perp B$ bo'lsa, u holda (2) formulani quyidagicha yozish mumkin:

$$P(A\cdot B)=P(B)\cdot P(A/B)=P(B)\cdot P(A).$$

✓ A va B hodisalar o'zaro bog'liq emas deyiladi, agar

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$$

munosabat o'rinli bo'lsa.

Lemma. Agar $A\perp B$ bo'lsa, u holda $A\perp\overline{B}$, $\overline{A}\perp B$ va $\overline{A}\perp\overline{B}$ bo'ladi.
Isboti: $A\perp B$ bo'lsin. U holda $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$ munosabat o'rinli bo'ladi. $P(B)+P(\overline{B})=1$ tenglikdan foydalanib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$P(A\cdot\overline{B})=P(A\cdot(\Omega-B))=P(A\cdot\Omega-A\cdot B)=P(A-A\cdot B)=P(A)-P(A\cdot B)=$$

$$=P(A)-P(A)\cdot P(B)=P(A)\cdot(1-P(B))=P(A)\cdot P(\overline{B}).$$

Demak, $P(A\cdot\overline{B})=P(A)\cdot P(\overline{B})\Rightarrow A\perp\overline{B}$. Qolganlari ham xuddi shunday isbotlanadi. ■

To‘la ehtimollik va Bayes formulalari

$A_1, A_2, ..., A_n$ juft-jufti bilan birgalikda bo‘lmagan hodisalar to‘la gruppani tashkil etsin, ya'ni $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ va $A_i \cdot A_j = \varnothing, \quad i \neq j$. U holda $A_1 + A_2 + ... + A_n = \Omega$ ekanligini hisobga olib, B ni $B = B \cdot \Omega = B \cdot (A_1 + A_2 + ... + A_n) = B \cdot A_1 + B \cdot A_2 + ... + B \cdot A_n$ ko‘rinishda yozamiz. $A_i \cdot A_j = \varnothing, \quad i \neq j$ ekanligidan $(B \cdot A_i) \cdot (B \cdot A_j) = \varnothing, \quad i \neq j$ ekani kelib chiqadi. B hodisaning ehtimolligini hisoblaymiz:

$$P(B) = P(B \cdot A_1 + B \cdot A_2 + ... + B \cdot A_n) =$$
$$= P(B \cdot A_1) + P(B \cdot A_2) + ... + P(B \cdot A_n). \qquad (1)$$

Ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra $P(B \cdot A_i) = P(A_i) \cdot P(B / A_i), i = \overline{1,n}$ bo‘ladi. Bu tenglikni (1) ga qo‘llasak,

$$P(B) = P(A_1)P(B / A_1) + P(A_2)P(B / A_2) + ... + P(A_n)P(B / A_n).$$

✓ Agar $B \subset \sum_{i=1}^{n} A_i$ bo‘lsa, u holda

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B / A_i) \qquad (2)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu tenglik *to‘la ehtimollik formulasi* deyiladi.

2-misol. Detallar partiyasi uch ishchi tomonidan tayyorlanadi. Birinchi ishchi barcha detallarning 25%ini, ikkinchi ishchi 35%ini, uchinchsi esa 40%ini tayyorlaydi. Bu uchchala ishchining tayyorlagan detallarining sifatsiz bo‘lish ehtimolliklari mos ravishda 0.05,0.04 va 0.02 ga teng bo‘lsa, tekshirish uchun partiyadan olingan detalning sifatsiz bo‘lish ehtimolligini toping.

A_i={detal i-ishchi tomonidan tayyorlangan} $i = \overline{1,3}$, B={tekshirish uchun olingan detal sifatsiz} hodisalarni kiritamiz va quyidagi ehtimolliklarni hisoblaymiz:

$$P(A_1) = \frac{25\%}{100\%} = 0.25, \quad P(A_2) = \frac{35\%}{100\%} = 0.35, \quad P(A_3) = \frac{40\%}{100\%} = 0.4,$$

$P(B / A_1) = 0.05, \quad P(B / A_2) = 0.04, \quad P(B / A_3) = 0.02$. To‘la ehtimollik formulasiga asosan $P(B) = 0.25 \cdot 0.05 + 0.35 \cdot 0.04 + 0.4 \cdot 0.02 = 0.0345$.

A_i va B hodisalar ko‘paytmasi uchun

$$P(A_i \cdot B) = P(B) \cdot P(A_i / B) \qquad (3)$$
$$P(A_i \cdot B) = P(A_i) \cdot P(B / A_i) \qquad (4)$$

tengliklar o‘rinli. (3) va (4) tengliklardan quyidagilarni hosil qilamiz:

$$P(B) \cdot P(A_i / B) = P(A_i) \cdot P(B / A_i),$$

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i)P(B / A_i)}{P(B)}. \qquad (5)$$

Bu yerda $P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B/A_i)$. (5) tenglik *Bayes formulasi* deyiladi. Bayes formulasi yana *gipotezalar teoremasi* deb ham ataladi. Agar $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalarni gipotezalar deb olsak, u holda $P(A_i)$ ehtimollik A_i gipotezaning aprior("a priori" lotincha tajribagacha), $P(A_i/B)$ shartli ehtimollik esa aposterior("a posteriori" tajribadan keyingi) ehtimolligi deyiladi.

3-misol. 2-misolda sifatsiz detal ikkinchi ishchi tomonidan tayyorlangan bo'lishi ehtimolligini toping. Bayes formulasiga ko'ra:

$$P(A_2/B)=\frac{0.35\cdot 0.04}{0.25\cdot 0.05+0.35\cdot 0.04+0.4\cdot 0.02}=\frac{28}{69}\approx 0.4.$$

Bog'liqsiz tajribalar ketma-ketligi. Bernulli formulasi

Agar bir necha tajribalar o'tkazilayotganida, har bir tajribada biror A hodisaning ro'y berish ehtimolligi boshqa tajriba natijalariga bog'liq bo'lmasa, bunday tajribalar bog'liqsiz tajribalar deyiladi.

n ta bog'liqsiz tagribalar o'tkazilayotgan bo'lsin. Har bir tajribada A hodisaning ro'y berish ehtimolligi $P(A)=p$ va ro'y bermasligi ehtimolligi $P(\overline{A})=1-p=q$ bo'lsin.

Masalan, 1) nishonga qarata o'q uzish tajribasini ko'raylik. Bu yerda A={o'q nishonga tegdi}-muvaffaqqiyat va $\overline{A}$={o'q nishonga tegmadi}-muvaffaqqiyatsizlik; 2) n ta mahsulotni sifatsizlikka tekshirilayotganda A={mahsulot sifatli}-muvaffaqqiyat va $\overline{A}$={mahsulot sifatsiz}-muvaffaqqiyatsizlik bo'ladi.

Bu kabi tajribalarda elementar hodisalar fazosi Ω faqat ikki elementdan iborat bo'ladi: $\Omega=\{\omega_0,\omega_1\}=\{\overline{A},A\}$, bu erda ω_0-A hodisa ro'y bermasligini, ω_1-A hodisa ro'y berishini bildiradi. Bu hodisalarning ehtimolliklari mos ravishda p va q $(p+q=1)$ lar orqali belgilanadi.

Agar n ta tajriba o'tkazilayotgan bo'lsa, u holda elementar hodisalar fazosining elementar hodisalari soni 2^n ga teng bo'ladi. Masalan, $n=3$ da $\Omega=\{\omega_0,\omega_1,...,\omega_7\}=\{\overline{AAA},\overline{AA}A,\overline{A}A\overline{A},A\overline{AA},\overline{A}AA,A\overline{A}A,AA\overline{A},AAA\}$, ya'ni Ω to'plam $2^3=8$ ta elementar hodisadan iborat. Har bir hodisaning ehtimolligini ko'paytirish teoremasiga ko'ra hisoblash mumkin:

$$p(\omega_0)=P(\overline{AAA})=P(\overline{A})P(\overline{A})P(\overline{A})=q^3,$$

$$p(\omega_1)=P(\overline{AA}A)=P(\overline{A})P(\overline{A})P(A)=pq^2,$$

....

$$p(\omega_7)=P(AAA)=P(A)P(A)P(A)=p^3.$$

n ta bog'liqsiz tajribada A hodisa m marta ro'y berish ehtimolligini hisoblaylik:

$$P_n(m)=P(\underbrace{A\cdot A\cdot...\cdot A}_{m ta}\cdot\underbrace{\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot...\cdot\overline{A}}_{(n-m)ta})+P(\overline{A}\underbrace{A\cdot A\cdot...\cdot A}_{m ta}\cdot\underbrace{\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot...\cdot\overline{A}}_{(n-(m-1))ta})+...+$$

$$P(\underbrace{\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot...\cdot\overline{A}}_{(n-(m-1))ta}\cdot\underbrace{A\cdot A\cdot...\cdot A}_{m ta}\cdot\overline{A})+P(\underbrace{\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot...\cdot\overline{A}}_{(n-m)ta}\cdot\underbrace{A\cdot A\cdot...\cdot A}_{m ta}).$$

Har bir qo'shiluvchi ko'paytirish teoremasiga ko'ra $p^m q^{n-m}$ ga teng. Demak,

$$P_n(m) = \underbrace{p^m q^{n-m} + p^m q^{n-m} + \ldots + p^m q^{n-m}}_{C_n^m \text{ ta qo'shiluvchi}} = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = 0,1,\ldots n.$$

✓Agar n ta bo'g'liqsiz tajribaning har birida A hodisaning ro'y berish ehtimolligi p ga, ro'y bermasligi q ga teng bo'lsa, u holda A hodisaning m marta ro'y berish ehtimolligi quyidagi ifodaga teng bo'ladi:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = 0,1,\ldots n. \tag{1}$$

(1) formula Bernulli formulasi deyiladi. $P_n(m)$ ehtimolliklar uchun $\sum_{m=0}^{n} P_n(m) = 1$ tenglik o'rinlidir. Haqiqatan ham,

$$(q + px)^n = q^n + C_n^1 q^{n-1} px + C_n^2 q^{n-2} p^2 x^2 + \ldots + p^n x^n$$

Nyuton binomi formulasida $x = 1$ deb olsak,

$(q + p)^n = q^n + C_n^1 q^{n-1} p + C_n^2 q^{n-2} p^2 + \ldots + p^n$, ya'ni

$1 = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(n) = \sum_{m=0}^{n} P_n(m)$ bo'ladi.

(1) ehtimolliklar xossalari:

1. $\sum_{m=0}^{n} P_n(m) = 1$.

2. Agar $m_1 \le m \le m_2$ bo'lsa, $P_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m)$.

3. n ta bog'liqsiz tajribada A hodisaning kamida 1 marta ro'y berishi ehtimolligi $P = 1 - q^n$ bo'ladi.

Chunki, $P_n(0) + \underbrace{P_n(1) + \ldots + P_n(n)}_{P} = 1 \Rightarrow P = 1 - P_n(0) = 1 - q^n$.

4. Agar $P_n(m)$ ehtimollikning eng katta qiymati $P_n(m_0)$ bo'lsa, u holda m_0 quyidagicha aniqlanadi: $np - q \le m_0 \le (n+1)p$, m_0-eng ehtimolli son deyiladi va

a) agar *np-q* kasr son bo'lsa, u holda m_0 yagonadir;

b) agar *np-q* butun son bo'lsa, u holda m_0 ikkita bo'ladi.

4-misol. Ikki teng kuchli shaxmatchi shaxmat o'ynashmoqda. Qaysi hodisaning ehtimolligi katta: 4 ta partiyadan 2 tasida yutishmi yoki 6 ta partiyadan 3 tasida yutish.

Birinchi holda: n=4, m=2, $p=\frac{1}{2}$, Bernulli formulasiga ko'ra

$$P_4(2) = C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{4-2} = 6 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{6}{16}.$$

Ikkinchi holda n=6, m=3, $p=\frac{1}{2}$ va Bernulli formulasiga ko'ra

$P_6(3) = C_6^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{6-3} = 20 \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{5}{16}. \ \frac{6}{16} > \frac{5}{16} \Rightarrow P_4(2) > P_6(3)$. Demak, 4 ta partiyadan 2 tasida yutish ehtimolligi katta ekan.

Bog'liqsiz tajribalar ketma-ketligi. Bernulli formulasi

Agar bir necha tajribalar o‘tkazilayotganida, har bir tajribada biror A hodisaning ro‘y berish ehtimolligi boshqa tajriba natijalariga bog‘liq bo‘lmasa, bunday tajribalar bog‘liqsiz tajribalar deyiladi.
n ta bog‘liqsiz tagribalar o‘tkazilayotgan bo‘lsin. Har bir tajribada A hodisaning ro‘y berish ehtimolligi $P(A)=p$ va ro‘y bermasligi ehtimolligi $P(\overline{A})=1-p=q$ bo‘lsin.

Masalan, 1) nishonga qarata o‘q uzish tajribasini ko‘raylik. Bu yerda A={o‘q nishonga tegdi}-muvaffaqqiyat va $\overline{A}$={o‘q nishonga tegmadi}-muvaffaqqiyatsizlik; 2) n ta mahsulotni sifatsizlikka tekshirilayotganda A={mahsulot sifatli}-muvaffaqqiyat va $\overline{A}$={mahsulot sifatsiz}-muvaffaqqiyatsizlik bo‘ladi.

Bu kabi tajribalarda elementar hodisalar fazosi Ω faqat ikki elementdan iborat bo‘ladi: $\Omega=\{\omega_0,\omega_1\}=\{\overline{A},A\}$, bu erda ω_0-A hodisa ro‘y bermasligini, ω_1-A hodisa ro‘y berishini bildiradi. Bu hodisalarning ehtimolliklari mos ravishda p va q $(p+q=1)$ lar orqali belgilanadi. Agar n ta tajriba o‘tkazilayotgan bo‘lsa, u holda elementar hodisalar fazosining elementar hodisalari soni 2^n ga teng bo‘ladi. Masalan, $n=3$ da $\Omega=\{\omega_0,\omega_1,\dots,\omega_7\}=\{\overline{A}\overline{A}\overline{A},\overline{A}\overline{A}A,\overline{A}A\overline{A},A\overline{A}\overline{A},\overline{A}AA,A\overline{A}A,AA\overline{A},AAA\}$, ya’ni Ω to‘plam $2^3=8$ ta elementar hodisadan iborat. Har bir hodisaning ehtimolligini ko‘paytirish teoremasiga ko‘ra hisoblash mumkin:

$$p(\omega_0)=P(\overline{A}\overline{A}\overline{A})=P(\overline{A})P(\overline{A})P(\overline{A})=q^3,$$
$$p(\omega_1)=P(\overline{A}\overline{A}A)=P(\overline{A})P(\overline{A})P(A)=pq^2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$p(\omega_7)=P(AAA)=P(A)P(A)P(A)=p^3.$$

n ta bog‘liqsiz tajribada A hodisa m marta ro‘y berish ehtimolligini hisoblaylik:

$$P_n(m)=P(\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{mta}\cdot\underbrace{\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot\ldots\cdot\overline{A}}_{(n-m)ta})+P(\overline{A}\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{mta}\cdot\underbrace{\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot\ldots\cdot\overline{A}}_{(n-(m-1))ta})+\ldots+$$
$$P(\underbrace{\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot\ldots\cdot\overline{A}}_{(n-(m-1))ta}\cdot\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{mta}\cdot\overline{A})+P(\underbrace{\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot\ldots\cdot\overline{A}}_{(n-m)ta}\cdot\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{mta}).$$

Har bir qo‘shiluvchi ko‘paytirish teoremasiga ko‘ra $p^m q^{n-m}$ ga teng. Demak,

$$P_n(m)=\underbrace{p^m q^{n-m}+p^m q^{n-m}+\ldots+p^m q^{n-m}}_{C_n^m\ ta\quad qo'shiluvchi}=C_n^m p^m q^{n-m},\quad m=0,1,\ldots n$$

✓Agar n ta bo‘g‘liqsiz tajribaning har birida A hodisaning ro‘y berish ehtimolligi p ga, ro‘y bermasligi q ga teng bo‘lsa, u holda A hodisaning m marta ro‘y berish ehtimolligi quyidagi ifodaga teng bo‘ladi:

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m},\quad m=0,1,\ldots n. \tag{1}$$

(1) formula Bernulli formulasi deyiladi. $P_n(m)$ ehtimolliklar uchun $\sum_{m=0}^{n}P_n(m)=1$ tenglik o‘rinlidir. Haqiqatan ham,

$$(q+px)^n=q^n+C_n^1q^{n-1}px+C_n^2q^{n-2}p^2x^2+\ldots+p^nx^n$$

Nyuton binomi formulasida $x=1$ deb olsak,

$(q+p)^n = q^n + C_n^1 q^{n-1} p + C_n^2 q^{n-2} p^2 + \ldots + p^n$, ya'ni

$1 = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(n) = \sum_{m=0}^{n} P_n(m)$ bo'ladi.

(1) ehtimolliklar xossalari:

1. $\sum_{m=0}^{n} P_n(m) = 1$.

2. Agar $m_1 \le m \le m_2$ bo'lsa, $P_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m)$.

3. n ta bog'liqsiz tajribada A hodisaning kamida 1 marta ro'y berishi ehtimolligi $P = 1 - q^n$ bo'ladi.

Chunki, $P_n(0) + \underbrace{P_n(1) + \ldots + P_n(n)}_{P} = 1 \Rightarrow P = 1 - P_n(0) = 1 - q^n$.

4. Agar $P_n(m)$ ehtimollikning eng katta qiymati $P_n(m_0)$ bo'lsa, u holda m_0 quyidagicha aniqlanadi: $np - q \le m_0 \le (n+1)p$, m_0-eng ehtimolli son deyiladi va

a) agar np-q kasr son bo'lsa, u holda m_0 yagonadir;

b) agar np-q butun son bo'lsa, u holda m_0 ikkita bo'ladi.

5-misol. Ikki teng kuchli shaxmatchi shaxmat o'ynashmoqda. Qaysi hodisaning ehtimolligi katta: 4 ta partiyadan 2 tasida yutishmi yoki 6 ta partiyadan 3 tasida yutish. Birinchi holda: n=4, m=2, $p=\frac{1}{2}$, Bernulli formulasiga ko'ra

$$P_4(2) = C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{4-2} = 6 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{6}{16}.$$

Ikkinchi holda n=6, m=3, $p=\frac{1}{2}$ va Bernulli formulasiga ko'ra

$P_6(3) = C_6^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{6-3} = 20 \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{5}{16}$. $\frac{6}{16} > \frac{5}{16} \Rightarrow P_4(2) > P_6(3)$. Demak, 4 ta partiyadan 2 tasida yutish ehtimolligi katta ekan.

Nazorat uchun savollar

1. Qanday hodisalarga tasodifiy hodisalar deyiladi?
2. Hodisalar ustida qanday amallar aniqlangan?
3. Ehtimollikning statistik ta'rifi keltiring
4. Ehtimollikning klassik ta'rifi keltiring
5. Kombinatirikaning asosiy prinsiplarini ayting, misollar keltiring
6. Qaytarilmaydigan tanlashlar sxemasi deb qanday sxemaga aytiladi va undagi asosiy formulalarini ayting va misollar keltiring
7. Qaytariladigan tanlashlar sxemasi deb qanday sxemaga aytiladi va undagi asosiy formulalarini ayting va misollar keltiring
8. Ehtimollikning geometrik ta'rifi keltiring.

Adabiyotlar:

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012.

2. Abdushukurov A.A. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika.Toshkent."Universitet".2010y 162bet.
3. Anderson D.A.Diskretnaya matematika I kombinatorika. M."Vilyams",2004g.-960s.ISBN5-8459-0498-6

19-ma'ruza: Tasodifiy miqdor va uning taqsimot funksiyasi. Taqsimot funksiyaning xossalari.

Reja:

1. Tasodifiy miqdor tushunchasi.
2. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni
3. Taqsimot funksiyasi va uning xossalari.
4. Zichlik funksiyasi va uning xossalari

**Kalit so`zlar:** tasodifiy miqdor, taqsimot funksiyasi, zichlik funksiyasi. monoton o`suvchi. diskret tasodifiy miqdor.

Ehtimollar nazariyasining muhim tusunchalaridan biri tasodifiy miqdor tushunchasidir.

✓Tajriba natijasida u yoki bu qiymatni qabul qilishi oldindan ma'lum bo'lmagan miqdor *tasodifiy miqdor* deyiladi.

Tasodifiy miqdorlar lotin alifbosining bosh harflari $X,Y,Z,\ldots$(yoki grek alifbosining kichik harflari ξ(ksi), η(eta), ζ(dzeta),...) bilan qabul qiladigan qiymatlari esa kichik harflar $x_1, x_2,\ldots, y_1, y_2,\ldots, z_1, z_2,\ldots$ bilan belgilanadi.

Tasodifiy miqdorlarga misollar keltiramiz: 1) X-tavakkaliga olingan mahsulotlar ichida sifatsizlari soni; 2) Y-n ta o'q uzilganda nishonga tekkanlari soni; 3) Z-asbobning beto'htov ishlash vaqti; 4) U-[0,1] kesmadan tavakkaliga tanlangan nuqtaning koordinatalari; 5) V-bir kunda tug'iladigan chaqaloqlar soni va h.k..

✓Agar tasodifiy miqdor(t.m.) chekli yoki sanoqli qiymatlar qabul qilsa, bunday t.m. *diskret tipdagi t.m.* deyiladi.

✓Agar t.m. qabul qiladigan qiymatlari biror oraliqdan iborat bo'lsa *uzluksiz tipdagi t.m.* deyiladi.

Demak, diskret t.m. bir-biridan farqli alohida qiymatlarni, uzluksiz t.m. esa biror oraliqdagi ihtiyoriy qiymatlarni qabul qilar ekan. Yuqoridagi X va Y t.m.lar diskret, Z esa uzluksiz t.m. bo'ladi.

Endi t.m.ni qat'iy ta'rifini keltiramiz.

✓Ω elementar hodisalar fazosida aniqlangan X sonli funksiya t.m. deyiladi, agar har bir ω elementar hodisaga $X(\omega)$ conni mos qo'ysa, yani $X=X(\omega)$, $\omega\in\Omega$.

Masalan, tajriba tangani 2 marta tashlashdan iborat bo'lsin. Elementar hodisalar fazosi $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$, $\omega_1=GG, \omega_2=GR, \omega_3=RG, \omega_4=RR$ bo'ladi. X-gerb chiqishlari soni bo'lsin, u holda X t.m. qabul qiladigan qiymatlari: $X(\omega_1)=2$, $X(\omega_2)=1$, $X(\omega_3)=1$, $X(\omega_4)=0$.

Agar Ω chekli yoki sanoqli bo'lsa, u holda Ω da aniqlangan ixtiyoriy funksiya t.m. bo'ladi. Umuman, $X(\omega)$ funksiya shunday bo'lishi kerakki: $\forall x\in R$ da $A=\{\omega : X(\omega)<x\}$ hodisa S σ-algebrasiga tegishli bo'lishi kerak.

Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni

X-diskret t.m. bo'lsin. X t.m. $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ qiymatlarni mos $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ ehtimolliklar bilan qabul qilsin:

X	x_1	x_2	...	x_n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

jadval diskret t.m. taqsimot qonuni jadvali deyiladi. Diskret t.m. taqsimot qonunini $p_i = P\{X = x_i\}, i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ ko'rinishda yozish ham qulay.

$\{X = x_1\}, \{X = x_2\}, \ldots$ hodisalar birgalikda bo'lmaganligi uchun ular to'la gruppani tashkil etadi va ularning ehtimolliklari yig'indisi birga teng bo'ladi, ya'ni $\sum_i p_i = \sum_i P\{X = x_i\} = 1$.

✓X t.m. *diskret t.m.* deyiladi, agar $x_1, x_2, \ldots$ chekli yoki sanoqli to'plam bo'lib, $P\{X = x_i\} = p_i > 0\ (i = 1, 2, \ldots)$ va $p_1 + p_2 + \ldots = 1$ tenglik o'rinli bo'lsa.

✓X va Y diskret t.m.lar *bog'liqsiz* deyiladi, agar $A_i = \{X = x_i\}$ va $B_i = \{Y = y_j\}$ hodisalar $\forall i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, m$ da bog'liqsiz bo'lsa, ya'ni $P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\},\ n, m \geq \infty$.

1-misol. 10 ta lotoreya biletida 2 tasi yutuqli bo'lsa, tavakkaliga olingan 3 ta lotoreya biletlari ichida yutuqlilari soni X t.m.ning taqsimot qonunini toping.

X t.m.ni qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$. Bu qiymatlarning mos ehtimolliklari esa

$$p_1 = P\{X = 0\} = \frac{C_2^0 \cdot C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{56}{120} = \frac{7}{15};$$

$$p_2 = P\{X = 1\} = \frac{C_2^1 \cdot C_8^2}{C_{10}^3} = \frac{56}{120} = \frac{7}{15};$$

$$p_3 = P\{X = 2\} = \frac{C_2^2 \cdot C_8^1}{C_{10}^3} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}.$$

X t.m. taqsimot qonunini jadval ko'rinishida yozamiz:

X	0	1	2
P	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

$$\sum_{i=1}^{3} p_i = \frac{7}{15} + \frac{7}{15} + \frac{1}{15} = 1$$

Taqsimot funksiyasi va uning xossalari

Diskret va uzluksiz t.m.lar taqsimotlarini berishning universal usuli ularning taqsimot funksiyalarini berishdir. Taqsimot funksiya $F(x)$ orqali belgilanadi.

✓$F(x)$ funksiya X t.m.ning *taqsimot funksiyasi* $\forall x \in R$ son uchun quyidagicha aniqlanadi:

$$F(x) = P\{X < x\} = P\{\omega : X(\omega) < x\}. \tag{1}$$

Taqsimot funksiyasi quyidagi xossalarga ega:

1. $F(x)$ chegaralangan:

$$0 \leq F(x) \leq 1.$$

2. $F(x)$ kamaymaydigan funksiya: agar $x_1<x_2$ bo‘lsa, u holda $F(x_1) \leq F(x_2)$.

3. $F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

4. $F(x)$ funksiya chapdan uzluksiz:

$$\lim_{x\to x_0-0} F(x) = F(x_0).$$

Isboti: 1. Bu xossa (1) va ehtimollikning xossalaridan kelib chiqadi.
2. $A=\{X<x_1\}, B=\{X<x_2\}$ hodisalarni kiritamiz. Agar $x_1<x_2$ bo‘lsa, u holda $A \subseteq B$ va $P(A) \leq P(B)$, ya’ni $P(X<x_1) \leq P(X<x_2)$ yoki $F(x_1) \leq F(x_2)$.
3. $\{X<-\infty\} = \varnothing$ va $\{X<+\infty\} = \Omega$ ekanligi va ehtimollikning xossasiga ko‘ra

$$F(-\infty) = P\{X<-\infty\} = P\{\varnothing\} = 0$$
$$F(+\infty) = P\{X<+\infty\} = P\{\Omega\} = 1.$$

4. $A=\{X<x_0\}, A_n=\{X<x_n\}$ hodisalarni kiritamiz. Bu yerda $\{x_n\}$ ketma-ketlik monoton o‘suvchi, $x_n \uparrow x_0$. A_n hodisalar ketma-ketligi ham o‘suvchi bo‘lib, $\bigcup\limits_n A_n = A$. U holda $P(A_n) \to P(A)$, ya’ni $\lim\limits_{x\uparrow x_0} F(x) = F(x_0)$. ■

Diskret t.m. taqsimot funksiyasi quyidagicha ifodalanadi:

$$F(x) = \sum_{x_i<x} p_i. \tag{2}$$

2-misol. 1-misoldagi X t.m. taqsimot funksiyasini topamiz.

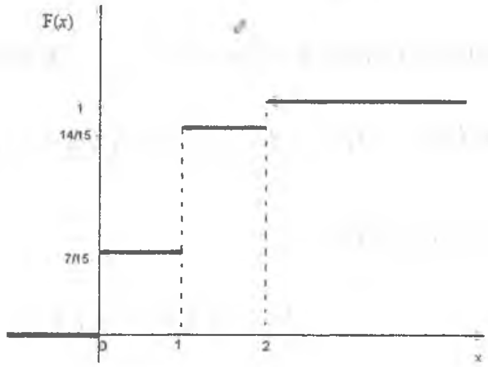
X	0	1	2
P	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

1. Agar $x \leq 0$ bo‘lsa, $F(x) = P\{X<0\} = 0$;
2. Agar $0<x\leq1$ bo‘lsa, $F(x) = P\{X<1\} = P\{X=0\} = \frac{7}{15}$;
3. Agar $1<x\leq2$ bo‘lsa, $F(x) = P\{X=0\} + P\{X=1\} = \frac{7}{15} + \frac{7}{15} = \frac{14}{15}$;
4. Agar $x>2$ bo‘lsa, $F(x) = P\{X=0\} + P\{X=1\} + P\{X=2\} = \frac{7}{15} + \frac{7}{15} + \frac{1}{15} = 1$.

Demak,

$$F(x) = \begin{cases} 0, \; agar \; x \leq 0 \\ 7/15, \; agar \; 0<x\leq1 \\ 14/15, \; agar \; 1<x\leq2 \\ 1, \; agar \; x>2 \end{cases}$$

$F(x)$ taqsimot funksiya grafigi 1-rasmda keltirilgan.



1-rasm.

✓X t.m. uzluksiz deyiladi, agar uning taqsimot funksiyasi ixtiyoriy nuqtada uzluksiz bo'lsa.

Agar $F(x)$ taqsimot funksiya uzluksiz t.m. taqsimot funksiyasi bo'lsa, taqsimot funksiyaning 1-4 xossalaridan quyidagi natijalarni keltirish mimkin:

1.X t.m.ning [a,b) oraliqda yotuvchi qiymatni qabul qilish ehtimolligi taqsimot funksiyaning shu oraliqdagi orttirmasiga teng:

$$P\{a \le X < b\} = F(b) - F(a). \tag{3}$$

2.X uzluksiz t.m.ning tayin bitta qiymatni qabul qilishi ehtimolligi nolga teng:

$$P\{X = x_i\} = 0$$

1-natijada $[a,b]$, $(a,b]$, (a,b) oraliqlar uchun ham (3) tenglik o'rinli, ya'ni

$$P\{a \le X < b\} = P\{a \le X \le b\} = P\{a < X \le b\} = P\{a < X < b\} = F(b) - F(a).$$

Masalan, $P\{a \le X < b\} = P\{X = a\} + P\{a < X < b\} = P\{a < X < b\}$.

Isboti. 1. $a<b$ bo'lgani uchun $\{X < b\} = \{X < a\} + \{a \le X < b\}$. $\{X < a\}$ va $\{a \le X < b\}$ hodisalar birgalikda bo'lmagani uchun $P\{X < b\} = P\{X < a\} + P\{a \le X < b\}$. $P\{a \le X < b\} = P\{X < b\} - P\{X < a\} = F(b) - F(a)$.

2. (2.3.3.) tenglikni $[a,x)$ oraliqqa tatbiq etamiz: $P\{a \le X < x\} = F(x) - F(a)$. $F(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz bo'lgani uchun $\lim\limits_{x\to a} F(x) = F(a)$.

$\lim\limits_{x\to a} P\{a \le X < x\} = P\{X = a\} = \lim\limits_{x\to a} F(x) - F(a) = F(a) - F(a) = 0$. ■

Zichlik funksiyasi va uning xossalari

Uzluksiz t.m.ni asosiy xarakteristikasi zichlik funksiya hisoblanadi.

✓Uzluksiz t.m. *zichlik funksiyasi* deb, shu t.m. taqsimot funksiyasidan olingan birinchi tartibli hosilaga aytiladi.

Uzluksiz t.m. zichlik funksiyasi $f(x)$ orqali belgilanadi. Demak,

$$f(x) = F'(x).$$

Zichlik funksiyasi quyidagi xossalarga ega:

1. $f(x)$ funksiya manfiy emas, ya'ni

$$f(x) \geq 0.$$

2.X uzluksiz t.m.ning $[a,b]$ oraliqqa tegishli qiymatni qabul qilishi ehtimolligi zichlik funksiyaning a dan b gacha olingan aniq integralga teng, ya'ni

$$P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x)dx.$$

3.Uzluksiz t.m. taqsimot funksiyasi zichlik funksiya orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

4.Zichlik funksiyasidan $-\infty$ dan $+\infty$ gacha olingan xosmas integral birga tengdir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Isbotlar: 1. $F(x)$ kamaymaydigan funksiya bo'lgani uchun $F'(x) \geq 0$, ya'ni $f(x) \geq 0$.
2. $P\{a \leq X < b\} = F(b) - F(a)$ tenglikdan Nyuton-Leybnis formulasiga asosan:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Bu yerdan $P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x)dx$.

3. 2-xossadan foydalanamiz:

$$F(x) = P\{X < x\} = P\{-\infty < X < x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

4. Agar 2-xossada $a = -\infty$ va $b = +\infty$ deb olsak, u holda muqarrar $X \in (-\infty, +\infty)$ ga hodisaga ega bo'lamiz, u holda

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = P\{-\infty < X < +\infty\} = P\{\Omega\} = 1.$$

■

3.-misol. X t.m. zichlik funksiyasi $f(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$ tenglik bilan berilgan. O'zgarmas a parametrni toping.

Zichlik funksiyaning 4-xossasiga ko'ra $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{a}{1+x^2}dx = 1$, ya'ni

$$a \cdot \lim_{\substack{d \to +\infty \\ c \to -\infty}} \int_c^d \frac{1}{1+x^2}dx = a \cdot \lim_{\substack{d \to +\infty \\ c \to -\infty}} arctgx \Big|_c^d = a \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = a \cdot \pi = 1.$$ Demak, $a = \dfrac{1}{\pi}$

Nazorat uchun savollar

1. Tasodifiy miqdor deb nimaga aytiladi?
2. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni ayting.
3. Taqsimot funksiyasi xossalarini ayting.
4. Zichlik funksiyasi nima, ta`rif bering.

Adabiyotlar:

1. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012.
2. Abdushukurov A.A. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika.Toshkent."Universitet".2010y 162bet.
3. Anderson D.A.Diskretnaya matematika I kombinatorika. M."Vilyams",2004g.-960s.ISBN5-8459-0498-6

Amaliy mashg'ulot materiallari

1-amaliy mashg'ulot. To'plamlar va ular ustida amallar. Munosabatlar. Binar munosabatlar

Darsning maqsadi: Talabalarga to'plam va to'plamlar yig'indisi,ayirmasi, birlashmasi, dekart ko'paytmasi va qism to'plamlarini topish o'rgatiladi.

1-misol. Agar A={1,3,4,5,6,8,9}, B={2,4,6,8}, C={6,7,8} bo'lsa, $A\setminus C$, $A+C$, AC larni aniqlang.

Yyechish: $A\setminus C = \{C\ ga\ tegishli\ bo'lmagan\ A ning\ elementlari\} = \{1,3,4,5,9\}$,

$A+C = \{1,3,4,5,6,7,8,9\}$,

$AB = \{A\ va\ B\ ning\ umumiy\ elementlaridan\ iborat\ bo'ladi\} = \{4,6,8\}$.

2-misol. Agar A={1,3,4}, B={2,4,6,8} bo'lsa, AxB va BxA dekart ko'paytmalarini toping.

Yyechish:

$AxB = \{(1,2),(1,4),(1,6),(1,8),(3,2),(3,4),(3,6),(3,8)(4,2),(4,4),(4,6),(4,8)\}$

$BxA = \{(2,1),(2,3),(2,4),(4,1),(4,3),(4,4),(6,1),(6,3),(6,4)(8,1),(8,3),(8,4)\}$

ga teng bo'ladi.

3- misol. A={2,4,6} to'plam qism to'plamlarini toping.

Yyechish: {Ø} ,{2}, {4}, {6}, {2,4}, {2,6}, {4,6}, {2,4,6} qism to'plamlar bo'ladi.

4- misol. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ tengligini isbotlang.

Yyechish: $A \cap (B \cup C) =$
$(A \cap B) \cup$
$(A \cap C)$ *isbotlash uchun avvallo ikkita to'plam teng bo'lishi uchun yani* $A = B$ *qachonki* $A \subset B$ *bir vaqtda* $B \subset A$ *bo'lishi kerak*:

1) $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *isbotlaymiz*, $\forall x \epsilon\ A \cap (B \cup C) \Rightarrow$
$x \epsilon\ A\ va\ x \epsilon (B \cup C) \Rightarrow x \epsilon\ A\ va\ x \epsilon B\ yoki\ x \epsilon A \Rightarrow x \epsilon A \cap B\ yoki\ x \epsilon A \cap C \Rightarrow$
$x \epsilon (A \cap B) \cup (B \cup C)$ *kelib chiqadi.*
2) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$ *isbotlaymiz*, $\forall x \epsilon\ (A \cap B) \cup (B \cap C) \Rightarrow$
$x \epsilon\ (A \cap B)\ yoki\ x \epsilon (B \cap C) \Rightarrow x \epsilon\ A\ va\ x \epsilon B\ yoki\ x \epsilon A\ va\ x \epsilon C \Rightarrow$
$x \epsilon A\ va\ x \epsilon B \cup C \Rightarrow x \epsilon A \cap (B \cup C)$ *kelib chiqadi.*

Demak, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ kelib chiqadi.

1. Qaysi munosabat to'g'riligini aniqlang.
   1) $\{1,2\} \in \{1,2,\{1,2,3\}\}$ yoki $\{1,2\} \subset \{1,2,\{1,2,3\}\}$
   2) $\{1,2\} \in \{1,2,\{1,2\}\}$ yoki $\{1,2\} \subset \{1,2,\{1,2\}\}$

2. N={1,2,3…,n,…} – natural sonlar to'plami, Z={…,-n,…-3,-2,-1,0,1,2,3,…,n,…} – butun solar to'plami, R=$\{\frac{m}{n}; m \in Z, n \in N\}$ = rasional sonlar to'plami va I = irrasional sonlar to'plami berilgan bo'lsin.

1) $N \cup Z = ?,\ N \cup Z \cup R = ?,\ Z \cup R = ?,\ N \cup R = ?$
2) $N \cap Z = ?,\ N \cap Z \cap R = ?,\ Z \cap R = ?,\ N \cap R = ?$
3) $N \backslash Z = ?,\ Z \backslash R = ?,\ R \backslash Z = ?,\ Z \backslash N = ?$

3. A={1,2,3,...50}, B={3n: n∈ N} va C={7n: n∈ N} - to‘plamlar berilgan.

1) $A \cup B = ?$	7) $A \backslash B = ?$
2) $A \cup C = ?$	8) $A \backslash C = ?$
3) $B \cup C = ?$	9) $B \backslash C = ?$
4) $A \cap B = ?$	10) $B \backslash A = ?$
5) $A \cap C = ?$	11) $C \backslash A = ?$
6) $B \cap C = ?$	12) $C \backslash B = ?$

4. A={1,2,3} va B={a,b} - to‘plamlar berilgan. Quyidagilarni dekart ko‘paytmasini toping.
1) AxB=?
2) BxA=?
3) AxA=?
4) BxB=?

5. A={1,3} va B={2,4} - to‘plamlar berilgan. Quyidagilarni dekart ko‘paytmasini toping.
1) AxB=?
2) BxA=?

6. To‘plamlarning tengligini isbotlang:
1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
3) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$
4) $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$
5) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
6) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

2-amaliy mashg'ulot. To'plamlar va ular ustida amallar. Munosabatlar. Binar munosabatlar.

Darsning maqsadi: Talabalarga to'plamning quvvati,buleani, universal to'plamlar, binary munosabatlarni o'rganish va masalalar yyechish o'rgatiladi.

1-misol. $A=\{a,b\}$, $B=\{a,b,c\}$, $C=\{e,f,k\}$ va $D=\{i,j\}$ bo'lsin. U holda $E=B\cup C\cup D=\{a,b,c,e,f,k,i,j\}$ va $F=A\cup B\cup C\cup D=\{a,b,c,e,f,k,i,j\}$ bo'ladi. Ko'rinib turibdiki, $E=F$. Bu yerdagi barcha to'plamlarning quvvatlarini aniqlaymiz: $|A|=2$, $|B|=3$, $|C|=3$, $|D|=2$, $|E|=8$ va $|F|=8$. Ular uchun $|E|=8<|A|+|B|+|C|+|D|=10$ (A va B to'plamlarda ikkita umumiy a va b elementlar bor) va $|F|=8=|B|+|C|+|D|$ (B bilan C, C bilan D va B bilan D juftliklar umumiy elementga ega emas).

3-misol. $A=\{a,b,c\}$, $B=\{a,b,c,d\}$, $C=\{e,f,k\}$ bo'lsa, u holda $A\cap B=\{a,b,c\}$, $A\cap B\cap C=\varnothing$, $A\cap C=\varnothing$, $B\cap C=\varnothing$ bo'ladi. Osonlik bilan ko'rish mumkinki, $|A\cap B|=3=\min\{|A|,|B|\}$, chunki $|A|=3$, $|B|=4$ va $A\subset B$. Bundan tashqari, $|A\cap B\cap C|=|\varnothing|=0<\min\{|A|,|B|,|C|\}=3$. ■

4-misol. Eramizning i- yilida butun dunyoda tug'ilgan bolalar to'plamini T_i bilan va n bilan $n\geq 2$ shartni qanoatlantiruvchi natural sonni belgilasak, u holda $\bigcap_{i=2001}^{2000+n} T_i=\varnothing$ bo'ladi.

5-misol. Agar ρ onalik munosabatini bildirsa, u vaqtda <Xurshida, Iroda>$\in\rho$ simvol Xurshida Irodaning onasi ekanligini bildiradi.

6-misol. Ternar munosabatiga butun sonlar to'plamidagi qo'shish amali misol bo'la oladi. $5=2+3$ yozuvini $<5,2,3>\in +$ shaklida ham yozish mumkin.

7-misol. A={1,2,7} va B={2,4} - to'plamlar berilgan. Bu to'plamlarda x-y=5 binar munosabatlarni aniqlang.

yyechish: Avvalo AxB dekart ko'paytmani topamiz.

$$AxB=\{(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(7,2),(7,4)$$

A va B to'plam dekart ko'paytmasining { (7,2)} elementida berilgan munosabat bajariladi, demak to'plamda binar munosabat bor.

1. U universal to'plamning A va B qism to'plamlari bo'lsin. Quyidagi tasdiqlarni isbotlang:
   a) ixtiyoriy A to'plam uchun $A\cup B=A\Rightarrow B=\varnothing$;
   b) ixtiyoriy A to'plam uchun $A\cap B=A\Rightarrow B=U$;
   d) agar $A\cup B=U$ va $A\cap B=\varnothing$ bo'lsa, u holda $B=\overline{A}$ va $A=\overline{B}$ bo'ladi.
2. Quyidagi tengliklarni isbot qiling:

a) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$;
b) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$;
d) $A\setminus B=A\setminus(A\cap B)$;
e) $A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$;
f) $A\cup B=A\cup(B\setminus A)$;
g) $(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)$;
h) $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$;
i) $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus C$;
j) $A\cap(B\setminus A)=\varnothing$;
k) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\setminus C$;
l) $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$;
m) $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\cap C)$;
n) $\overline{A\cap\overline{B}\cup B}=\overline{A}\cup B$.

3. Ixtiyoriy A va B to'plamlar uchun quyidagi tasdiqlarning o'rinli bo'lishini ko'rsating:
   a) $(A\setminus B)\bigcup B = A \Rightarrow B \subseteq A$;
   b) $B \subseteq A \Rightarrow (A\setminus B)\bigcup B = A$ – a) banddagi tasdiqqa teskari tasdiq;
   d) $(A\bigcap B)\bigcup C = A\bigcap(B\bigcup C) \Leftrightarrow C \subseteq A$.
4. Ushbu paragrafda isbotlangan teoremalardagi tengliklarni tahlil qiling va o'zaro ikki taraflama (qo'shma) bo'ladidan tengliklarlarni aniqlang.
5. $|A|=n$, $|B|=k$, $A\subset C\subset B$ va $A\subseteq D\subseteq B$ bo'lsa, n, k, $|C|$ va $|D|$ sonlarni solishtiring.

6. A={1,2,3} va B={2,4} - to'plamlar berilgan. Bu to'plamlarda quyidagi binar munosabatlarni aniqlang.
   1) x+y=5
   2) 2x=y
   3) x-y=1
   4) 2x:y=1
7. Quyidagi munosabatlarning qaysi biri noto'g'ri?
   а) $A\cup B = B\cap A$
   б) $A\cup B = B\cup A$
   с) $A\cap\varnothing = \varnothing$
   д) $A\cap B = B\cap A$
8. Quyidagi munosabatlarning qaysi biri to'g'ri?
   а) $A\cap B\cap\varnothing = \varnothing$
   б) $A\cup B = B\cap A$
   с) $(A\cup B)\cap C = A\cap B\cap C$
   д) $A\cap\varnothing = A$
9. To'plam elementlarini toping: $A=\{1,2,4,5\}$; $B=\{1,3,6,7\}$; $C=\{2,3,6,7\}$.
   1) $A\cap B\cap C\cup B\cap C\cup B\cap C\cup B\cap\overline{C}$,
   2) $(A\cup B\cup C)\cap(A\cup B\cup\overline{C})$,
   3) $(A\cap B\cup C)\cap(A\cap B\cup\overline{C})$,
   4) $(A\cup\overline{B}\cup C)\cap(\overline{A}\cup\overline{B}\cup C)\cap B$.
10. Quyidagi tengliklarni isbot qiling.
   a) $A\setminus(B\bigcup C) = (A\setminus B)\bigcap(A\setminus C)$;
   b) $A\setminus(B\bigcap C) = (A\setminus B)\bigcup(A\setminus C)$;
   d) $A\setminus B = A\setminus(A\bigcap B)$;
   e) $A\setminus(A\setminus B) = A\bigcap B$;
   f) $A\bigcap B = A\bigcup(B\setminus A)$;
   g) $(A\setminus B)\setminus C = (A\setminus C)\setminus(B\setminus C)$;
   h) $A\bigcap(B\setminus C) = (A\bigcap B)\setminus(A\bigcap C)$;
   i) $A\bigcap(B\setminus C) = (A\bigcap B)\setminus C$;
   j) $A\bigcap(B\setminus A) = \varnothing$;
   k) $A\setminus(B\bigcup C) = (A\setminus B)\setminus C$;

3-amaliy mashg'ulot. Maxsus binar munosabatlar. Ekvivalentlik munosabati. Tartiblangan to'plamlar.

Darsning maqsadi: Talabalarga maxsus binar munosabatlar. ekvivalentlik munosabati. tartiblangan to'plamlar doir misollar yyechish o'rgatiladi.

1-misol. R haqiqiy sonlar to'plamida x va y sonlarning tenglik munosabatini aniqlang.

Yechish: Uning belgisi x=y. Bu munosabat R^2 tekisliqsagi y=x to'g'ri chiziq nuqtalari bilan beriladi.

2-misol. R haqiqiy sonlar to'plamida x va y sonlarning tengmaslik munosabatini aniqlang.

Yechish: Uning belgisi x≠y. Bu munosabat R^2 tekisliqsagi y=x to'g'ri chiziqqa kirmagan barcha nuqtalardan iborat bo'lgan to'plam bilan beriladi.

3-misol. A-tekislikdagi to'g'ri chiziqlar to'plami bo'lsin. R binar munosabat A to'plamning ixtiyoriy to'g'ri chiziqlarning o'zaro parallel bo'lishi munosabatini ifodalasin: $R = \{(x, y) \in AxA: x\ paralel\ y\}\ R \subset AxA$

Yechish: Ravshanki, bu munosabat refleksiv (har bir to'g'ri chiziq o'zi-o'ziga parallel bo'ladi), simmetrik (agar x to'g'ri chiziq y to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsa, y to'g'ri chiziq ham x to'g'ri chiziqqa parallel bo'ladi) hamda tranzitiv (agar x to'g'ri chiziq y to'g'ri chiziqqa, y to'g'ri chiziq z to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsa, u holda x to'g'ri chiziq z to'g'ri chiziqqa parallel bo'ladi). Demak, A to'plamda aniqlangan bunday munosabat ekvivalent munosabat bo'ladi.

1-misol. Ushbu $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ to'plamni olaylik.

Bu to'plamda quyidagi binar munosabatlarini turlarini aniqlang :

1) 1) R_1 munosabat: $\forall x, y \in A$, xR_1y : x-y ayirmaning 3 ga qoldiqsiz bo'linishini ifodalasin;
2) 2) R_2 munosabat barcha $\forall x, y \in A$ lar uchun xR_2y: x ning y dan kichik yoki tengligini ifodalasin;
3) 3) R_3 munosabat barcha $\forall x, y \in A$ lar uchun xR_3y: y ning x ga qoldiqsiz bo'linishini ifodalasin;
4) 4) R_4 munosabat barcha $\forall x, y \in A$ lar uchun xR_4y: 0, $x * y$ ko'paytmaning manfiy emasligini ifodalasin;
5) 5) R_5 munosabat barcha $\forall x, y \in A$ lar uchun xR_5y: x ninig kvadrati y ning kvadratiga teng ekanligini ifodalasin.

2-misol. Simmetrik munosabatni ko'rsating:

1) Salima – Odilning singlisi;
2) A to'g'ri chiziq B to'g'ri chiziqqa perpendikulyar;
3) Daftar sumkada turibdi;
4) 25+10=15+20

3-misol. Ekvivalent munosabatni ko'rsating:

1) $a + b = 100$, $a, b \in \{1, 2, \dots, 100\}$;
2) $a = b$, $a, b \in \{1, 2, \dots, 9\}$;
3) A to'g'ri chiziq perpendikulyar B to'g'ri chiziqqa;
4) Shoxista Nilufardan ikki qavat balandda yashaydi;
5) Nilufar Shoxistaga savol berdi;
6) A tog'ning balandligi B tog'ning balandligiga teng;
7) Shoxista va Nilufar O'zbekiston Milliy universitetini bir yilda tamomladi;
8) Nilufar do'sti Shoxista bilan uchrashdi;
9) Niufar yozgan kitobni Shoxista o'qidi;
10) A mashina B mashina bilan to'qnashdi.

4-amaliy mashg'ulot. Maxsus binar munosabatlar. Ekvivalentlik munosabati. Tartiblangan to'plamlar.

Darsning maqsadi: Talabalarga qisman tartiblangan to'plamlar, chiziqli tartiblangan to'plamlar, tartiblangan to'plamlar doir misollar yyechish o'rgatiladi.

1-misol. Haqiqiy sonlarni qiymatiga qarab tartiblash chiziqli tartiblash munosabatiga misol bo'la oladi.

2.1-misol. Barcha natural sonlardan iborat $N = \{1,2,3,\dots,n,\dots\}$ to'plamni olaylik. Bu to'plamning ixtiyoriy n va m elementlari orasida $n \leq m$ munosabat n ning m dan kichik yoki tengligini ifodalasin.

Yyechish: Ko'rinib turibdiki, $(N, \leq)$ to'plam chiziqli tartiblangan to'plam bo'ladi.

2.2-misol. $N = \{1,2,3,\dots,n,\dots\}$ to'plamning ixtiyoriy n va m $(n \in N, m \in N)$ elementlari orasida $n \leq m$ munosabat m ning n ga qoldiqsiz bo'linishini $\left(\frac{m}{n} = k, k \in N\right)$ ifodalasin.

Yyechish: Bu holda (N,/) to'plam qisman tartiblangan to'plam bo'ladi.

2.3-misol. Natural sonlar to'plami N ning barcha qism to'plamlaridan iborat R(N) to'plamni olaylik. Bu R(N) to'plamning ixtiyoriy A, B $(A \in R(N), B \in R(N))$ elementlar uchun $A \leq B$ munosabat A to'plamni B to'plamning qismi, ya'ni $A \subset B$ bo'lishini ifodalasin.

Yyechish: Bu holda $(R(N), \subset)$ to'plam qisman tartiblangan to'plam bo'ladi. Ayni paytda bu to'plam chiziqli tartiblangan bo'lmaydi, chunki $\{1,2\} \subset \{2,3\}$ yoki $\{2,3\} \subset \{1,2\}$ munosabatlarning birortasi o'rinli bo'lmaydi.

Agar, $(M, \leq)$ tartiblangan to'plam bo'lib, S esa $S \neq \emptyset$ uning qism to'plami bo'lsin. Bunda $(S, \leq)$ to'plam ham tartiblangan to'plam bo'ladi. Ya'ni tartiblangan to'plamning har qanday bo'sh bo'lmagan qism to'plami ham o'sha to'plamda aniqlangan tartib munosabatga nisbatan, tartiblangan to'plam bo'ladi.

1-misol. Tartiblangan munosabatni ko'rsating:

1) Shoxista katta Nilufardan;
2) Nilufar – Shoxistaning singlisi;
3) a kesma b kesmadan qisqa;
4) a kesma b kesmadan 2 sm uzun;
5) Nilufar Shoxistadan baland qavatda yashaydi;
6) a soni b sonidan 4 taga kata, bu erda $a, b \in \{1,2,\dots,10\}$;
7) a soni b soniga teng, bu erda $a, b \in \{1,2,\dots,10\}$;
8) a soni b sonidan 2 martta kata, bu erda $a, b \in \{1,2,\dots,20\}$;
9) Nasiba katta Jahongirdan;
10) A mashina B mashina bilan to'qnashdi.

5-amaliy mashg'ulot. Mulohaza. Mantiqiy bog'lovchilar. Formula, qismiy formula. Formulaning teng kuchliligi. Chinlik jadvali.

Darsning maqsadi: Talabalarga mantiqiy bog'lovchilar, formula, qismiy formula, formulaning teng kuchliligi, chinlik jadvali doir misollar yyechish o'rgatiladi.

1-misol. "7=tub son", 2) "5 ning kvadrati 36 ga teng" 3)"15>20", 4) 24 soni 5ga qoldiqsiz bo'linadi" bu gaplar mulohazalardir. Bu gaplarnnng 1- va 2- lari chin mulohazalardir. 3- va 4- lari esa yolg'on- mulohazalardir.

2-misol. $(\bar{A} \vee \bar{B}) \wedge C => \left(\overline{A \wedge B \vee \bar{C}}\right)$ formulani soddalashtiring.

Yechish: $(\bar{A} \vee \bar{B}) \wedge C => \left(\overline{A \wedge B \vee \bar{C}}\right) \equiv \overline{(\bar{A} \vee \bar{B}) \wedge C} \vee \left(\overline{A \wedge B \vee \bar{C}}\right) \equiv \bar{\bar{A}} \vee \bar{\bar{B}} \vee \bar{C} \vee \overline{A \wedge B} \wedge \bar{\bar{C}} \equiv \overline{\overline{A \wedge B}} \vee \bar{C} \vee \overline{A \wedge B} \wedge C \equiv A \wedge B \vee (\bar{C} \vee \overline{A \wedge B}) \wedge (\bar{C} \vee C) \equiv A \wedge B \vee (\bar{C} \vee \overline{A \wedge B}) \wedge 1 \equiv A \wedge B \vee (\bar{C} \vee \overline{A \wedge B}) \equiv A \wedge B \vee (\overline{A \wedge B} \vee \bar{C}) \equiv (A \wedge B \vee \overline{A \wedge B} \vee \bar{C}) \equiv 1 \vee \bar{C} \equiv 1$

3-misol. $\overline{A \vee B} => A \wedge B$ formulaga teng kuchli keltirilgan formula yozilsin.

$$\overline{A \vee B} => A \wedge B \equiv (\overline{A \vee B} => A \wedge B) \wedge (A \wedge B => \overline{A \vee B}) \equiv (\overline{\overline{A \vee B}} \vee A \wedge B) \wedge (\overline{A \wedge B} \vee \overline{A \vee B}) \equiv$$

$$\equiv (A \vee B \vee A \wedge B) \wedge (\bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{A} \wedge \bar{B}) \equiv (A \vee (B \vee B \wedge A)) \wedge (\bar{A} \vee (\bar{B} \vee \bar{B} \wedge \bar{A})) \equiv (A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee \bar{B})$$

4-misol. $(A \vee B => C) <=> B \vee C$ formulaga teng kuchli shunday formula yozingki, bu formula tarkibida faqat konyunksiya va inkor operatsiyalari qatnashsin.

Yechish:

$$(A \vee B => C) <=> B \vee C \equiv (\overline{A \vee B} \vee C) <=> \overline{\overline{B \vee C}} \equiv (\bar{A} \wedge \bar{B} \vee C) <=> \bar{\bar{B}} \wedge \bar{\bar{C}} \equiv (\overline{\bar{\bar{A}} \wedge \bar{\bar{B}} \wedge C}) <=> \bar{\bar{B}} \wedge \bar{\bar{C}} \equiv$$

$$(\overline{\bar{\bar{A}} \wedge \bar{\bar{B}} \wedge C} => \bar{\bar{B}} \wedge \bar{\bar{C}}) \wedge (\bar{\bar{B}} \wedge \bar{\bar{C}} => \overline{\bar{\bar{A}} \wedge \bar{\bar{B}} \wedge C}) \equiv (\bar{\bar{A}} \wedge \bar{\bar{B}} \wedge C \vee \bar{\bar{B}} \wedge \bar{\bar{C}}) \wedge (\bar{B} \wedge \bar{C} \vee \overline{\bar{\bar{A}} \wedge \bar{\bar{B}} \wedge C}) \equiv$$

$$\equiv (\overline{\bar{\bar{A}} \wedge \bar{\bar{B}} \wedge \bar{C} \wedge \bar{B} \wedge \bar{C}}) \wedge (\overline{\bar{\bar{B}} \wedge \bar{\bar{C}} \wedge \bar{\bar{A}} \wedge \bar{\bar{B}} \wedge \bar{C}})$$

5-misol. $A \wedge B <=> C$ formulani shunday almashtiringki, natijada hosil bo'lgan formula tarkibida faqat V va inkor operatsiyalar qatnashsin.

Yechish:

$$A \wedge B <=> C \equiv (A \wedge B => C) \wedge (C => A \wedge B) \equiv (\overline{A \wedge B} \vee C) \wedge (\bar{C} \vee A \wedge B) \equiv$$

$$\equiv (\bar{A} \vee \bar{B} \vee C) \wedge (\bar{C} \vee \overline{\bar{A} \vee \bar{B}}) \equiv \overline{\overline{(\bar{A} \vee \bar{B} \vee C)} \vee \overline{(\bar{C} \vee \overline{\bar{A} \vee \bar{B}})}}$$

6-misol. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ formula rostlik jadvali tuzilsin.

Yechish:

x	y	z	$y \wedge z$	$x \vee y$	$x \vee z$	$x \vee (y \wedge z)$	$(x \vee y) \wedge (x \vee z)$	$x \vee (y \wedge z) \equiv$ $\equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

1.1. Quyidagi gaplarning qaysilari mulohaza bo'ladi.

1. 15 • 4 = 60.
2. (4+7) • 3- 12 : 3= 62.
3. 29 - tub son.

4. EKUB (956,576) = 12.
6. 1000000 - juda katta son.
7. Kvadratning yuzi bir tomonining ikkklanganiga teng.
8. Barcha. burchaklari o‘zaro teng bo‘lgan ko‘pburchak muktazam bo‘ladi.
9. $x^2 - 7x + 5 = 0$ kvadrat tenglama xaqiqiy ildizlarga ega emas.
10. 249 son 9 ga bo‘linadim?
11. Kitobingizni 10 – betini oching!
12. $x + 5 = 12$ tenglamaning ildizi 7 ga teng.
13. x ni 5 ga qo‘shsak 12 bo‘ladi.
14. Qarama - qarshi tomonlari o‘zaro parallel bo‘lgan to‘rtburchakka paralelogram deyiladi.

1.2 Shunday o‘n ikkkta gap yozingki ulardan to‘rtasi chin mulohaza bo‘lsin va to‘rttasi yolg‘on mulohaza bo‘lsin, to‘rttasi mulohaza bo‘lmasin.

1.3 A - " 5 = 6 " va B- " 8<10 " mulohazalarning 1. kon’yunksiyasini 2. diz’yunksiyasini 3. ekubi implikatsiyasini 4. ekvivalenksiyasini 5. inkorlarini tuzing va xosil bo‘lgan mulohazalarning chin yoki yolg‘onligini aniqlang.

1.4 A - " Yer quyosh atrofida aylanadi ", B - " Quyosh yer atrofiyada aylanadi " mulohazalar uchun 1.3 mashqni bajaring.

2.1Quyidagi formulalarni ortiqcha qavslarsiz yozing:

1. $(A \wedge B) \vee (C \wedge D) \vee (A \wedge D)$

2. $X \wedge (\text{У} \vee (Z \wedge (\overline{X} \vee \text{У})))$

3. $(\overline{A \vee B}) \wedge (B \vee C)$

4. $(A \vee B) \rightarrow (A \wedge C) \vee B))$

5. $(A \wedge (B => (A \vee \overline{B})))$

6. $(A <=> (B \vee C)) \wedge ((B \wedge C) => \overline{A})$

2.2Quyidagi formulalarning chinlik jadvali tuzilsin:

1. $A \vee B => A \wedge B$

2. $A => B$

3. $A <=> B$

4. $\overline{(A \vee B) \wedge A}$

5. $(A <=> B) \wedge C => C$

6. $(A => B) \wedge (B => A) => (A <=> B)$

7. $A \wedge B \wedge \bar{C} \vee A \wedge \bar{B} \wedge C$

8. $(A => \bar{B} \vee C) \wedge (A \wedge \bar{B} \vee C)$

9. $(A <=> \bar{B} \vee C) \wedge (B => A \wedge C)$

10. $\overline{(A \wedge B \vee \bar{C})} => A \wedge (B \wedge C)$

11. $((A => B) => ((A => (B => C) => (A => C)))$

12. $(A \vee B) \wedge C => C \vee (A \vee B) \wedge (A \vee B)$

2.3.Quyidagi formulalarning AR, AY yoki bajariluvchi ekanligini aniqlang:

1. $\overline{A \vee B} \vee (B \vee C => A \vee B)$
2. $\overline{A \wedge B \vee C} => \bar{A} \wedge (\bar{B} \vee \bar{C})$
3. $((A => B) => \big((A => (B => C)) => (A => C)\big))$
4. $(A \vee B \wedge C \vee \bar{A} => \bar{B} \wedge C) \wedge (A => B)$
5. $(A \vee B) \wedge C => (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
6. $(B => C) => (A \vee B => A \vee C)$
7. $(\overline{A \wedge B}) \vee A \wedge C) \wedge (A \vee \overline{B \wedge C})$
8. $A \vee A => \overline{B => A}$
9. $(\bar{A} \wedge B \vee A \wedge B) => A \vee B$
10. $(A \vee \bar{B}) \wedge (B \vee \bar{A}) => A \wedge B$
11. $(A \vee B \vee C) \wedge (A \wedge \bar{B} \vee B \wedge C)$
12. $(A => B) => (A => (B => C))$

3.1.Quyidagi teng kuchliliklarni (xossalarni) chinlik jadvali yordamida isbotlang.

I. $A \equiv \bar{\bar{A}}$ (qo‘sh inkor tengkuchliligi)
II. $A \vee B \equiv B \vee A$ (dizyunksiyaning kommutativligi)
III. $A \wedge B \equiv B \wedge A$ (konyunksiyaning kommutativligi)
IV. $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$ (dizyunksiyaning assotsiativligi)
V. $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$ (konyunksiyaning assotsiativligi)
VI. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (dizyunksiyaning konyunksiyaga nisbatan distributivligi
VII. $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee B)$ (konyunksiyaning dizyunksiyasiga nisbatan distrubutivligi)
VIII. $A \vee A \equiv A$ (dizyunksiyaning idempotenligi)
IX. $A \wedge A \equiv A$ (konyunksiyaning idempotentligi)
X. $A \wedge (A \vee B) \equiv A$ (yutilish tengkuchliliklari)
XI. $A \vee (A \wedge B) \equiv A$
XII. $\overline{A \vee B} \equiv \bar{A} \wedge \bar{B}$ (de Morgan tengkuchliklari)
XIII. $\overline{A \wedge B} \equiv \bar{A} \vee \bar{B}$
XIV. $A \vee \bar{A} \equiv 1$ (Uchinchini inkor etish tengkuchliligi)
XV. $A \wedge \bar{A} \equiv 0$(qarama – qarshilik tengkuchliligi)
XVI. a) $A \vee 1 \equiv 1$ b) $A \wedge 1 \equiv A$ v) $A \vee 0 \equiv A$ d) $A \wedge 0 \equiv 0$
XVII. $A => B \equiv \bar{B} => \bar{A}$(kontropozitsiya tengkuchliligi)
XVIII. $A => B \equiv \bar{A} \vee B$
XIX. $A <=> B \equiv (A => B) \wedge (B => A)$
XX. $A \wedge (\bar{A} \vee B) \equiv A \wedge B$

3.2.Rostlik jadvali yordamida isbotlang.

1. $A => B \equiv \overline{A \wedge \bar{B}}$
2. $\overline{A => B} \equiv A \wedge \bar{B}$
3. $A \vee B \equiv \overline{\bar{A} \wedge \bar{B}}$
4. $A \wedge B \equiv \overline{\bar{A} \vee \bar{B}}$
5. $A <=> B \equiv \bar{A} <=> \bar{B}$
6. $\overline{A <=> B} \equiv \bar{A} \wedge B \vee \bar{B} \wedge A$

7. $A <=> B \equiv A \wedge B \vee \bar{A} \wedge \bar{B}$
8. $\overline{A \wedge B} \vee (\overline{B \vee A}) \equiv \bar{A} \vee \bar{B}$
9. $A \wedge (\bar{B} \vee \bar{C}) \equiv \overline{\bar{A} \vee B \wedge C}$
10. $A \wedge B \vee A \wedge \bar{B} \equiv A$
11. $(\bar{A} => B) \wedge (A \vee \bar{B}) \equiv A$
12. $(A => B) \wedge (\bar{A} => B) \equiv B$

4.1Quyidagi formulalarni soddalashtiring.

1. $(A \wedge B \vee A \wedge C) \wedge (A \wedge B \vee C)$
2. $A \wedge B \wedge (\bar{A} \vee B \wedge C \vee A \wedge \bar{C}) \vee A \wedge \bar{C}$
3. $(\bar{\bar{A}} \wedge \bar{\bar{B}} \Rightarrow A \vee B) \wedge B$
4. $A \wedge (B \wedge \bar{C} \vee A) \vee A \wedge (B \vee \bar{C}) \vee \bar{A} \wedge B \wedge C$
5. $\overline{A \vee B} \vee (A => B) \wedge B$
6. $(A \sim B) \wedge (A \vee B)$
7. $(A => B) \wedge (B => C) => (C => A)$
8. $A \wedge C \vee A \wedge \bar{C} \vee B \wedge C \vee \bar{A} \wedge B \wedge C$
9. $\overline{(A => B) \wedge (B => \bar{A})}$
10. $A \wedge B \wedge (A => \bar{B})$
11. $(A \sim B) \wedge \overline{A \wedge B}$
12. $(A => \bar{B}) \vee (\overline{A \vee B})$

4.2. Teng kuchli almashtirishlar qilib isbotlang.

1. $A \vee \bar{A} \wedge B \equiv A \vee B$
2. $(A \vee B) \wedge (A \vee \bar{B}) \equiv A$
3. $A \wedge B \vee \bar{A} \wedge B \vee \bar{A} \wedge \bar{B} \equiv A => B$
4. $\overline{A => B} \vee C \wedge \bar{A} \equiv A \wedge \bar{B} \vee \overline{\bar{C} \vee A}$
5. $(A => B) \wedge B \vee (\bar{A} \vee B) \wedge C \equiv \overline{A \wedge \bar{B}} \wedge (B \vee C)$
6. $\overline{A \wedge \bar{B}} => (\bar{B} => A) \equiv \overline{A => B} \vee A \vee B$
7. $A => (B => C) \vee A \vee \bar{C} \equiv 1$
8. $(A \vee \bar{B}) \wedge C \vee B \wedge C \equiv A \wedge B \vee \bar{C} => B \wedge C$
9. $\bar{A} \wedge B \wedge C \vee \bar{A} \wedge B \wedge \bar{C} \vee B \wedge C \equiv (A => B) \wedge C$
10. $\bar{A} \vee A \wedge B \vee A \wedge C \vee \bar{A} \wedge B \vee \bar{A} \wedge C \equiv A => B \vee C$
11. $(A \vee B) \wedge (\bar{C} => E) \equiv A \wedge C \vee A \wedge E \vee B \wedge C \vee B \wedge E$
12. $(A => B) \wedge (\bar{B} \vee C) => (C => A) \equiv A \vee \bar{C}$

4.3. Quyidagi formulalarni teng kuchli almashtirishlardan foydalanib, $\neg$, $\wedge$, $\vee$ mantiqiy bog‘lovchilarga almashtiring.

а) $((X \to Y) \wedge (Y \to X)) \to (X \vee Y)$;
б) $((X \to Y) \wedge (Y \to \neg X)) \to (Z \to X)$;
в) $((X \to Y) \wedge (\neg X \to \neg Y)) \to ((X \vee Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y))$;
г) $((X \leftrightarrow \neg Y) \to Z) \to (X \leftrightarrow \neg Z)$;
д) $(X \to (Y \leftrightarrow Z)) \leftrightarrow ((X \to Y) \leftrightarrow Z)$;
е) $(X \to Y) \to ((X \to Y) \to \neg X)$;
ж) $((X \wedge \neg Y) \to Y) \to (X \to \neg Y)$;
з) $((X \to Y) \to Y) \to Y$;
и) $(X \to Y) \to ((X \to \neg Y) \to (X \wedge Y))$;
к) $(X \to Z) \to ((X \vee Y) \to (\neg Z \vee Y))$;
л) $X \to \neg(Y \leftrightarrow Z)$.

4.4. Quyidagi formulalarni teng kuchli almashtirishlardan foydalanib, soddalashtiring.

а) $\neg(\neg P\vee Q)\to((P\vee Q)\to P)$;
б) $\neg(\neg P\wedge\neg Q)\vee((P\to Q)\wedge P)$;
в) $(P\to Q)\wedge(Q\to P)\wedge(P\vee Q)$;
г) $(P\to Q)\wedge(Q\to\neg P)\wedge(R\to P)$;
д) $(P\wedge R)\vee(P\wedge\neg R)\vee(Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)$;
е) $(P\to Q)\to((P\to\neg Q)\to\neg P)$;
ж) $\neg((P\leftrightarrow\neg Q)\vee R)\wedge Q$;
з) $(P\leftrightarrow Q)\to(\neg P\to Q)$;
и) $(P\to\neg Q)\wedge((P\to Q)\vee(R\to P))$;
к) $\neg((P\to Q)\wedge P)\wedge(\neg P\vee\neg Q)$;
л) $(P\leftrightarrow Q)\wedge(P\vee Q)$.

4.5. Quyidagi formulalarni teng kuchli almashtirishlardan foydalanib, yolg'on formula ekanligini isbotlang.
а) $((P\to Q)\to P)\wedge\neg P$;
б) $(\neg((X\vee Y)\to\neg(X\to Y))\vee\neg(Z\wedge Y))\to\neg((Z\to\neg Z)\vee Z)$;
в) $\neg(((X\to Y)\wedge(Y\to Z))\to(X\to Z))$;
г) $((X\to\neg Y)\to\neg(X\to Z))\wedge\neg(Z\to Y)$;
д) $(Z\to\neg(X\wedge\neg Z))\to(\neg(X\vee Z)\wedge X\wedge Y)$;
е) $((\neg P\to\neg Q)\to((\neg P\to Q)\to P))\to\neg((\neg P\to P)\to P)$;
ж) $\neg Q\wedge P\wedge(P\to Q)$;
з) $(P\vee Q)\leftrightarrow(\neg P\wedge(Q\to\neg Q))$;

5.1. Quyidagi formulalar keltirilgan formula ko'rinishida yozilsin.

1. $\overline{\overline{A}}\vee\overline{\overline{B}}\vee\overline{A\wedge\overline{B}}$
2. $\overline{A\wedge B\vee C}$
3. $\overline{A\wedge(B\vee C)\wedge C}$
4. $A\wedge B\vee C\Rightarrow\overline{A\wedge C}$
5. $(A\Rightarrow B)\wedge(B\Rightarrow A)\Rightarrow(A\Leftrightarrow B)$
6. $A\wedge B\Leftrightarrow(A\Rightarrow B)$
7. $(A\Rightarrow B)\wedge(B\Rightarrow C)\Rightarrow(C\Rightarrow\overline{A})$
8. $(A\Leftrightarrow B)\wedge(\overline{A}\Leftrightarrow B)\Rightarrow(A\vee B)\wedge(\overline{A}\vee\overline{B})$

5.2. Quyidagi formulalar shunday almashtirilsinki, natijada formula tarkibida faqat $\vee$ va inkor operatsiyalari qatnashasin.

1. $A\Rightarrow B\wedge C$
2. $(A\Leftrightarrow B)\wedge C$
3. $\overline{A}\wedge B\Rightarrow\overline{B}\wedge A$
4. $A\wedge B\wedge(A\Rightarrow B)$
5. $(\overline{A\wedge B}\Rightarrow C)\wedge(A\Leftrightarrow B)$
6. $A\Rightarrow(B\wedge C\Rightarrow A\wedge C)$
7. $A\wedge(A\Rightarrow B)\Rightarrow B\wedge C)$
8. $(A\Leftrightarrow B)\wedge(A\Rightarrow C)$

5.3. Quyidagi formulalar shunday almashtirilsinki, natijada formula tarkibida faqat $\wedge$ va inkor operatsiyalari qatnashsin.

1. $A\vee B\Rightarrow(\overline{A}\Rightarrow C)$
2. $(A\Leftrightarrow B)\vee C$
3. $(\overline{A\Rightarrow B})\vee(\overline{A}\Rightarrow B)$
4. $A\vee B\Leftrightarrow A\wedge\overline{B})$
5. $A\wedge B\Rightarrow\overline{A}\vee C$
6. $(A\Rightarrow\overline{B})\vee\overline{A\vee B}$
7. $A\wedge\overline{B}\vee A\wedge C\vee B\wedge C$
8. $\overline{A}\wedge B\wedge C\vee B\wedge\overline{C}\vee A\wedge C$

5.4. Quyidagi formulalar tavtologiya ekanligini isbotlang.

a. $(((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow B)$

b. $(((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow A)$

c. $(((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A)$

d. $(((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B))$

e. $((A \vee (\neg(B \wedge C))) \Rightarrow ((A \Leftrightarrow C) \vee B))$

f. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow (B \Rightarrow A)))$

g. $((A \wedge B) \Rightarrow (A \vee C))$

h. $((A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow A)))$

i. $((A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A))$

j. $((\neg(A \Rightarrow B)) \Rightarrow A)$

6-amaliy mashg'ulot. Mulohazalar algebrasi formulasining normal shakllari. Mulohazalar hisobi.

Darsning maqsadi: Talabalarga mantiqiy bog'lovchilar, formula, qismiy formula, formulaning teng kuchliligi, chinlik jadvali doir misollar yyechish o'rgatiladi.

1-misol. $A, A\neg BC, A\neg AB, AAB\neg BC$ formulalar elementar konyunksiyalardir.

2-misol. $A \vee A\neg BC \vee A\neg AB \vee AAB\neg BC$ formula 6.1-misolda keltirilgan elementar konyunksiyalardan tuzilgan DNF dir.

3-misol. $P = [(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})] \vee [x \wedge (\bar{x} \vee y)]$ formula KNSH sini toping.

Yechish: $P = \{[(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})] \vee x\} \wedge \{[(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})] \vee (\bar{x} \vee y)\} =$

$$= [(x \vee y) \vee x] \wedge [(\bar{x} \vee \bar{y}) \vee x] \wedge [(x \vee y) \vee (\bar{x} \vee y)] \wedge [(\bar{x} \vee \bar{y}) \vee (\bar{x} \vee y)] =$$

$$= (x \vee y) \wedge [J \vee \bar{y}] \wedge (J \vee y) \wedge (\bar{x} \vee J) = (x \vee y) \wedge J \wedge J \wedge J = x \vee y;$$

$$P = x \vee y.$$

Shunday qilib, P formulaning KNSh bittagina diz'yunktiv $(x \vee y)$ haddan iborat ekan.

2-misol. $P = \overline{x \vee y} \leftrightarrow x \wedge y$ formula DNSH sini toping.

Yechish:

$$P = \bar{x} \wedge \bar{y} \leftrightarrow x \wedge y = \overline{x \vee y} \leftrightarrow (x \wedge y) = [\overline{\overline{x \vee y}} \vee (x \wedge y)] \wedge [(\overline{x \vee y}) \vee (\overline{x \wedge y})] =$$

$$= [(x \vee y) \vee (x \wedge y)] \wedge [(\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \vee \bar{y})] =$$

$$= [(x \vee y) \vee (x \wedge y)] \wedge [(\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \vee \bar{y})] =$$

$$= [(x \vee y \vee x) \wedge (x \vee y \vee y)] \wedge [(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{x}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \wedge \bar{y})] =$$

$$= (x \vee y) \wedge (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) = (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}):$$

$$P = (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}).$$

3-misol. $(A \vee \neg B) \wedge C \Rightarrow (\neg A \vee B) \wedge C$ formulaning MDNF ini yozing.

Yechish: Berilgan formula keltirilmagan bo'lgani uchun undagi implikatsiyani dizyunksiya va inkor bilan almashtiramiz:

$$(A \vee \neg B) \wedge C \Rightarrow (\neg A \vee B) \wedge C$$

Hosil bo'lgan formulada $\neg$ amalsi murakkab formula $(A \vee \neg B) \wedge C$ oldida qatnashgan. Shuning uchun unga de Morgan tengkuchliliklari va qo'sh inkor tengkuchligini qo'llaymiz:

$$\neg((A \vee \neg B) \wedge C) \vee (\neg A \vee B) \wedge C \equiv \neg(A \vee \neg B) \vee \neg C \vee (\neg A \vee B) \wedge C \equiv$$

$$\equiv \neg A \wedge \neg\neg B \vee \neg C \vee (\neg A \vee B) \wedge C \equiv$$

$$\equiv \neg A \wedge B \vee \neg C \vee (\neg A \vee B) \wedge C.$$

Bu keltirilgan formulada dizyunksiya konyunksiyadan oldin bajariladigan had mavjud; shuning uchun distributivlik tengkuchliligini qo'llasak, quyidagi DNF hosil bo'ladi:

$$\neg A \wedge B \vee \neg C \vee (\neg A \vee B) \wedge C \equiv \neg A \wedge B \vee \neg C \vee \neg A \wedge C \vee B \wedge C$$

Ushbu DNF da qatnashgan barcha elementar konyunksiyalar to'g'ri elementar konyunksiyalar bo'lsa-da, ammo to'liq elementar konyunksiyalar emas. Shuning uchun quyidagi shakl almashtirish bajariladi:

$\neg A \wedge B$ ni $\neg A \wedge B \wedge (C \vee \neg C)$ bilan, $\neg C$ ni $(A \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg B) \vee \neg C$ bilan, $\neg A \wedge C$ ni $\neg A \wedge (B \vee \neg B) \wedge C$ bilan, $B \wedge C$ ni esa $(A \vee \neg A) \wedge B \wedge C$ bilan almashtiramiz. Ravshanki, natijada teng kuchli formula hosil bo'ladi:

$$\neg A \wedge B \vee \neg C \vee \neg A \wedge C \vee B \wedge C \equiv \neg A \wedge B \wedge (C \vee \neg C) \vee (A \vee \neg A) \wedge$$
$$(B \vee \neg B) \wedge \neg C \vee \neg A \wedge (B \vee \neg B) \wedge C \vee (A \vee \neg A) \wedge B \wedge C$$

Ushbu formulaga yana distributivlikni qo'llasak:

$$\neg A \wedge B \wedge (C \vee \neg C) \vee (A \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg B) \wedge \neg C \vee$$
$$\forall \neg A \wedge (B \vee \neg B) \wedge C \vee (A \vee \neg A) \wedge B \wedge C \equiv$$
$$\equiv A \wedge B \wedge C \vee A \wedge B \wedge \neg C \vee A \wedge \neg B \wedge \neg C \vee \neg A \wedge B \wedge C \vee$$
$$\vee \neg A \wedge B \wedge \neg C \vee \neg A \wedge \neg B \wedge C \vee \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$$

tengkuchlilikka ega bo'lamiz. Bundagi bir xil elementar konyunksiyalarni tashlab yuborsak (faqat bittasini qoldirib) u holda quyidagi oxirgi natijaga kelamiz:

$$A \wedge B \wedge C \vee A \wedge B \wedge \neg C \vee A \wedge \neg B \wedge \neg C \vee \neg A \wedge B \wedge C \vee$$
$$\vee \neg A \wedge B \wedge \neg C \vee \neg A \wedge \neg B \wedge C \vee \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \qquad (4)$$

Tengkuchlilikning o'ng tomoni berilgan formulaning MDNF idir. Ushbu MDNF ni formulaning rostlik jadvali bilan taqqoslaylik:

A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee \neg B$	$(A \vee \neg B) \wedge C$	$(\neg A \vee B) \wedge C$	$(A \vee \neg B) \wedge C \Rightarrow (\neg A \vee B) \wedge C$
1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	1

Bu jadvaldan ko'rinadiki: berilgan formula propozitsional o'zgaruvchilar qiymatlarining (1,1,1), (1,1,0), (1,0,0), (0,1,1), (0,1,0), (0,0,1) va (0,0,0) tanlanmalarida 1 (rost) qiymati qabul qiladi.

Berilgan mavzudagi teoremaga asosan berilgan formula quyidagi MDNF fa teng kuchlidir:

$$A^1B^1C^1 \vee A^1B^1C^0 \vee A^1B^0C^0 \vee A^0B^1C^1 \vee A^0B^1C^0 \vee$$
$$\vee A^0B^0C^1 \vee A^0B^0C^0$$

(2) ga asosan esa bu ifoda quyidagi ifodadan iboratdir:

$$ABC \vee AB\neg C \vee A\neg B\neg C \vee \neg ABC \vee \neg AB\neg C \vee \neg A\neg BC \vee \neg A\neg B\neg C$$

yoki

$$A \wedge B \wedge C \vee A \wedge B \wedge \neg C \vee A \wedge \neg B \wedge \neg C \vee \neg A \wedge B \wedge C \vee$$
$$\vee \neg A \wedge B \wedge \neg C \vee \neg A \wedge \neg B \wedge C \vee \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$$

ya'ni natijada (4) ning o'ng tomoni hosil bo'ladi. Berilgan formula 7 ta tanlanmada 1 qiymatga, bitta tanlanmada esa 0 qiymatga egadir, demak, u AR formula emas. (4) dan ko'rinadiki, berilgan formulaning MDNF iga 7 ta bog'liq elementar konyunksiya kiradi.

Demak, tekshirilayotgan $F(A_1, A_2, ..., A_n)$ formula AR formula bo'lsa, uning MDNF iga 2^n ta to'liq elementar konyunksiya kiradi. Shunday qilib, mulohazalar algebrasining $F(A_1, A_2, ..., A_n)$ formulasini AR formulami yoki yo'qmi ekanligini aniqlash uchun uni MDNF ga yoyib uni MDNF dagi to'liq elementar konyunksiyalar sonini sanash kerak: to'liq elementar konyunksiyalar soni $s = 2^n$ ta bo'lsa, berilgan formula AR formula, $0 < s < 2^n$ bo'lganda- bajariluvchi formula bo'ladi. Agar $s = 0$ bo'lsa, u holda berilgan formula AYo formula bo'lishi ravshandir.

4-misol. $ABC \vee A\neg BC \vee \neg A \neg B \neg C$ formula A, B, C o'zgaruvchilarga nisbatan MDNF dir. DNF va MDNF larning ta'rifidan ko'rinadiki, bunday formulalar keltirilgan formulalardir.

1. Quyidagi formulalarni teng kuchli almashtirishlardan foydalanib, DNSH va KNSH sini toping.
   а) $(X \leftrightarrow Y) \wedge \neg(Z \to T)$;
   б) $((X \to Y) \to (Z \to \neg X)) \to (Y \to \neg Z)$;
   в) $(X \to (Y \to Z)) \to ((X \to \neg Z) \to (X \to \neg Y))$;
   г) $((X \to Y) \vee \neg Z) \to (X \vee (X \leftrightarrow Z))$;
   д) $(X \to Y) \to Z$;
   е) $X \to (Y \to Z)$;
   ж) $(\neg X \wedge \neg Y) \vee (X \leftrightarrow Z)$;
   з) $(X \leftrightarrow Y) \to (X \wedge Z)$;
   и) $(X \leftrightarrow Y) \to ((\neg X \to Z) \to \neg Y)$;
   к) $(X \vee \neg(Y \to Z)) \wedge (X \vee Z)$;
   л) $\neg(X \vee Z) \wedge (X \to Y)$.

1.1. DNSH dan foydalanib, o'zgaruvchilarning quyidagi qiymatlarida 1 ni qabul qiladigan formulani toping.
   а) $F(0, 0) = F(1, 1) = 1$;
   б) $F(1, 0) = 1$;
   в) $F(0, 1, 0) = F(1, 0, 1) = F(1, 1, 1) = 1$;
   г) $F(0, 1, 1) = F(1, 1, 0) = 1$;
   д) $F(1, 0, 0) = F(0, 1, 0) = F(0, 0, 1) = 1$;
   е) $F(0, 1, 1) = F(1, 0, 1) = F(1, 1, 0) = F(1, 1, 1) = 1$;
   ж) $F(1, 0, 1) = F(0, 1, 0) = F(0, 0, 0) = 1$;
   з) $F(0, 1) = F(1, 0) = F(1, 1) = 1$;
   и) $F(1, 1, 0, 0) = F(0, 0, 1, 1) = 1$;
   к) $F(0, 1, 0, 1) = F(1, 0, 1, 0) = F(1, 0, 0, 0) = F(1, 1, 1, 0) = 1$;
   л) $F(0, 0, 0) = F(0, 1, 0) = F(1, 1, 1) = 1$.

1.2. KNSH dan foydalanib, o'zgaruvchilarning quyidagi qiymatlarida faqat 0 ni qabul qiladigan formulani toping.
   а) $F(0, 1) = F(1, 1) = 0$;
   б) $F(0, 1) = 0$;
   в) $F(0, 1, 1) = F(1, 1, 1) = 0$;
   г) $F(1, 0, 0) = F(1, 0, 1) = 0$;
   д) $F(0, 1, 1) = F(0, 0, 0) = F(0, 1, 0) = 0$;
   е) $F(1, 1, 1) = F(0, 0, 1) = F(1, 1, 0) = F(1, 0, 0) = 0$;
   ж) $F(1, 1, 0, 1) = F(0, 0, 1, 0) = F(1, 0, 1, 0) = F(0, 0, 1, 1) = F(0, 0, 0, 0) = 0$;
   з) $F(0, 1) = F(1, 0) = F(1, 1) = 0$;
   и) $F(1, 0, 0, 0) = F(0, 1, 1, 1) = 0$;
   к) $F(0, 1, 0, 1) = F(1, 0, 1, 0) = F(1, 0, 0, 1) = F(0, 1, 1, 0) = 0$;
   л) $F(0, 0, 0) = F(0, 1, 0) = F(1, 1, 1) = 0$.

1.3. Quyidagi mulohazalar algebrasi formulalarini rostlik jadvallarini yordamida DNSH ni toping.

а) $X \to Y$;
б) $(X \wedge Y) \vee Z$;
в) $(X \leftrightarrow Z) \to (X \wedge \neg Y)$;
г) $X \vee (Y \to (Z \leftrightarrow (X \wedge Y)))$;
д) $((X \wedge \neg Y) \vee Z) \wedge T$;
е) $(X \leftrightarrow Y) \wedge (Y \leftrightarrow Z) \wedge (Z \leftrightarrow T)$;
ж) $((X \vee Y) \to Z) \leftrightarrow \neg X$;
з) $(\neg Z \to \neg Y) \to ((X \wedge \neg Z) \wedge Y)$;
и) $(X \leftrightarrow Y) \wedge (\neg Z \to (T \wedge \neg X))$;
к) $((X \vee \neg Z) \wedge Y) \leftrightarrow ((Y \vee \neg X) \wedge Z)$;
л) $\neg(X \wedge Y) \to \neg(X \vee Z)$.

1.4. Quyidagi mulohazalar algebrasi formulalarini rostlik jadvallarini yordamida KNSH ni topіng.

а) $X \leftrightarrow Y$;
б) $(X \vee Y) \wedge Z$;
в) $\neg(\neg X \vee \neg Y) \wedge (X \to (Y \wedge Z))$;
г) $(X \wedge Y \wedge Z) \vee T$;
д) $X \wedge \neg(\neg Y \wedge (Z \to (X \leftrightarrow Y)))$;
е) $(X \wedge Y) \vee (Y \wedge Z) \vee (Z \wedge T)$;
ж) $(X \wedge ((Y \wedge Z) \vee T)) \vee \neg T$;
з) $\neg(X \wedge \neg Y) \wedge (Z \leftrightarrow (\neg X \wedge Y))$;
и) $\neg(((X \vee Y) \to \neg(X \vee Y)) \wedge \neg Z)$;
к) $((X \vee Y) \to Z) \leftrightarrow \neg X$;
л) $\neg(X \wedge Y) \to \neg(X \vee Z)$.

1.5. Quyidagi formulalarni KNSH va DNSH dan aynan rost(tavtologiya) yoki aynan yolg‘on ekanligini isbotlang.

а) $(X \to (Y \to Z)) \to ((X \to \neg Z) \to (X \to \neg Y))$;
б) $\neg(P \to Q) \wedge \neg(Q \to P)$;
в) $(X \to Y) \wedge (X \to \neg Y) \wedge X$;
г) $(P \wedge Q) \to (P \leftrightarrow Q)$;
д) $(P \wedge Q) \to (P \to Q)$;
е) $(\neg P \to Q) \vee \neg P$;
ж) $\neg(P \to (Q \to P))$;
з) $P \to (Q \to (P \wedge Q))$;
и) $(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$;
к) $(X \leftrightarrow Y) \wedge ((X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y))$;
л) $((X \vee Z) \vee \neg Z) \to (\neg(X \vee Z) \wedge X \wedge Y)$.

2.1 O‘rniga qo‘yish qoidasidan foydalanib quyidagi formulalarning chaqiriluvchi ekanligini isbotlang.

1.1. $\vdash (A \to B) \& B \to B$;
1.2. $\vdash A \& B \to A \& B \vee C$;
1.3. $\vdash (\overline{A} \to B) \to ((C \to B) \to (\overline{A} \vee C \to B))$;
1.4. $\vdash (\overline{A \vee B}) \to (A \vee B)$;
1.5. $\vdash ((A \& B) \to (C \to B \& C)) \to ((A \& B \to C) \to (A \& B \to B \& C))$;
1.6. $\vdash (A \to B) \to ((A \to B) \vee (B \& C))$;
1.7. $\vdash ((A \& B) \to (C \& D)) \to ((\overline{C \& D}) \to \mid (A \& B))$;
1.8. $\vdash (C \to A \vee B) \to ((C \to B \vee A) \to (C \to (A \vee B) \& (B \vee A)))$;
1.9. $\vdash (A \to B) \to ((A \to B) \vee (C \to D))$;
1.10. $\vdash (C \to D) \to ((A \to B) \vee (C \to D))$;
1.11. $\vdash (A \to C) \& (B \to D) \to (A \to C)$;
1.12. $\vdash (A \to C) \& (B \to D) \to (B \to D)$;
1.13. $\vdash ((A \to B) \to C) \to ((C \to D) \to C) \to ((A \to B) \vee (C \to D) \to C)$;

2.2 O‘rniga qo‘yish qoidasidan va xulosaga kelish qoidasidan foydalanib quyidagi formulalarning chaqiriluvchi ekanligini isbotlang.

2.1. $\vdash B \vee B \to B$;
2.2. $\vdash C \& D \to D \& C$;
2.3. $\vdash B \to B \& B$;
2.4. $\vdash C \vee D \to D \vee C$;
2.5. $\vdash (A \to B) \to (A \to A)$;

2.6. $\vdash \overline{\overline{A}} \to \overline{A}$;

2.7. $\vdash (\overline{A \vee B}) \to \overline{A}$;

2.8. $\vdash (\overline{A \vee B}) \to \overline{B}$;

2.3 Hosilaviy chiqarish qoidaldridan foydalanib, quyidagi formulalarning chaqiriluvchi ekanligini isbotlang.

3.1. $\vdash \overline{A \vee B} \to (\overline{A \,\&\, B})$;

3.2. $\vdash (A \to B) \to (A \to A \vee B)$;

3.3. $\vdash (A \to B) \to (A \to A)$;

3.4. $\vdash (A \to B) \,\&\, \overline{B} \to \overline{A}$;

3.5. $\vdash A \,\&\, \overline{A} \to B$;

3.6. $\vdash \overline{A \,\&\, B} \to (\overline{A \vee B})$;

3.7. $\vdash (B \to B) \to (\overline{B} \to \overline{B})$;

3.8. $\vdash \overline{\overline{B}} \to \overline{\overline{B}}$;

2.4 H formulalar to‘plamidan berilgan formulalarning chaqiriluvchi ekanligini isbotlang.

$H = \{A\} \vdash B \to A$;

$H = \{A \to B,\ B \to C\} \vdash A \to C$;

$H = \{A \to C\} \vdash \overline{C} \to \overline{A}$;

$H = \{A \to B,\ \overline{B}\} \vdash \overline{A}$;

$H = \{A,\ \overline{A} \to B\} \vdash B$;

$H = \{A \to B\} \vdash A \,\&\, C \to B \,\&\, C$;

$H = \{A \to B\} \vdash (C \to A) \to (C \to B)$;

$H = \{A \to B\} \vdash (B \to C) \to (A \to C)$;

$H = \{A \to (B \to C)\} \vdash B \to (A \to C)$;

$H = \{A \to B\} \vdash A \vee C \to B \vee C$;

2.5. Quyidagi formulalarning hamma qism formulalaring yozib chiqing.

$A = \overline{x \to y} \wedge (\overline{x} \vee y)$, $\quad B = (x \leftrightarrow y) \vee (\overline{x}y)$,

$C = (x \leftrightarrow y) \to (\overline{y} \to t)$, $\quad D = xy \vee xz \vee yz$.

1) $x \to (y \to x)$; $\quad$ 2) $\overline{a \vee b} \to c$; $\quad$ 3) $a \wedge \overline{c \vee b}$;

4) $x \to y \wedge z$; $\quad$ 5) $x \vee y\, z \to x$; $\quad$ 6) $\overline{x \to y} \vee x \wedge y$;

7) $((x \to x) \wedge (y \to z)) \to (\overline{x} \vee z)$;

8) $(x \to y) \to ((x \to \overline{y}) \to \overline{y})$.

2.6. O‘rniga qo‘yish qoidasidan foydalanib quyidagi formulalarning isbotlanuvchi ekanligini aniqlang.

1) $(A \to B) \wedge B \to B$;

2) $A \wedge B \to A \wedge B \vee C$;

3) $(\overline{A} \to B) \to ((C \to B) \to (\overline{A} \vee C \to B))$;

4) $\overline{C \vee D} \to C \vee D$;

5) $(A \wedge B \to (C \to B \wedge C)) \to ((A \wedge B \to C) \to (A \wedge B \to B \wedge C))$.

2.7. O‘rniga qo‘yish va xulosa qoidalaridan foydalanib quyidagi formulalarning isbotlanuvchi ekanligini aniqlang.

1) $A \vee A \to A$; $\quad$ 2) $A \to A \wedge A$; $\quad$ 3) $A \wedge B \to B \wedge A$;

4) $A \vee B \to B \vee A$; $\quad$ 5) $(A \to B) \to (A \to A)$; $\quad$ 6) $\overline{\overline{\overline{A}}} \to \overline{A}$.

2.8. Hosilaviy chiqarish qoidaldridan foydalanib, quyidagi formulalarning isbotlanuvchi ekanligini isbotlang.

1) $\overline{A} \vee \overline{B} \to \overline{A \wedge B}$; 2) $A \to R$;

3) $(A \to B) \to (A \to A \vee B)$; 4) $F \to A$;

5) $(A \to B) \to (A \to A)$; 6) $A \wedge \overline{A} \to F$;

7) $(A \to B) \wedge \overline{B} \to \overline{A}$; 8) $\overline{A} \wedge \overline{B} \to \overline{A \vee B}$.

2.9. Keltirib chiqarishning hosilaviy qoidalarini isbotlang.

1) $\dfrac{\vdash \overline{A}}{\vdash \overline{A \wedge B}}$; 2) $\dfrac{\vdash A}{\vdash A \vee B}$; 3) $\dfrac{\vdash \overline{A}}{\vdash A \to B}$; 4) $\dfrac{\vdash B}{A \to B}$;

5) $\dfrac{\vdash A \wedge B}{\vdash A}$; 6) $\dfrac{\vdash \overline{B}}{\vdash \overline{A \wedge B}}$; 7) $\dfrac{\vdash A \to B, \vdash \overline{B}}{\vdash \overline{A}}$; 8) $\dfrac{\vdash A, \vdash B}{\vdash A \wedge B}$;

9) $\dfrac{\vdash \overline{A}, \vdash \overline{B}}{\vdash \overline{A \vee B}}$; 10) $\dfrac{\vdash A, \vdash \overline{B}}{\vdash \overline{A \to B}}$; 11) $\dfrac{\vdash A \to \overline{A}}{\vdash \overline{A}}$; 12) $\dfrac{\vdash \overline{A} \to A}{\vdash A}$;

13) $\dfrac{\vdash A \to B, \vdash \overline{A} \to B}{\vdash B}$; 14) $\dfrac{\vdash A \to B, \vdash A \to \overline{B}}{\vdash \overline{A}}$

7-amaliy mashg'ulot. Rekursiv ta'riflar va tuzilmaviy induksiya

Darsning maqsadi: Mashg`ulotda primitiv rekursiya sxemasi orqali yangi funksiyalar qurish usullari o`rganiladi.

1-misol. $\varphi(x) = x$ va $\psi(x, y, z) = y + 1$ bo`lsin hamda $f(y, x)$ funksiya quyidagi tengliklar orqali aniqlansin:

$$\left. \begin{aligned} f(0, x) &= x, \\ f(y+1, x) &= f(y, x) + 1. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$f(y, x)$ funksiyaning qiymatini argumentlarning $y = 5$, $x = 2$ qiymatlarida hisoblab chiqaylik. $f(0,2) = \varphi(2) = 2$ bo`lganligi uchun (1) formulalarning ikkinchisidan ketma-ket ravishda quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\left. \begin{aligned} f(1,2) &= \psi(0,2,2) = 2 + 1 = 3, \\ f(2,2) &= \psi(1,3,2) = 3 + 1 = 4, \\ f(3,2) &= \psi(2,4,2) = 4 + 1 = 5, \\ f(4,2) &= \psi(3,5,2) = 5 + 1 = 6, \\ f(5,2) &= \psi(4,6,2) = 6 + 1 = 7. \end{aligned} \right\}$$

$f(y, x) = y + x$ ekanligini osongina ko`rsatish mumkin. Haqiqatan ham, $f(y + z, x) = f(y, x) + z$. Bu tenglikda $y = 0$ deb qabul qilib, $f(z, x) = f(0, x) + z$ yoki $f(z, x) = x + z$ ni hosil qilamiz.

2-misol. $f(y, x)$ funksiya quyidagi tengliklar bilan berilgan deylik:

$$\left. \begin{aligned} f(0, x) &= 0, \\ f(y+1, x) &= f(y, x) + x. \end{aligned} \right\}$$

Bu yerda $\varphi(x) = 0$, $\psi(x, y, z) = y + z$ bo`ladi.

$f(y, x)$ funksiyaning qiymatini argumentlarning $y = 2$, $x = 2$ qiymatlari uchun hisoblaymiz.

$f(0, x) = \varphi(x) = 0$ bo`lganligi uchun $f(0,2) = \varphi(2) = b_0 = 0$ bo`ladi. Funksiyaning $f(1,2)$ va $f(2,2)$ qiymatlarini ketma-ket topamiz:

$$\left. \begin{aligned} f(1,2) &= \psi(0,0,2) = b_1 = 0 + 2 = 2, \\ f(2,2) &= \psi(1,2,2) = 2 + 2 = 4. \end{aligned} \right\}$$

Bu misolda $f(y, x) = x \cdot y$ ekanligini ko`rsatish mumkin. Haqiqatan ham, $f(y + z, x) = f(y, x) + z \cdot x$. Bu tenglikda $y = 0$ deb qabul qilib, $f(z, x) = f(0, x) + z \cdot x$ yoki $f(z, x) = z \cdot x$ ni hosil qilamiz.

3-misol. Tyuring mashinasida o`nlik sistemada $n$ dan $n+1$ ga o`tish algoritmini realizasiya etish.

Yechim. O`nlik sistemada $n$ sonining yozuvi berilgan bo`lsin va $n+1$ sonini o`nlik sistemasidagi yozuvini ko`rsatish talab etilsin, ya'ni $f(n) = n+1$ funksiyani hisoblash talab etilsin.

Ravshanki, mashinaning tashqi alfaviti 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 raqamlardan va bo`sh katakcha $a_0$ dan iborat bo`lishi kerak. Lentaga o`nlik sistemada $n$ sonini yozamiz. Bu yerda qatorasiga bo`sh joysiz har bir katakchaga bitta raqam yoziladi.

Šo`yilgan masalani yechish uchun ishning birinchi taktida mashina $n$ sonining oxirgi raqamini o`chirib, uni bir birlik katta songa almashtirib va agar oxirgi raqam 9 sonidan kichik bo`lsa, u holda to`xtash holatiga o`tishi kerak.

Agar n sonining oxirgi raqami 9 bo`lsa, u vaqtda mashina 9 raqamini o`chirib, bo`sh qolgan katakchaga 0 raqamini yozib, o`sha holatda qolgan holda chapga yuqoriroq razryadli qo`shnisiga surilishi kerak. Bu yerda ishning ikkinchi taktida mashina yuqoriroq razryadli raqamga 1 sonini qo`shishi kerak.

Tabiiyki, chapga surilish paytida yuqoriroq razryadli raqam bo`lmasa, u holda mashinaning boshqaruvchi kallagi bo`sh katakchaga chiqishi mumkin. Bu holatda bo`sh katakchaga mashina 1 raqamini yozadi.

Aytilganlardan shu narsa kelib chiqadiki, $f(n) = n+1$ funksiyani hisoblash algoritmini realizasiya etish paytida mashina bor yo`g`i q_1 va q_0 holatlarda bo`ladi.

Shunday qilib, o`nlik sistemada $n$ dan $n+1$ ga o`tish algoritmini realizasiya etadigan Tyuring mashinasi quyidagi ko`rinishda bo`ladi:

	a_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
q_1	$1hq_0$	$1hq_0$	$2hq_0$	$3hq_0$	$4hq_0$	$5hq_0$	$6hq_0$	$7hq_0$	$8hq_0$	$9hq_0$	$0hq_1$

1-jadval

1 va 2 – shakllarda $n = 183$ va $n = 399$ sonlar uchun mos ravishda konfigurasiyalari keltirilgan.

$$a_0\,1\underset{q_1}{8}3\,a_0 \qquad a_0\,39\underset{q_1}{9}\,a_0$$

$$a_0\,1\underset{q_0}{8}4\,a_0 \qquad a_0\,3\underset{q_1}{9}0\,a_0$$

$$a_0\,\underset{q_1}{3}00\,a_0$$

$$\underset{q_1}{a_0}\,400\,a_0$$

1-shakl 2-shakl

1. Quyidagi berilgan funksiyalarni to‘g‘ri hisoblaydigan Tyuring mashinasini tuzing.
   a) $f(x) = x + 1$
   b) $O(x) = 0$
   c) $I_2^2(x_1, x_2) = x_2$
   d) $I_2^3(x_1, x_2, x_3) = x_2$
   e) $I_m^n(x_1, x_2, x_3, \dots x_n) = x_m$, $(1 \le m \le n)$

2. Quyidagi berilgan funksiyalarni hisoblash uchun Tyuring mashinasini tuzing.

a) $f(x, y) = x + y;$

b) $f(x) = x - 1 = \begin{cases} 0, & agar\ x = 0\ bo`lsa, \\ x - 1, & agar\ x > 0\ bo`lsa; \end{cases}$

c) $f(x) = x - 1 = \begin{cases} 0, & agar\ x = 0\ bo`lsa, \\ x - 1, & agar\ x > 0\ bo`lsa; \end{cases}$

3. Quyidagi berilgan funksiyalarni Tyuringda hisoblanishini ko'rsating va Tyuring mashinasi muvofiq tuzing.

$a)\qquad f_3(x) = \begin{cases} 1, & agar\ x\ \ 3\ ga\ bo`linsa, \\ 0, & agar\ x\ \ 3\ ga\ bo`linmasa; \end{cases}$

$b)\qquad f_p(x) = \begin{cases} 1, & agar\ x\ \ p\ ga\ bo`linsa, \\ 0, & agar\ x\ \ p\ ga\ bo`linmasa. \end{cases}$

4. $x!$

5. $\min(x, y)$ x ва y сонларнинг энг кичиги.

6. $\min(x_1, x_2, ..., x_n)$.

7. $\max(x, y)$ x ва y сонларнинг энг каттаси.

8. $\max(x_1, x_2, ..., x_n)$.

8-amaliy mashg'ulot. Rekursiv algoritmlar. Rekursiya

Darsning maqsadi: Rekursiv funksiya qiymatlarini hisoblash usullarini o`rgaish. Rekursiv funksiyani oshkor ifodasini topishga doir misollar yechish ko`nikmasini hosil qilish.

1-misol. Quyidagi rekursiv funksiyaning nuqtadagi qiymatlarini toping.

a). $f(0)=2$, $f(k)=k+f(k-1)$.

Yechish: $f(1)=1+f(1-1)=1+f(0)=1+2=3$; $f(2)=1+f(2-1)=1+f(1)=1+3=4$.

2-misol. Berilgan rekursiv funksiyaning oshkor ifodasini toping.

a). $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(k) = 2 \cdot f(k-1) \end{cases}$

Yechish: buning uchun ushbu funksiyaning bir necha nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz:

f(1)=2*f(0)=2*1=2; f(2)=2*f(1)=2*2=4; Demak ushbu qiymatlar asosida berilgan funksiyaning oshkor ifodasi quyidagicha: $f(k)=2^k$.

3-misol. zdfg

1. f(1), f(2), f(3) va f(4) lar uchun quyidagi rekursiv funksiyalarning qiymatini toping:

a) $\begin{cases} f(0) = 0, \\ f(k) = k + f(k-1). \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} f(0) = 1, \\ f(k) = \left\lfloor \dfrac{f(k-1)}{2} \right\rfloor + 3k. \end{cases}$

в) $\begin{cases} f(0) = 2, \\ f(k) = 8k^2 - (f(k-1))^2. \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} f(0) = 4, \\ f(k) = \dfrac{f(k-1)}{k^2}. \end{cases}$

д) $\begin{cases} f(0) = 2, \\ f(k) = \dfrac{f(k-1)}{k!}. \end{cases}$

2. f(2), f(3), f(4) va f(5) lar uchun quyidagi rekursiv funksiyalarning qiymatini toping:

а) $\begin{cases} f(0) = 1, \\ f(1) = 3, \\ f(k) = 2f(k-1) - f(k-2). \end{cases}$

б) $\begin{cases} f(0) = 0, \\ f(1) = 1, \\ f(k) = (f(k-1))^2 - (f(k-2))^2. \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} f(0) = 1, \\ f(1) = 2, \\ f(k) = (f(k-1) - f(k-2))k!. \end{cases}$

в) $\begin{cases} f(0) = 1, \\ f(1) = 2, \\ f(k) = (f(k-1))^2 - f(k-2) + k^2. \end{cases}$ **д)** $\begin{cases} f(0) = -1, \\ f(1) = 1, \\ f(k) = f(k-1) \div f(k-2). \end{cases}$

3. f(2), f(3), f(4) va f(5) lar uchun quyidagi rekursiv funksiyalarni toping:

а) $\begin{cases} f(0) = 1, \\ f(k) = 2f(k-1). \end{cases}$ б) $\begin{cases} f(0) = 1, \\ f(k) = 1 + f(k-1). \end{cases}$

в) $\begin{cases} f(0) = 1, \\ f(k) = f(k-1) \div k. \end{cases}$ г) $\begin{cases} f(0) = 1, \\ f(k) = f(k-1) + 2. \end{cases}$

д) $\begin{cases} f(0) = 1, \\ f(k) = 5f(k-1). \end{cases}$

4. f(2), f(3), f(4) va f(5) lar uchun quyidagi rekursiv funksiyalarni toping:

а) $\begin{cases} f(0) = 2, \\ f(1) = 4, \\ f(k) = 3f(k-1) - 2f(k-2). \end{cases}$

б) $\begin{cases} f(0) = 1, \\ f(1) = 2, \\ f(k) = (f(k-1))! - (f(k-2))!. \end{cases}$

в) $\begin{cases} f(0) = 0, \\ f(1) = 2, \\ f(k) = (f(k-1))! \div (f(k-2))!. \end{cases}$

г) $\begin{cases} f(0) = 10, \\ f(1) = 20, \\ f(k) = \left\lfloor \dfrac{f(k-1) + f(k-2)}{k!} \right\rfloor. \end{cases}$

д) $\begin{cases} f(0) = -1, \\ f(1) = 1, \\ f(k) = f(k-1) \div (f(k-2))^2. \end{cases}$

5. Quyidagi rekursiv funksiyaning oshkor ifodasini toping.

а) $\begin{cases} f(0) = 2, \\ f(k) = \dfrac{f(k-1)!}{k!}. \end{cases}$ б) $\begin{cases} f(0) = 1, \\ f(k) = 1 + f(k-1). \end{cases}$

в) $\begin{cases} f(0) = -1, \\ f(k) = \dfrac{-1}{f(k-1)}. \end{cases}$ г) $\begin{cases} f(0) = 1, \\ f(k) = -3f(k-1). \end{cases}$

д) $\begin{cases} f(0) = 1, \\ f(k) = 5 + 2f(k-1). \end{cases}$ е) $\begin{cases} f(0) = -1, \\ f(1) = 1, \\ f(k) = \dfrac{f(k-1)}{f(k-2)}. \end{cases}$

6. $f(n)=7-2^{n+1}$ ifoda

$$\begin{cases} f(0) = 5 \\ k > 0\ da\ f(k) = 2 \cdot f(k-1) - 7 \end{cases}$$

rekursiv funksiyaning oshkor ifodasi ekanligini ko`rsating.

7. $f(n)=3^n-n3^{n+1}$ ifoda

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = -6 \\ k > 0\ da\ f(k) = 6 \cdot f(k-1) - 9f(k-2) \end{cases}$$

rekursiv funksiyaning oshkor ifodasi ekanligini ko`rsating.

8. $f(n)=7-2^{n+1}$ ifoda

$$\begin{cases} f(0) = 5 \\ k > 0\ da\ f(k) = 2 \cdot f(k-1) - 7 \end{cases}$$

rekursiv funksiyaning oshkor ifodasi ekanligini ko`rsating.

9. $f(n)=-1-2^{n+1}$ ifoda

$$\begin{cases} f(0) = -3, \\ f(10 = -5, \\ k > 0\ da\ f(k) = 6 \cdot f(k-1) - 8f(k-2) - 3. \end{cases}$$

rekursiv funksiyaning oshkor ifodasi ekanligini ko`rsating.

9-amaliy mashg'ulot. Markov normal algoritmlari. Hisoblanuvchi funksiyalar.

Darsning maqsadi: Talabalarga mantiqiy bog'lovchilar, formula, qismiy formula, formulaning teng kuchliligi, chinlik jadvali doir misollar yyechish o'rgatiladi.

1-misol. $\{b,c\}$ A alfaviti bo'lsin. Quyidagi algoritm sxemasini ko'ramiz

$$\left.\begin{array}{l} b \to \cdot\wedge \\ c \to c \end{array}\right\}.$$

Bu sxema bilan berilgan U normal algoritm A alfavitdagi tarkibiga kamida bitta b harfi kirgan har qanday P so'zni shunday so'zga o'zgartiradiki, bu so'z P so'zdan uning tarkibiga eng chapdan kirgan b so'zni o'chirish natijasida hosil bo'ladi.
Haqiqatan ham, P so'zi tarkibiga eng chapdan kirgan b so'zdan chaproqda turgan har qanday c harfni $c \to c$ oddiy o'rniga qo'yish formulasi yana c harfiga o'tkazadi va eng chapdagi b harfini $b \to \cdot\wedge$ natijaviy o'rniga qo'yish formulasi $\wedge$ natijaviy bo'sh so'zga o'zgartiradi.
Masalan, agar $P = ccbbc$ bo'lsa, u holda $P \to \cdot Q$, bu yerda $Q = ccbc$. U algoritm bo'sh so'zni o'z-o'ziga o'zgartiradi.
U algoritmi b harfi kirmagan bo'sh bo'lmagan so'zlarga tatbiq etilmaydi. Haqiqatan ham, agar P so'zi faqat c harflardan iborat bo'lsa, u holda $c \to c$ oddiy o'rniga qo'yish formulasi uni yana o'ziga aylantiradi. U vaqtda hamma vaqt $P \to P$ bo'ladi va biz natijaviy o'rniga qo'yish formulasiga kelolmaymiz, ya'ni jarayon cheksiz davom etadi.
2-misol. $A - \{a_0, a_1, ..., a_n\}$ alfavit bo'lsin. Quyidagi sxemani ko'ramiz

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 \to \wedge \\ a_1 \to \wedge \\ \vdots \\ a_n \to \wedge \end{array}\right.$$

Bu sxemani $\forall_i (a_i \to \wedge)$ $(a_i \in A)$ ko'rinishida ham yozish mumkin. Bu sxema A alfavitdagi har qanday so'zni bo'sh so'zga o'zgartiradigan U normal algoritmdir.
Masalan, $U: a_1a_2a_1a_3a_0 \vdash a_1a_2a_1a_3 \vdash a_2a_1a_3 \vdash a_2a_3 \vdash \wedge$, va oxiri $U: \wedge \supset$. Demak, $U(a_1a_2a_1a_3a_0) = \wedge$.
3-misol. A alfavit S_1 harfdan iborat bo'lsin. Bu harfni 1 bilan belgilaymiz. Har qanday n natural son uchun induksiya metodi bo'yicha $\overline{0} = 1$ va $\overline{n+1} = \overline{n}1$ larni aniqlaymiz. Shunday qilib, $\overline{1} = 11$, $\overline{2} = 111$ va hokazo.
A alfavitidagi har qanday P so'z uchun $U(P) = 1P$ ga ega bo'lamiz. Xususiy holda, har qanday n natural son uchun $U(\overline{n}) = \overline{n+1}$. Har qanday P so'z bo'sh so'zi $\wedge$ ning kirishidan boshlanishini (chunki $P = \wedge P$) eslasak, keltirilgan algoritmning to'g'riligiga ishonamiz.

U va K - algoritmlar va P - so'z bo'lsin. Agar U va K algoritmlarning ikkalasi ham P so'zga tatbiq etilmaydigan yoki ikkalasi ham unga tatbiq etiladigan va keyingi holda $U(P) = K(P)$ bo'lsa, bu holatni $U(P) \simeq K(P)$ ko'rinishda ifodalaymiz.
Umuman, agar C va D - qandaydir ifodalar bo'lsa, u holda $C \simeq D$ munosabat qo'yidagini bildiradi: yoki ikkala ifoda ham aniqlanmagan, yoki ikkalasi ham aniqlangan va ular bir xil obyektni belgilaydi.

1. A alfavit va bu alfavitda ixtiyoriy Q so'z berilgan bo'lsin. Quyidagi sxemalar orqali berilgan normal algoritmlarning ishini ifodalang.
a) $\{\wedge \to \cdot\, Q;$

b) $B = A \cup \{\alpha\}$ alfavitdagi sxema, bu erda $a \overline{\in} A$:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha\xi \to \xi\alpha,\ (\xi \in A), \\ \alpha \to \cdot\, Q, \\ \wedge \to \alpha; \end{array}\right.$$

c) $\begin{cases} \xi \to \wedge, (\xi \in A), \\ \wedge \to \cdot Q; \end{cases}$

d) $B = A \cup \{1\}$ alfavitdagi sxema: $\{\xi \to 1 \quad (\xi \in A \cup \{1\}) \quad \{\xi \to 1.$

10-amaliy mashg'ulot. Kombinatorika asoslari. O'rinlashtirishlar va kombinasiyalar.

Darsning maqsadi: Talabalarga kombinatsiya, kombinatorika asoslariga kirish, o'rinlashtirishlar, o'rin almashtirishlar va gruppalashga doir misollar yechish o'rgatiladi.

1- misol. Ixtiyoriy n natural son uchun

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

tenglikning o'rinli bo'lishini matematik induksiya usuli yordamida isbotlaymiz.

Baza: $n=1$ bo'lsin, u holda yuqoridagi tenglik to'g'ri ekanligi ravshan: $1^2=\frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot 1+1)}{6}$.

Induksion o'tish: isbotlanish kerak bo'lgan tenglik $n=k>1$ uchun to'g'ri, ya'ni

$$1^2+2^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

tenglik o'rinli bo'lsin. Bu tenglikning chap va o'ng tomonlariga $(k+1)^2$ ifodani qo'shib, uni

$$1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

ko'rinishda yozamiz. Oxirgi tenglikning o'ng tomonida quyidagicha o'zgartirishlarni bajaramiz:

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=(k+1)\left[\frac{k(2k+1)}{6}+(k+1)\right]=$$

$$=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+4k+3k+6)}{6}=$$

$$=\frac{(k+1)[2k(k+2)+3(k+2)]}{6}=\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}.$$

Demak,

$$1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}.$$

Oxirgi munosabat isbotlanishi kerak bo'lgan tenglikning $n=k+1$ bo'lgan holidir. ■

2-misol. Uchta elementli $\{a,b,c\}$ to'plam uchun o'rin almashtirishlar tashkil qilishda ikkita elementli $\{a,b\}$ to'plam uchun tuzilgan ab va ba o'rin almashtirishlardan foydalanish mumkin. Berilgan to'plamning c elementini ab va ba o'rin almashtirishning har biriga uch xil usul bilan joylashtirish mumkin: ularning elementlaridan keyin, elementlarining orasiga va elementlaridan oldin. Ko'paytirish qoidasini qo'llasak, uchta elementli $\{a,b,c\}$ to'plam uchun oltita ($P_3=6=1\cdot 2\cdot 3$) har xil o'rin almashtirishlar hosil bo'lishini aniqlaymiz. Ular quyidagilardir:

$$abc,\ acb,\ cab,\ bac,\ bca,\ cba.$$

To'rtta elementli $\{a,b,c,d\}$ to'plamni qarab, uchta elementli $\{a,b,c\}$ to'plam uchun tuzilgan oltita o'rin almashtirishlarning har biriga d elementni to'rt xil usul bilan joylashtirish imkoniyati borligini e'tiborga olsak, ko'paytirish qoidasiga ko'ra, $P_4=24=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$ bo'lishini topamiz. Bu yerda barcha o'rin almashtirishlar quyidagilardir:

$$abcd,\ abdc,\ adbc,\ dabc,$$
$$acbd,\ acdb,\ adcb,\ dacb,$$
$$cabd,\ cadb,\ cdab,\ dcab,$$
$$bacd,\ badc,\ bdac,\ dbac,$$
$$bcad,\ bcda,\ bdca,\ dbca,$$
$$cbad,\ cbda,\ cdba,\ dcba.$$

3-misol. Besh nafar tomoshabinlarning beshta o'rinni egallash imkoniyatlari (variantlari) sonini toping.

Agar tomoshabinlarni a,b,c,d,e harflar bilan belgilasak, u holda $T=\{a,b,c,d,e\}$ tomoshabinlar to'plamiga ega bo'lamiz. Tomoshabinlarni o'rinlarga joylashtirish imkoniyatlarining (variantlarining) har biriga tomoshabinlar T to'plami elementlarining qandaydir o'rin almashtirishi mos keladi. T to'plam beshta elementli bo'lgani uchun, 1-teoremaga asosan, $P_5 = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120$ bo'ladi. Demak, besh nafar tomoshabinning beshta o'rinni egallash imkoniyatlari soni 120ga teng.

4-misol. Shaxmat bo'yicha musobaqada har birining tarkibida to'rt nafar o'yinchi bo'lgan ikkita komanda ishtirok etmoqda. Har bir komanda rahbariga to'rtta shaxmat taxtasida o'yinlar o'tkazish uchun o'yinchilarni ixtiyoriy ravishda tartiblash imkoniyati berilgan. Musobaqa qatnashchilarining shaxmat taxtalarini egallash imkoniyatlari (variantlari) sonini toping.

Har bir komanda a'zolari uchun shaxmat taxtalarini egallash imkoniyatlarini $P_n = n!$ formula yordamida hisoblash mumkin: $P_4 = 4! = 24$. Komandalardagi o'yinchilarni ixtiyoriy ravishda tartiblash mumkin bo'lganligidan, ko'paytirish qoidasiga ko'ra, musobaqa qatnashchilarining shaxmat taxtalarini egallash imkoniyatlari (variantlari) soni $24\cdot24=576$ bo'ladi.

5-misol. Guruh 25 nafar talabadan tashkil topgan bo'lsin. Bu guruhda guruh sardori, guruh sardorining yordamchisi va kasaba uyushmasining guruh bo'yicha vakilini saylash zarur. Har bir talaba bu vazifalardan faqat bittasini bajaradi deb hisoblansa, saylov natijalari uchun qancha imkoniyat mavjud?

Bu yerda 25ta elementli talabalar to'plamining tartiblangan uchta elementli (guruh sardori, guruh sardorining yordamchisi va kasaba uyushmasining guruh bo'yicha vakili) qism to'plamlari sonini aniqlash zarur. Bu esa 25 ta elementdan uchtadan o'rinlashtirishlar sonini topish demakdir. Qo'yilgan savolga javob topish maqsadida 2- teoremadagi isbotlangan formulani $n=25$ va $m=3$ bo'lgan holda qo'llab, $A_{25}^3 = 25\cdot24\cdot23 = 13800$ ekanligini aniqlaymiz. Demak, guruhdagi saylov natijalari uchun 13800ta imkoniyat mavjud.

1. Matematik induksiya usulidan foydalanib, quyidagi tasdiqlarni isbotlang.
   a) ixtiyoriy $n\in N$ uchun $11^{n+2}+12^{2n+1}$ son 133 ga qoldiqsiz bo'linadi;
   b) $11a^2-14a+3\geq 0$ (a—butun son) tengsizlik o'rinlidir;
   d) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots\frac{1}{\sqrt{n}}>2\left(\sqrt{n+1}-1\right)$ tengsizlik o'rinlidir, bu yerda $n\in N$ va $n\geq 2$.
2. "KOMBINATORIKA" so'zidan bitta unli yoki undosh harf tanlash imkoniyatlari sonini aniqlang.
3. 13 nafar qiz va 12 nafaq o'g'il boladan tashkil topgan talabalarguruhidanbir nafar talaba tanlash imkoniyatlarini sonini aniqlang.

4. Kutubxonada har biri ikki o‘rinli stollar 4 qatorga 8 tadan joylashtirilgan. Haftaning yakshanba kunidan tashqari har kuni kutubxona o‘quvchilarga 8 soat xizmat ko‘rsatadi. Kutubxonaning bir haftada o‘quvchilarga mumkin bo‘lgan eng ko‘p xizmat ko‘rsatish vaqtini (o‘rin, soat birligida) toping.

5. Agar tarkibida n ta savoli bo‘lgan so‘rovnomaning har bir savoliga a) “ha” yoki “yo‘q”, b) “ha”, “yo‘q”, “bilmayman” degan javobni yozish mumkin bo‘lsa, u holda so‘rovnomaning savollariga berish mumkin bo‘lgan barcha jovoblar imkoniyatlari sonini aniqlang.

11-amaliy mashg‘ulot. Binomial koeffisiyentlar va ularga oid ayniyatlar.

Darsning maqsadi: Talabalarga Kombinatorika haqida umumiy tushunchalar va kombinatorika predmeti va paydo bo‘lish tarixi, Paskal uchburchagi va Nyuton binomi haqida tushincha, Binomial koeffitsentlar va uning xossallariga doir masalalar yechishga doir masalalar o’rgatiladi.

1- misol. $\frac{C_n^{m+1}}{C_n^m}=\frac{n-m}{m+1}$ $(m=0,1,2,...,n-1)$ xossaning tengligini isbotlang.

Haqiqatdan ham,

$$\frac{C_n^{m+1}}{C_n^m}=\frac{\frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!}}{\frac{n!}{m!(n-m)!}}=\frac{m!(n-m)!}{(m+1)!(n-m-1)!}=$$

$$=\frac{m!(n-m-1)!(n-m)}{m!(m+1)(n-m-1)!}=\frac{n-m}{m+1}. \blacksquare$$

2- misol. Koshi ayniyatini kombinatorik tahlilga asoslangan holda isbotlaymiz. n nafar o‘g‘il va m nafar qiz bolalardan tashkil topgan talabalar guruhidan k ($k=0,1,...,\min(m,n)$) nafar talaba tanlash zarur bo‘lsin. $n+m$ nafar talabalardan k nafar talabani C_{n+m}^k xil usul bilan tanlash mumkinligi ravshan.

Boshqa tomondan olib qaraganda, $n+m$ nafar talabalardan iborat to‘plamdan tanlanadigan barcha k elementli qism to‘plamlarni ularning tarkibidagi o‘g‘il bolalar soniga qarab sinflarga ajratishning quyidagicha imkoniyati bor. Tarkibida s $(0\le s\le k)$ nafar o‘g‘il bola bo‘lgan k elementli qism to‘plamni oldin C_n^s xil usul bilan tanlab, keyin $(k-s)$ nafar qiz bolalarni C_m^{k-s} xil usullardan birortasi yordamida tanlash mumkin. Demak, tarkibida s nafar o‘g‘il bola bo‘lgan k nafar talabadan iborat qism to‘plamlar soni, ko‘paytirish qoidasiga asosan, $C_n^sC_m^{k-s}$ songa tengdir. Noldan k gacha bo‘lgan barcha butun s sonlar uchun barcha kombinatsiyalarni hosil qilib va bu kombinatsiyalarga mos ko‘paytmalarni yig‘ib, Koshi ayniyatining chap tomonini hosil qilamiz. ■

1. Binominal koeffisentlarning xossalaridan foydalanib, quyidagi formulalarni isbotlang.

a) $1^2+2^2+...+m^2=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$;

b) $1^3+2^3+...+m^3=\frac{m^2(m+1)^2}{4}$.

2. Quyidagi yig'indini hisoblang.

a) $C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+...+(n+1)C_n^n$;

b) $C_n^2+2C_n^3+3C_n^4+...+(n-1)C_n^n$;

d) $C_n^0+3C_n^1+5C_n^2+...+(2n+1)C_n^n$.

12-amaliy mashg'ulot. Umumlashgan o'rinlashtirishlar va kombinasiyalar. Takrorli kombinatsiyalar.

Darsning maqsadi: Talabalarga kombinatorika elementlar, o`rinlashtirishlar, tartiblangan o`rin almashtirishlar, va gruppalashlar sonini topishga doir bilimlarini mustahkamlash.

1-misol. Uchta elementli $\{a,b,c\}$ to'plam uchun o'rin almashtirishlar tashkil qilishda ikkita elementli $\{a,b\}$ to'plam uchun tuzilgan ab va ba o'rin almashtirishlardan foydalanish mumkin. Berilgan to'plamning c elementini ab va ba o'rin almashtirishning har biriga uch xil usul bilan joylashtirish mumkin: ularning elementlaridan keyin, elementlarining orasiga va elementlaridan oldin. Ko'paytirish qoidasini qo'llasak, uchta elementli $\{a,b,c\}$ to'plam uchun oltita $(P_3=6=1\cdot2\cdot3)$ har xil o'rin almashtirishlar hosil bo'lishini aniqlaymiz. Ular quyidagilardir:

$$abc,\ acb,\ cab,\ bac,\ bca,\ cba.$$

To'rtta elementli $\{a,b,c,d\}$ to'plamni qarab, uchta elementli $\{a,b,c\}$ to'plam uchun tuzilgan oltita o'rin almashtirishlarning har biriga d elementni to'rt xil usul bilan joylashtirish imkoniyati borligini e'tiborga olsak, ko'paytirish qoidasiga ko'ra, $P_4=24=1\cdot2\cdot3\cdot4$ bo'lishini topamiz. Bu yerda barcha o'rin almashtirishlar quyidagilardir:

$$abcd,\ abdc,\ adbc,\ dabc,$$
$$acbd,\ acdb,\ adcb,\ dacb,$$
$$cabd,\ cadb,\ cdab,\ dcab,$$
$$bacd,\ badc,\ bdac,\ dbac,$$
$$bcad,\ bcda,\ bdca,\ dbca,$$
$$cbad,\ cbda,\ cdba,\ dcba.$$

2-misol. Besh nafar tomoshabinlarning beshta o'rinni egallash imkoniyatlari (variantlari) sonini toping.

Agar tomoshabinlarni a,b,c,d,e harflar bilan belgilasak, u holda $T=\{a,b,c,d,e\}$ tomoshabinlar to'plamiga ega bo'lamiz. Tomoshabinlarni o'rinlarga joylashtirish imkoniyatlarining (variantlarining) har biriga tomoshabinlar T to'plami elementlarining qandaydir o'rin almashtirishi mos keladi. T to'plam beshta elementli bo'lgani uchun, 1-teoremaga asosan, $P_5=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$ bo'ladi. Demak, besh nafar tomoshabinning beshta o'rinni egallash imkoniyatlari soni 120ga teng.

3-misol. Shaxmat bo'yicha musobaqada har birining tarkibida to'rt nafar o'yinchi bo'lgan ikkita komanda ishtirok etmoqda. Har bir komanda rahbariga to'rtta shaxmat taxtasida o'yinlar o'tkazish uchun o'yinchilarni ixtiyoriy ravishda tartiblash imkoniyati berilgan. Musobaqa qatnashchilarining shaxmat taxtalarini egallash imkoniyatlari (variantlari) sonini toping.

Har bir komanda a'zolari uchun shaxmat taxtalarini egallash imkoniyatlarini $P_n=n!$ formula yordamida hisoblash mumkin: $P_4=4!=24$. Komandalardagi o'yinchilarni ixtiyoriy ravishda tartiblash mumkin bo'lganligidan, ko'paytirish qoidasiga ko'ra, musobaqa qatnashchilarining shaxmat taxtalarini egallash imkoniyatlari (variantlari) soni $24 \cdot 24 = 576$ bo'ladi.

4-misol. Guruh 25 nafar talabadan tashkil topgan bo'lsin. Bu guruhda guruh sardori, guruh sardorining yordamchisi va kasaba uyushmasining guruh bo'yicha vakilini saylash zarur. Har bir talaba bu vazifalardan faqat bittasini bajaradi deb hisoblansa, saylov natijalari uchun qancha imkoniyat mavjud?

Bu yerda 25ta elementli talabalar to'plamining tartiblangan uchta elementli (guruh sardori, guruh sardorining yordamchisi va kasaba uyushmasining guruh bo'yicha vakili) qism to'plamlari sonini aniqlash zarur. Bu esa 25ta elementdan uchtadan o'rinlashtirishlar sonini topish demakdir. Qo'yilgan savolga javob topish maqsadida 2- teoremadagi isbotlangan formulani $n = 25$ va $m = 3$ bo'lgan holda qo'llab, $A_{25}^3 = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 13800$ ekanligini aniqlaymiz. Demak, guruhdagi saylov natijalari uchun 13800ta imkoniyat mavjud.

6. Matematik induksiya usulidan foydalanib, quyidagi tasdiqlarni isbotlang.
   a) ixtiyoriy $n \in N$ uchun $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ son 133 ga qoldiqsiz bo'linadi;
   b) $11a^2 - 14a + 3 \geq 0$ (a—butun son) tengsizlik o'rinlidir;
   d) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right)$ tengsizlik o'rinlidir, bu yerda $n \in N$ va $n \geq 2$.
7. "KOMBINATORIKA" so'zidan bitta unli yoki undosh harf tanlash imkoniyatlari sonini aniqlang.
8. 13 nafar qiz va 12 nafaq o'g'il boladan tashkil topgan talabalarguruhidanbir nafar talaba tanlash imkoniyatlarini sonini aniqlang.
9. Kutubxonada har biri ikki o'rinli stollar 4 qatorga 8 tadan joylashtirilgan. Haftaning yakshanba kunidan tashqari har kuni kutubxona o'quvchilarga 8 soat xizmat ko'rsatadi. Kutubxonaning bir haftada o'quvchilarga mumkin bo'lgan eng ko'p xizmat ko'rsatish vaqtini (o'rin, soat birligida) toping.
10. Agar tarkibida n ta savoli bo'lgan so'rovnomaning har bir savoliga a) "ha" yoki "yo'q", b) "ha", "yo'q", "bilmayman" degan javobni yozish mumkin bo'lsa, u holda so'rovnomaning savollariga berish mumkin bo'lgan barcha jovoblar imkoniyatlari sonini aniqlang.
11. Binominal koeffisentlarning xossalaridan foydalanib, quyidagi formulalarni isbotlang.
    a) $1^2 + 2^2 + \ldots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$;
    b) $1^3 + 2^3 + \ldots + m^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}$.
12. Quyidagi yig'indini hisoblang.
    a) $C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \ldots + (n+1)C_n^n$;
    b) $C_n^2 + 2C_n^3 + 3C_n^4 + \ldots + (n-1)C_n^n$;
    d) $C_n^0 + 3C_n^1 + 5C_n^2 + \ldots + (2n+1)C_n^n$.

13-amaliy mashg'ulot. Takrorli o'rin almashtirishlar, o'rinlashtirishlar va gruppalashlar.

Darsning maqsadi: Talabalarning takrorli o'rin almashtirishlar, o'rinlashtirishlar va gruppalashlar va ularning sonini topishga doir bilimlarini mustahkamlash.

1-misol. Ikkita a, bitta b va ikkita c harflardan tashkil topgan kortej uchun barcha takrorli o'rin almashtirishlarni tuzing.

Bu misolda uch turdagi ($k=3$) harflar soni beshga teng (n=5) bo'lib, $n_1=2$ (ikkita a), $n_2=1$ (bitta b) va $n_3=2$ (ikkita c). Dastlabki ikkita harflarning (xuddi shuningdek, oxirgi ikkita harflarning ham) o'rinlarini o'zaro almashtirsak yangi o'rin almashtirishlar hosil bo'lmaydi. Barcha takrorli o'rin almashtirishlar soni $C_5(2,1,2)=\frac{5!}{2!\cdot1!\cdot2!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot1\cdot1\cdot2}=30$ bo'ladi. Bu o'ttizta o'rin almashtirishlarning hammasi quyida keltirilgan:

$$aabcc, aacbc, aaccb, abacc, abcac, abcca,$$
$$acabc. acacb, acbac, acbca, accab, accba,$$
$$baacc, bacac, bacca, bcaac, bcaca, bccaa,$$
$$caabc, caacb, cabac, cabca, cacab, cacba,$$
$$cbaac, cbaca, cbcaa, ccaab, ccaba, ccbaa.$$

2- misol. Oila a'zolari besh kishidan iborat bo'lib, ular ikkita ishni bajarishlari zarur (masalan, non sotib olish va uni bo'laklash), bunda oilaning har bir a'zosi ikkala ishni ham bajarish imkoniyatiga ega. Oila a'zolariga bu ishlarni taqsimlashda mumkin bo'lgan imkoniyatlar soni aniqlansin.

Bu masalani hal qilish uchun oila a'zolarini a, b, c, d, va e harflari bilan belgilab, ishlar ikkita bo'lgani uchun beshta turli elementlardan ikkitadan barcha takrorli o'rinlashtirishlarni tuzamiz:

$$aa, ab, ac, ad, ae, ba, bb, bc, bd, be, ca, cb, cc,$$
$$cd, ce, da, db, dc, dd, de, ea, eb, ec, ed, ee.$$

Hammasi bo'lib 25ta ($\overline{A}_5^2=5^2=25$) takrorli o'rinlashtirishlar tuzildi. Demak, besh kishidan iborat oila a'zolariga ikkita ishlarni taqsimlashda mumkin bo'lgan imkoniyatlar soni 25dir.

1. Agar 5 xil rangli material bo'lsa, undan 3 xil rangli bayroq tayyorlash imkoniyatini toping.

2. Ikkita o'yin shari tashlandi(har biri olti tomonli). Nechta imkoniyatda quyidagilar tushadi: har birining juft sonli ochko bo'lishi, har birining toq sonli ochkolar bo'lishi?

3. Shahmat taxtasiga 8 ta ruxni bir-biriga hujum qilmaydigan qilib nechta xil usul bilan joylashtirish mumkin?

4. Ma'noga ega bo'lmaganlarini ham e'tiborga olgan holda a, i, t, r harflaridan 4 harfli nechta so'z tuzush mumkin?

5. 9 nafar kishini rektor, rektor yordamchisi, kotib va ish yurituvchi vazifalariga tayinlash imkoniyatlarini toping.

6. Musobaqada 10 jamoa ishtirok etayotgan bo'lsa, ulardan uchtasi oltin, kumush va bronza medallarini olish imkoniyatlari sonini aniqlang.

7. Kutubxonada 6 tilning har biridan boshqalariga bevosita tarjima qilish uchun yetarli lug'atlar mavjud. Tillar soni 9 ta bo'lganda, kutubxonaga yana qancha lug'at kerak.

8. Do‘konda 12 xil kitob sotilayotgan bo‘lsin. 10 dona turli kitoblarni sotib olish imkoniyatini aniqlang.

9. Barcha raqamlari turlicha bo‘lgan 7 sonli telefon raqamlari sonini aniqlang.

10. Har bir yigit faqat bitta qizni raqsga taklif qilish sharti bilan 6 yigit 8 qizni taklif etayotgan bo‘lsa, bunday takliflar sonini toping.

11. Bir kishida 8 ta, boshqasida 10 ta kitob bor. Ular bir-biri bilan ikkitadan kitob alishtirmoqchi. Kitob almashishlar sonini toping.

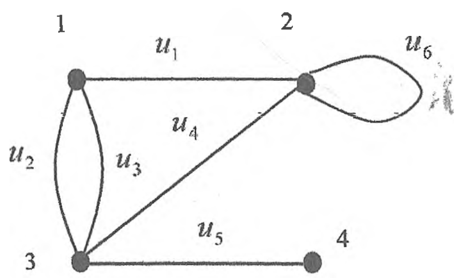
12. Qavariq o‘nburchak diagonallari sonini aniqlang.

13. Poezd vagoni kupesida bir-biriga qarama-qarshi o‘tirishga muljallangan va har birida 5 ta o‘rin bo‘lgan 2 ta o‘rindiq bor. 10 nafar yo‘lovchilardan 4 tasi poezdning yurishi yunalishiga qarab, boshqa 3 tasi teskari yo‘nalishga qarab, qolgan 3 tasiga esa qaysi yo‘nalishga qarab o‘tirishning farqi yo‘q. Yo‘lovchilarning o‘rindiqlarga joylashtirishlar imkoniyatlari sonini aniqlang.

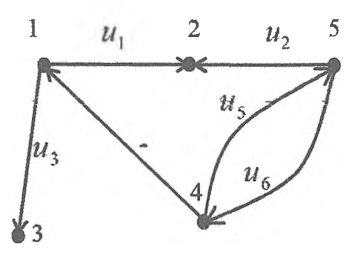
14-amaliy mashg‘ulot. Graflar va graf modellari. Graf terminologiyasi va graflarning maxsus tiplari.

Darsning maqsadi: Talabalarga grafning asosiy tushunchalari bilan tanishtiri, ularning lokal darajalarini hisoblashni, qirrqlar qo`shniligini va insidentlik aniqlashni o`rgatiish.

1- misol. 1- rasmda tasvirlangan grafni $G=(V,U)$ deb belgilaymiz. Berilgan G graf belgilangan graf bo‘lib, 4ta uch va 6ta qirraga ega. Demak, u (4,6)-grafdir. Bu graf uchun: $V=\{1,2,3,4\}$, $U=<u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6>$, $u_1=(1,\ 2)$, $u_2=u_3=(1,\ 3)$, $u_4=(2,\ 3)$, $u_5=(3,\ 4)$, $u_6=(2,2)$. G grafning barcha u_i ($i=\overline{1,6}$) qirralari oriyentirlanmagan (chunki uchlarini tutashtiruvchi chiziklarda yo‘nalish ko‘rsatilmagan) bo‘lgani uchun G oriyentirlanmagan grafdir. Grafning qirralaridan biri, aniqrog‘i, u_6 sirtmoqdir, u_2 va u_3 esa karrali qirralardir. Bu grafda, masalan, 1 va 2 uchlar qo‘shni, 1 va 4 uchlar esa qo‘shni emas. Undagi 2 va 3 uchlar u_4 qirraga insident va, aksincha, u_4 qirra 2 va 3 uchlarga insidentdir. Bu yerda u_4 va u_5 qirralar qo‘shni qirralardir, chunki ular umumiy uchga (3 uch) ega, u_1 va u_5 qirralar esa qo‘shni emas.



1 rasm

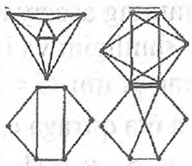


2-rasm

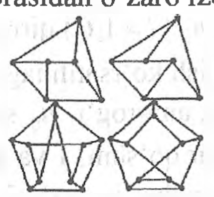
2- misol. Geometrik ifodalanishi 2- rasmdagi ko‘rinishda bo‘lgan oriyentirlangan grafni qaraymiz. Bu grafda o‘n bitta element bor: 5ta uch va 6ta yoy, ya’ni shaklda (5,6)-orgraf berilgan. Bu grafni $G=(V,U)$ bilan belgilaymiz, bu yerda $V=\{1,2,3,4,5\}$, $U=<(1,2),(1,3),(5,2),(4,1),(4,5),(5,4)>$ yoki $U=<u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6>$. Berilgan

G orgrafda sirtmoq ham, karrali yoylar ham yo'q. Bu grafning (1,3) yoyi uchun 1 boshlang'ich, 3 uch esa oxirgi uchdir.

1. Graf tushunchasni qo'llash mumkin bo'lgan amaliy misol keltiring va qaralayotgan grafni tahlil qiling.
2. To'la graf bilan bog'liq misol keltiring.
3. Biron idishdagi hajmi 8 birlik suyuqlikni faqat o'sha idish hamda 5 va 3 birlik hajmga ega idishlar vositasida teng ikki qismga bo'lish haqidagi boshqotirma masalani hal qilish uchun tuzilgan graf elementlarini tahlil qiling va bu masalani mumkin qadar qisqa echimini toping.
4. Qadimgi boshqotirma masala: biron idishdagi hajmi 12 birlik suyuqlikni faqat o'sha idish hamda 8 va 5 birlik hajmga ega idishlar vositasida teng ikki qismga ajrating. Bu boshqotirma masalani hal qilish uchun graf tuzib uning elementlarini tahlil qiling va bu masalani mumkin qadar qisqa echimini toping.
5. Qadimgi boshqotirma masala: yo'lovchi daryodan bo'ri, qo'y va bir bog' pichanni olib o'tishi kerak, lekin u qayiqda o'zi bilan faqat bitta narsani olib o'tish imkoniyatiga ega. Agar sohilda bo'ri va qo'y birga qolsa, bo'ri qo'yni, qo'y bilan pichan birga qolsa, qo'y pichanni eb qo'yadi. Yo'lovchi narsalarni daryoning bir sohilidan ikkinchi sohilga olib o'tishni ularning butunligini saqlagan holda amalga oshirishi kerak. Bu masalani hal qilish maqsadida graf tuzib, uning elementlarini tahlil qiling. Tuzilgan graf yordamida masalan eching.
6. Grafning ko'rgazmali tasviri deganda nimani tushunasiz.
7. Quyida tasvirlangan to'rtta graflar orasidan o'zaro izomorf bo'lgan graflar juftini aniqlang.



8. Quyida tasvirlangan to'rtta graflar orasidan o'zaro izomorf bo'lgan graflar juftini aniqlang.



Darsning maqsadi: Graflarni geometrik shakllar, ko`phad va uchlarning qo`shnilik, insidentlik matritsalarini tuzishni o`rgatish.

1-misol. Biror idishdagi hajmi 8 birlik suyuqlikni faqat o'sha idish hamda 5 va 3 birlik hajmli idishlar vositasida teng ikki qismga bo'ling.

Yechish. Ushbu masalani graflar nazariyasi elementlaridan foydalanib yechamiz. 8, 5 va 3 birlik hajmli idishlardagi suyuqlik hajmini mos ravishda a, b va c bilan belgilab, muayyan bir vaqt uchun idishlardagi suyqlikning hajmlari asosida qaralayotgan sistemaning holatini ifodalovchi $<a,b,c>$ uchliklarni tuzamiz. Masalaning shartiga ko'ra a, b va c o'zgaruvchilar butun qiymatlar qabul qilgan holda $0 \le a \le 8$, $0 \le b \le 5$ va $0 \le c \le 3$ shartlarni qanoatlantirishlari kerak. Bu shartlarni qanoatlantiruvchi holatlar quyidagilardir:

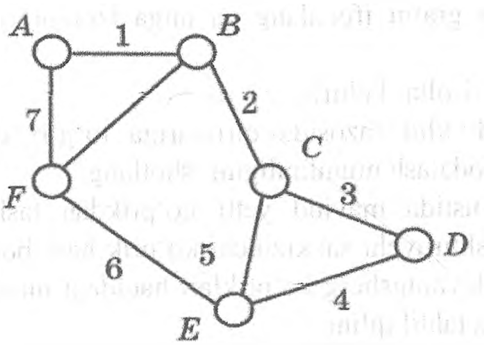
$$<8,0,0>, <7,1,0>, <7,0,1>, <6,2,0>, <6,1,1>, <6,0,2>, <5,3,0>, <5,2,1>, <5,1,2>,$$
$$<5,0,3>, <4,4,0>, <4,3,1>, <4,2,2>, <4,1,3>, <3,5,0>, <3,4,1>, <3,3,2>, <3,2,3>,$$
$$<2,5,1>, <2,4,2>, <2,3,3>, <1,5,2>, <1,4,3>, <0,5,3>.$$

Holatlar to'plamini V bilan belgilaymiz. Suyuqlikni (yoki uning bir qismini) idishlarning biridan boshqa birortasiga quyish natijasida sistema bir holatdan boshqa holatga o'tishi mumkin. Ta'kidlash kerakki, yuqoridagi holatlarning ixtiyoriysidan boshqa birortasiga bevosita yoki bilvosita o'tish imkoniyati mavjud bo'lmasligi ham mumkin. Sistemaning bir holatdan boshqa holatga bevosita o'tishlari to'plamini U bilan belgilaymiz. Natijada hosil bo'lgan (V,U) juftlikni graf deb qarash mumkin. Bu grafning uchlari sistema holatlariga, yoylari (qirralari) esa, bevosita o'tishlarga mos keladi.

Berilgan masalani hal qilish uchun (V,U) grafning yoylaridan tashkil topgan shunday ketma-ketlik tuzish kerakki, bu ketma-ketlikning birinchi hadi $<8,0,0>$, oxirgi hadi esa $<4,4,0>$ bo'lsin. Bunday ketma-ketliklardan biri quyidagicha:

$<8,0,0>$, $<5,0,3>$, $<5,3,0>$, $<2,3,3>$, $<2,5,1>$, $<7,0,1>$, $<7,1,0>$, $<4,1,3>$, $<4,4,0>$.
Masala yechildi.

2 misol. Quyidagi grafning uchla qo`shnilik matrisasini tuzing.



Yechish. Ushbu grafning 6 ta uchi bo`lganligi sababli matrisaning o`lchami 6×6 bo`lib, quyidagicha bo`ladi:

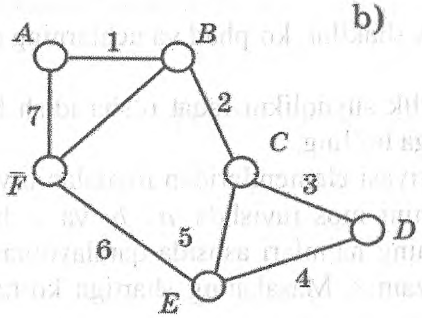
$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3-misol. Uchlari soni 7 ta bo`lgan to`la grafning qirralar (yoylar) sonini toping.

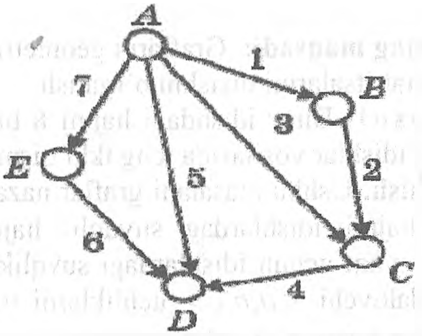
Yechish. Ushbu masalani $K = \frac{7(7-1)}{2}=21$ formula bilan aniqlaymiz.

4-misol. Quyidagi graflarning insidentlik matrisasini tuzing.

a)



b)



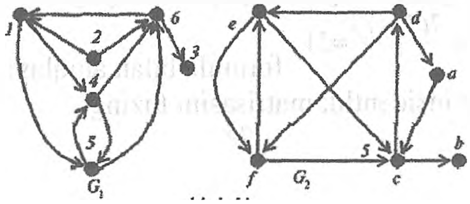
Yechish. a) Chizamda oddiy graf bo`lganligi uchun, uning insidentlik matrisasi 0 va 1 lardan iborat bo`ladi.Uni jadval ko`rinishda yozamiz: uchlarni qatorlarga, qirralarni ustunlarga joylashtiramiz:

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	1	0	0	0	0	0	1	0
B	1	1	0	0	0	0	0	1
C	0	1	1	0	1	0	0	0
D	0	0	1	1	0	0	0	0
E	0	0	0	1	1	1	0	0
F	0	0	0	0	0	1	1	1

b) Chizamda orgraf(orentirlangan graf) bo`lganligi uchun matritsada -1 soni ham ishtirok etadi.

	1	2	3	4	5	6	7
A	1	0	1	0	1	0	1
B	-1	1	0	0	0	0	0
C	0	-1	-1	1	0	0	0
D	0	0	0	-1	-1	-1	0
E	0	0	0	0	0	1	-1

1. Grafning abstrekt ta'rifi yordamida biron grafni ifodalang va unga izomorf grafni qog'ozda tasvirlang.
2. Graflarning geometrik ifodalanshiga doir misollar keltiring.
3. Har qanday chekli grafni 3 o'lchovli Evklid fazosida qirralariga to'g'ri chiziq kesmalari mos keladigan qilib geometrik ifodalash mumkinligini isbotlang.
4. Kyonigsberg shahridagi Pregel daryosi ustida mavjud yetti ko'prikdan tashqari, shaharning B va C ismlarini bevosita tutashtiruvchi sakkizinchi ko'prik ham bor deb hisoblab, bunday qo'shimcha shartga ega Kyonigsberg ko'priklari haqidagi masalaga mos graf tuzing, uni geometrik ifodalang va tahlil qiling.
5. Uchlari va qirralari sonlari mos ravishda teng bo'lib, o'zaro izomorf bo'lmagan graflarga misollar keltiring.
6. Barcha Platon jismlariga mos tekis graflarni geometrik ifodalang.
7. Biron idishdagi hajmi 8 birlik suyuqlikni faqat o'sha idish hamda 5 va 3 birlik hajmli idishlar vositasida teng ikk qismga bo'lish haqidagi boshqotirma masalani hal qilish maqsadida tuzilgan grafni geometrik ifodalang.
8. Uchlari va qirralari sonlari turlicha bo'lgan va tarkibida sirtmoqlari va karrali qirralari bor grafni geometrik ifodalang, ularning har biriga mos maxsus ko'phadlarni, uchlari qo'shniligi va insidentlik matrisalarini yozing.
9. Quyida berilgan shakl tasvirlangan G_1 va G_2 graflarning izomorfligini isbotlang.

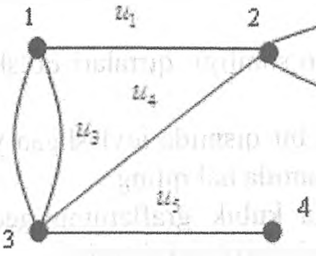


10. To'la grafga mos keluvchi uchlar qo'shniligi matritsasini tahlil qiling.

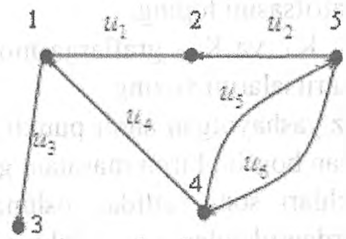
16-amaliy mashg'ulot. Eng qisqa yo'l muommosi. Graf ustida sodda amallar.

Darsning maqsadi: Talabalarga marshrut, zanjir va graf ustida sodda amallar bajarishni o`rgatishdan iborat.

1-misol. 1 shakldagi grafda berilgan $(3,u_4,2,u_1,1,u_1,2,u_6,2,u_4,3,u_5,4)$ da oraliq uch, marshrutning uzunligi va zanjirligini aniqlang.



1- shakl



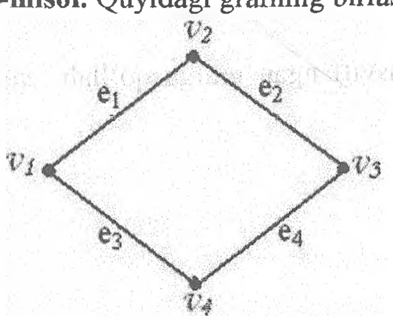
2- shakl

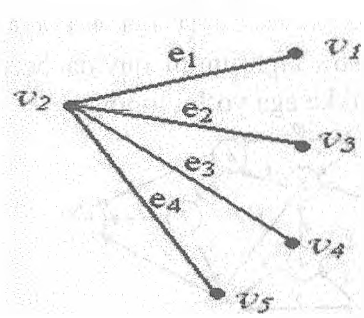
Yechish. Ushbu masalada 1- shakldа tasvirlangan graf uchun ketma-ketlik 3 belgili uchdan 4 belgili uchga yo'nalgan marshrutdir, bunda 3 – boshlang'ich uch, 4 – oxirgi uchdir. Bu marshrutda 1, 2 va 3 belgili uchlar oraliq uchlar hisoblanadi. Qaralayotgan marshrutning uzunligi 6a teng bo'lib, u zanjir bo'la olmaydi, chunki unda 1 belgili uch 2 marta (bir marta oraliq uch sifatida, ikkinchi marta esa oxirgi uch sifatida) qatnashmoqda. Yana o'sha graf uchun (3,2,1,3) zanjirning oxirgi bo'g'ini sifatida u_2 yoki u_3 qirralardan qaysisi olinishiga bog'liqsiz ravishda, u yopiq zanjir va sikldir.

2-m i s o l. 2 shakldа tasvirlangan grafning $(3,u_3,1,u_4,4,u_5,5,u_2,2,u_1,1)$ marshrutning zanjirligini aniqlang.

Yechish. Ushbu marshrut ketma-ketlik oriyentirlanmagan marshrut va zanjirdir, lekin u oddiy zanjir bo'la olmaydi. Bu ketma-ketlik oriyentirlangan marshrut ham bo'la olmaydi, chunki unda marshrut yo'nalishiga teskari yo'nalishga ega yoylar bor (u_3,u_4,u_1). Qaralayotgan graf uchun (u_6,u_5,u_2) ketma-ketlik oriyentirlangan marshrutni tashkil etadi. Bu marshrut yo'ldir, lekin u kontur emas. Berilgan grafda faqat bitta kontur bo'lib, bu konturni $(4,u_5,5,u_6,4)$ yoki $(5,u_6,4,u_5,5)$ ko'rinishda ifodalash mumkin.

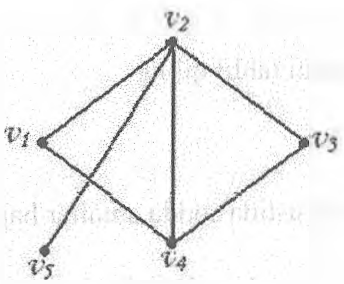
3-misol. Quyidagi grafning birlashmasini topig.



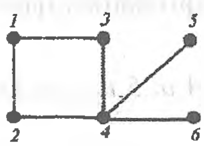


Yechish. Ushbu graflarning birlashmasi quyidagicha bo`ladi:

**Ta`rif.** Ikkita $G_1=\{V_1,U_1\}$ va $G_2=\{V_2,U_2\}$ graflarning birlashmasi deb, $G=G_1\cup G_2=\{V,U\}$ grafga aytiladi, bunda $V=V_1\cup V_2$, $U=U_1\cup U_2$. Sunga asosan quyidagi graf hosil bo`ladi.



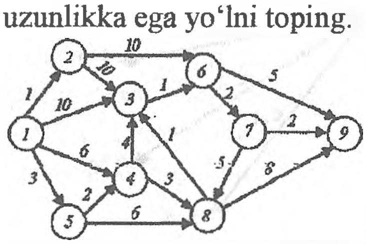
1. Kyonigsberg ko‘priklari haqidagi masalaga mos grafning uchlari qo‘shniligi matritsasini toping.
2. K_3, K_4, va $K_{3,3}$ graflarga mos uchlari qo‘shniligi, qirralari qo‘shniligi va insidentlik matritsalarini yozing.
3. Siz yashayotgan aholi punkti yoki uning bir qismida joylashgan yo‘llar va chorahalar bilan bog‘liq biron masalani graflar yordamida hal qiling.
4. Uchlari soni yettidan oshmagan barcha kubik graflarning geometrik ifodalanishi yordamida ularga mos uchlar qo‘shniligini matritsasini tuzing.
5. To‘qqizta uchga ega bo‘lgan barcha ikki, uch va to‘rt bo‘lakli to‘la graflarga mos uchlar qo‘shniligi matritsalarini tuzing.
6. Elementlari siz yashayotgan aholi punktidagi chorraha va yo‘llarga mos keluvchi grafni geometrik ifodalab, bu grafda marshrutlar, zanjirlar, oddiy zanjirlar va sikllarni aniqlang.
7. Rasmda tasvirlangan grafning diametri, radiusi va markazlarini toping.



8. Petersen grafining markazini toping.
9. Kyonigsberg ko‘priklari haqidagi masalaga mos grafning diametri va radiusini toping.
10. Qirralari qo‘shniligi matritsasi quyida berilgan graflarning radiuslarini aniqlang:

$$a)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad b)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

11. Deykstra algoritmini quyida berilgan shaklda tasvirlangan grafga qo‘llab, eng qisa uzunlikka ega yo‘lni toping.



17-amaliy mashg‘ulot. Ehtimollik ta’rifi. Shartli ehtimollik.

Darsninr maqsadi: Ehtimollik nazariyasi elementlari, hodisalar, muqarrar hodisa, hodisaning ehtimolligini hisoblash bo`yich talabalarning bilimini mustahkamlash.

1-misol. Telefon nomerini terayotganda abonent oxirgi ikki raqamni eslay olmadi. U bu raqamlar har xil ekanligini eslab, ularni tavakkaliga terdi. Telefon nomeri to‘g‘ri terilganligi ehtimolligini toping.

Oxirgi ikki raqamni A_{10}^2 usul bilan terish mumkin. A={telefon nomeri to‘g‘ri terilgan} hodisasini kiritamiz. A hodisa faqat bitta elementdan iborat bo‘ladi(chunki kerakli telefon nomeri bitta bo‘ladi). Shuning uchun klassik ta’rifga ko‘ra $P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}=\dfrac{1}{A_{10}^2}=\dfrac{1}{10\cdot 9}=\dfrac{1}{90}\approx 0.011$

2-misol. 100 ta lotoreya biletlarlaridan bittasi yutuqli bo‘lsin. Tavakkaliga olingan 10 lotoreya biletlari ichida yutuqlisi bo‘lishi ehtimolligini toping.

100 ta lotoreya biletlaridan 10 tasini C_{100}^{10} usul bilan tanlash mumkin. B={10 lotoreya biletlari ichida yutuqlisi bo‘lishi} hodisasi bo‘lsa, $N(B)=C_1^1\cdot C_{99}^9$ va $P(B)=\dfrac{N(B)}{N(\Omega)}=\dfrac{C_1^1\cdot C_{99}^9}{C_{100}^{10}}=\dfrac{1}{10}=0.1$

3-misol. Pochta bo‘limida 6 xildagi otkritka bor. Sotilgan 4 ta otkritkadan: a) 4 tasi bir xilda; b) 4 tasi turli xilda bo‘lishi ehtimolliklarini toping.

6 xil otkritkadan 4 tasini $\overline{C_6^4}$ usul bilan tanlash mumkin. a) A={4 ta bir xildagi otkritka sotilgan} hodisasi bo‘lsin. A hodisaning elementar hodisalari soni otkritkalar xillari soniga teng, ya’ni $N(A)$=6. Klassik ta’rifga ko‘ra $P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}=\dfrac{6}{\overline{C_6^4}}=\dfrac{6}{126}=\dfrac{1}{21}$ bo‘ladi. b) B={4 ta har xil otkritka sotilgan} hodisasi bo‘lsin, u holda $N(B)=C_6^4$ ga teng va $P(B)=\dfrac{N(B)}{N(\Omega)}=\dfrac{C_6^4}{\overline{C_6^4}}=\dfrac{15}{126}=\dfrac{5}{42}$.

1.Yosh bola Z, S, T, U, O harfli kartochkalarni o‘ynab o‘tiribdi. Bola shu harflardan tasodifan “USTOZ” so‘zining yozilish ehtimolini toping.

2.Yosh bola 10 ta A, A, A, E, I, K, M, M, T, T harfli kartochkalarni o‘ynab o‘tiribdi. Bola shu harflardan tasodifan “MATEMATIKA” so‘zining yozilish ehtimolini toping.

3.Uchta shoshqoltosh tashlandi. Agar uchala shoshqaltoshning turli tomonlari bilan tushganligi ma’lum bo‘lsa, ularning kamida bittasida bir ochko tushish ehtimoli nechiga teng?

4.Erkak va ayollar soni teng deb hamma erkaklarning 3% i hamda ayollarning 0,21% i dal’toniklar bo‘lsa, tasodifiy tanlangan shahsning dal’tonik bo‘lish ehtimolini toping.

5.Fabrikada A, B, C mashinalar barcha mahsulotning mos ravishda 25%, 35% va 40% ini ishlab chiqaradi. Mashinalar ishlab chiqarayotgan mahsulotlarning mos ravishda 5%, 4%, 2% i yaroqsiz bo‘lsa, tavakkaliga olingan mahsulotning A mashinada tayyorlangan bo‘lishi, shuningdek B mashinada va C mashinada tayyorlangan bo‘lishi ehtimolini toping.

6. Simmetrik tanga 8 marta tashlanganda 3 marta gerb tushish ehtimolini toping.
7. Har bir otilgan o‘qning nishonga tegish ehtimoli $=\frac{2}{3}$. Otilgan 20 ta o‘qdan 4 tasining nishonga tegish ehtimolini toping.
8. Korxona ishlab chiqaradigan har bir mahsulotning yaroqqsiz bo‘lishi ehtimoli $p=0{,}005$ bo‘lsin. Korxona ishlab chiqargan 10000 ta mahsulotdan 40 tasining yaroqsiz bo‘lish ehtimolini toping.
9. Bitta detalning yaroqsiz bo‘lish ehtimoli $p=0{,}05$ bo‘lsin. Ixtiyoriy olingan 10000 detal ichida yaroqsiz detallarning soni 70 tadan ko‘p bo‘lmaslik ehtimolini toping.
10. Oilada 8 farzand bor. O‘g‘il va iz tug‘ilish ehtimollari o‘zaro teng. Oilada 8 farzanddan:
    a) 3 tasi qiz bola, 5 tasi o‘g‘il bola;
    b) kamida 4 tasi o‘g‘il bola;
    c) ko‘pi bilan 5 tasi qiz bola bo‘lish ehtimolini toping.

11. Talaba imtihonga programmadagi 25 ta savoldan 20 tasini bilib keldi. Imtihon oluvchi talabaga 3 ta savol berdi. Talabaning 3 ta savolni bilish ehtimolini toping.

18-amaliy mashg'ulot. Hodisalar bog'liqsizligi. Bernulli formulasi.

Darsninr maqsadi: Ehtimollikning geometrik, statistik va klassik ta`riflaridan foydalanib hodisa ehtimolligini hisoblashni o`rgatish.Shuningdek shartli ehtimollik formulasidan foydalanib hodisaning ro`y berishi ehtimolligini topishni o`rgainish

1-misol. Idishda 3 ta oq va 7 ta qora shar bor. Tavakkaliga ketma-ket bittadan 2 ta shar olinadi. Birinchi shar oq rangda bo'lsa ikkinchi sharning qora rangda bo'lishi ehtimolligini toping.

Bu misolni ikki usul bilan yechish mumkin:

3) A={birinchi shar oq rangda}, B ={ikkinchi shar qora rangda}. A hodisa ro'y berganidan so'ng idishda 2 ta oq va 7 ta qora shar qoladi. Shuning uchun $P(B/A)=\frac{7}{9}$.

4) (1) formuladan foydalanib, hisoblaymiz: $P(A)=\frac{3}{10}$, $P(AB)=\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}=\frac{7}{30}$

Shartli ehtimollik formulasiga ko'ra: $P(B/A)=\frac{P(A\cdot B)}{P(A)}=\frac{7/30}{3/10}=\frac{7}{9}$.

1. Gruppada 25 ta talaba bor. Har bir talabaning kundalik mashg'ulotga qatnashmaslik ehtimoli $p\approx 0{,}01$ ga teng. Tavakaliga olingan kunda 2 talabaning mashg'ulotga qatnashmaslik ehtimolini toping.
2. Zavodda tayyorlangan detallardan 12 tasi tekshirishga ajratildi. Har bir detalning ishga yaroqlilik ehtimoli 0,95 ga teng. Eng ko'p ehtimol bilan ulardan nechtasi yaroqli bo'lishi mumkin.
3. O'g'il bola tug'ilish ehtimoli $p=0515$ deb , 10 farzandi bor oiladagi farzandlarning 7 nafari o'g'il bola bo'lish ehtimolini toping.
4. Brigadada 6 traktor bor, shu traktordan kamida 5 tasi ishlasa, brigadaning ishi normal deyiladi. Traktorning ayrim sabablarga ko'ra ishlamaslik ehtimoli 0,1 ga teng bo'lsa, brigadaning normal ishlash ehtimolini toping.
5. 500 sahifali kitobni bosib chiqarishda bosmaxonada 50 ta harfiy xatoga yo'l qo'yilgan. Tavakaliga olingan sahidada harfiy hato bo'lish ehtimolini toping.
6. Urug'lik bug'doyning 0,6% i begona o'tlar urug'idan iborat. Tavakkaliga olingan 1000 dona urug'dan kamida 6 ta urug'; 10 ta urug' begona o't urug'I bo'lish ehtimolini toping.
7. O'zbek va ingliz tilidagi kitoblar bor kutubxonada tavakkaliga olingan kitobning o'zbek tilida bo'lish ehtimoli 0,6 ga teng bo'lsa, fondagi 2500 ta kitobning 1500 tasi o'zbek tilida bo'lish ehtimolini toping.
   a) Kami bilan 1500 va ortig'I bilan 1700 ta bo'lishi;
   b) Kami bilan 1500 bo'lishi;
   c) ortig'I bilan 1499 bo'lishining ehtimolini toping.
8. Bitta o'q otilganda o'qning nishonga tegish ehtimoli 0,7 ga teng. 150 ta o'q otilganda nishonga rosa 75 marta o'q tegish ehtimolini toping.
9. Magazinga 100 dona birinchi va ikkinchi sortli mahsulot keltirildi. Mahsulotning birinchi sort bo'lishi ehtimoli 0,7 ga teng. Birinchi sort mahsulotning soni 60 va 80 sonlari orasida bo'lish ehtimolini toping.
10. Kuzatilayotgan hodisaning bitta tajribada ro'y berish ehtimoli 0,3 ga teng. 100 ta tajriba o'tkazilganda kuzatlyotgan hodisaning nisbiy chastotasi 0,2 dan 0,4 gacha oraliqda bo'ladi deb qanday ehtimol bilan aytish mumkin?

11. Ehtiyot qismlarni sarflash vedomostlarini kuzatish avtomobil dvigatelini remont qilishda №1 detal o‘rtacha 36% hollarda, №2 detal 42% hollarda, har ikkala detal bir vaqtda o‘rtacha 30% hollarda almashtirilganligi aniqlandi. Bu ma’lumotlarga asoslanib, №1 detalning almashtirilishi va №2 detalning almashtirilishi o‘rtasida statistic bog‘lanish bor deb hisoblash mumkinmi? Dvigatelni remont qilish paytida №1 detal almashtirilgan bo‘lsa, №2 detalning ham almashtirilgan bo‘lish ehtimolini toping.
12. Talaba imtihonga programmadagi 25 ta savoldan 20 tasini bilib keldi. Imtihon oluvchi talabaga 3 ta savol berdi. Talabaning 3 ta savolni bilish ehtimolini toping.

19-amaliy mashg‘ulot. Tasodifiy miqdor va uning taqsimot funksiyasi. Taqdimot funksiyaning xossalalri.

Darsning maqsadi: Amaliy masalalarni yechish orqali talabalarning tasodifiy miqdor, tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasi haqidagi bilimlarini mustahkamlash. Taqsimot funksiyasi xossalaridan masalalar yechishda foydalanishni o`rgati.

1-misol. 10 ta lotoreya biletida 2 tasi yutuqli bo‘lsa, tavakkaliga olingan 3 ta lotoreya biletlari ichida yutuqlilari soni X t.m.ning taqsimot qonunini toping.

X t.m.ni qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$. Bu qiymatlarning mos ehtimolliklari esa

$$p_1 = P\{X=0\} = \frac{C_2^0 \cdot C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{56}{120} = \frac{7}{15};\ p_2 = P\{X=1\} = \frac{C_2^1 \cdot C_8^2}{C_{10}^3} = \frac{56}{120} = \frac{7}{15};$$

$$p_3 = P\{X=2\} = \frac{C_2^2 \cdot C_8^1}{C_{10}^3} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}.$$

X t.m. taqsimot qonunini jadval ko‘rinishida yozamiz:

X	0	1	2
P	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

$$\sum_{i=1}^{3} p_i = \frac{7}{15} + \frac{7}{15} + \frac{1}{15} = 1$$

1. Agar ikkita tanga tashlasak, ω elementar hodisalar GG; GR; RG; RR dan iborat bo‘lib, “gerb” tushishlar sonini $\xi = \xi(\omega)$ deb belgilasak, bu tasodifiy miqdorni jadval bilan berilishini ko‘rsating.
2. Agar $\varepsilon\colon \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 2,\quad p\colon \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}$ bo‘lsa, ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini toping.
3. $P(\xi < x) = F(x)$ bo‘lsin, u holda
   a) $\tau = \alpha\xi + \beta,\ \alpha\ va\ \beta$ –haqiqiy sonlar,
   b) $\tau = \frac{1}{\xi}$,$(P(\xi = 0) = 0)$;
   c) $\tau = tg\xi$;
   d) $\tau = cos\xi$.

   tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyasini toping.
4. ξ_1, ξ_2 o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan (0,1)-parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorlar bo‘lsin. Ular yig‘indisining zichlik funksiyasini topaylik.
5. ξ_1, ξ_2 o‘zaro bog‘liq emas hamda $\begin{matrix}\xi_1\colon & -1 & 0 & 1\\ p\colon & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{matrix}$ va $\begin{matrix}\xi_2\colon & -2 & -1 & 1 & 2\\ p\colon & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5}\end{matrix}$ bo‘lsa, $\tau = \xi_1 + \xi_2$ ning taqsimot qonunini toping.
6. Tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi quyidagi ko‘rinishga ega:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & agar\ x \le -1\ bo'lsa \\ \frac{3}{4}x+\frac{3}{4}, & agar -1 \le x \le \frac{1}{3}\ bo'lsa \\ 1, & agar\ x > \frac{1}{3}\ bo'lsa \end{cases}$$

Uning zichlik funksiyasini toping.

7. Tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & agar\ x \le 0\ bo'lsa \\ sin2x, & agar\ 0 < x \le \frac{\pi}{4}\ bo'lsa \\ 1, & agar\ x > \frac{\pi}{4}\ bo'lsa \end{cases}$$

Uning zichlik funksiyasini toping.

8. Tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & agar\ x \le 1\ bo'lsa \\ x-\frac{1}{2}, & agar\ 1 < x \le 2\ bo'lsa \\ 0, & agar\ x > 2\ bo'lsa \end{cases}$$

Uning taqsimot funksiyasini toping.

Keys banki

1. Sarvar o'yinchoq askarlarni o'ynayapti. Dastlab o'yinchoqlarni juft-juft qilib joylashtirishga urindi, ammo bitta ortib qoldi. So'ngra Sarvar o'yinchoqlarni 3 tadan joylashtirmoqchi bo'ldi. Unda ham bitta o'yinchoq ortib qoladi. Agar u 4 tadan, 5 tadan, 6 tadan joylashtirmoqchi bo'lsa ham bitta ortib qoladi. Oxiri 7 tadan safga joylashtirishga erishdi. Agar Sarvardagi o'yinchoqlar soni 1000 tadan kam bo'lsa, unda nechta o'yinchoq bo'lishi mumkin?

2. a) Quyon o'rmonda aylanib yurib, bo'riga duch keldi. Bo'ri quyonga – agar, 1 minut *ichida ikkining bir xil raqam bilan tugaydigan ikkita darajasini aytsa, uni emasligini aytdi*. Quyonga yordam bering. b) Bo'ri quyonga ikkining ikkita bir xil raqam bilan tugaydigan darajasini topsa uni qo'yib yuborishini, agar uchta bir xil raqam bilan tugaydigan darajasini topsa, uni umuman quvlamasligini aytdi. Quyon bunga erisha oladimi?

3. Otda ketayotgan Kenja botirga dashtda bo'rilar galasi hujum qildi. Kenja botir ikkita bo'ri yonidan o'tayotganda, bu bo'rilar unga tashlandilar. Kenja botir bo'rilarga chap berdi, bo'rilar esa bir-biri bilan to'qnashib, yarador bo'lishdi. Shu chap berish usulini qo'llab, Kenja botir barcha bo'rilarni yarador qildi. Galada 23 ta bo'ri bo'lgan bo'lishi mumkinmi?

4.Dunyo bo'ylab sayohatdan qaytib kelgan Nasriddin afandi «Dashtiston" deb atalmish mamlakat chegarasini 13 marta kesib o'tganligini gapirib berdi. Siz unga ishonasiz-mi?

5. Juda katta maydonida uchta to'p bor. Jasur ulardan bittasini shunday tepadi-ki, natijada u qolgan ikkitasining orasidan o'tadi. U shu qoida bo'yicha 2007 marta to'plarni tepdi. Shundan keyin to'plar dastlabki holatida joylashib qolishi mumkinmi?

6. Zilola bilan Hilola quyidagicha o'yin o'ynashayapti: Zilola yuqoriga tanga otadi, Hilola esa tanganing qaysi tomoni bilan erga tushushini oldindan aytishi kerak. Agar tanga Hilola aytgan tomoni tushsa, Zilola unga bu nechanchi tanga otish bo'lsa, shuncha konfet beradi, agarda Hilola tangani qaysi tomoni bilan tushushini topa olmagan bo'lsa, u Zilolaga shuncha konfet beradi.

a) Tanga 11 marta otilganidan keyin Zilolaning konfetlari soni oldingidek bo'lishi mumkin-mi?

b)30 marta otilganidan keyin-chi?

7. 101 ta tanga bor. Ularning 50 tasi qalbaki. Qalbaki tangalar haqiqiysidan 1 grammga farq qiladi. Sitora 1 ta tangani oldi va uning haqiqiy ekanligini pallalaridagi yuklarning ayirmasini ko'rsatuvchi tarozida bir marta o'lchash yordamida aniqlamoqchi bo'ldi. U buni uddalay oladimi?

8. Doira shaklidagi stol atrofida 6 ta stul bor. Ali, Vali va G'ulom bu stullarga o'ttirishganda ularning qarshisidagi stullar bo'sh qoldi. Har bir minutdan keyin bolalarda bittasi o'rnidan turib qarshisidagi stulga borib o'tiradi. 15 minutdan keyin bolalar oldingi joylarida o'tirgan bo'lishi mumkin-mi?

9. Xonadagi 3 ta lampochkani 3 ta kalitga nechta usul bilan ulash mumkin (har bir lampochkaga aloxida kalit ulanishi kerak).

10. "Choy ichish uchun hamma narsa" magazinida piyolaning 5 turi, laganning 3 turi va choy qoshig'ning 4 turi bor edi.

a) Bitta to'liq majmuani nechta hil usul bilan tanlash mumkin?

b) "Piyola + lagancha" majmuani nechta xil usul bilan tanlash mumkin?

c) "Piyola + lagancha + qoshiq" majmuasini nechta xil usul bilan tanlash mumkin?

d) Ikkita to'liq majmuani nechta usul bilan tanlash mumkin?

e) Nolta majmuani bitta usul bilan tanlash mumkinligi tushunarli.

$1+12+47+60=4\cdot 5\cdot 6$ tenglikning ma'nosi nima?

f) Bitta chashka, bitta laganga va bitta qoshiq oltindan ekanligi ma'lum.

11. Quyidagi turli majmualardan nechta xil usul bilan sotib olish mumkin:

1) oltin predmet yo'q;
2) 1 ta oltin predmet;
3) 2 ta oltin predmet;
4) 3 ta oltin predmet?

12. Avtobus chiptalarining nomerlari 000000 dan 999999 gacha bo'lgan olti xonali sonlar:

a) Hamma raqamlari toq chiptalar nechta?
b) Birorta ham toq raqami yo'q chiptalar soni nechta?
c) Ixtiyoriy ikkita qo'shni raqamlari turlicha bo'lgan chiptalar soni nechta?
d) Hamma raqamlari har xil bo'lgan chiptalar soni nechta?

13. Sayyohlar guruhi chet ellar bo'ylab sayohatga chiqishdi. Ulardan 28 kishi ingliz tilini, 13 kishi frantsuz tilini, 10 kishi nemis tilini, 8 kishi ingliz va fransuz tilini, 5 kishi frantsuz va nemis tilini, 6 kishi ingliz va nemis tilini, ikki kishi uchchala tilni xam biladi, 41 kishi yuqoridagi uchta tildan hech birini bilmaydi. Sayyohlarning umumiy sonini toping.

14. Asliddin amaki 90 kunlik ta'tilini qishloqda o'tkazdi. Bunda u quyidagi qoidalarga qat'iy amal qildi: xar ikkinchi kun (kun ora) cho'milishga, har uchinchi kun do'kondan mahsulotlar sotib olishga bordi, har beshinchi kun esa bog'da ishladi. Birinchi kun Asliddin amaki hammasi bilan birdaniga shug'ullandi va juda charchadi. Ta'til davomida nechta kun

a) " yoqimli " (bu kun u faqat cho'miladi);

b) " zerikarli " (hech qanday ish qilmaydigan kun.);

c) og'ir (uchta ishni qilishi kerak bo'lgan kunlar) bo'ladi?

15. Bo'rilar va quyonlar orolida. Sexrli orolda faqat bo'rilar va quyonlar yashaydi. Ular sehrli xislatlarga ega. Bo'rilar haftaning seshanba, chorshanba va payshanba kunlari faqat rost gapiradilar, qolgan kunlari esa faqat yolg'on gapiradilar. Quyonlar esa haftaning payshanba, juma va shanba kunlari faqat yolg'on, qolgan kunlari esa faqat rost gapiradi.

a). Bir kuni Afandi oroldagi daraxt soyasida dam olayotgan bo'ri va quyonga duch

keldi. Ular quyidagi gaplarni aytdilar:
Bo'ri: kechadan oldingi kun men yolg'on gapirgan edim.
Quyon: shu kuni men ham yolg'on gapirgan edim.
Bu voqea haftaning qaysi kuni ro'y bergan?

b). Boshqa bir kuni Afandi orolda bitta bo'riga duch keldi. Bo'ri unga ikkita gap aytdi:

a) Kecha men yolg'on gapirgan edim. b) Ertadan keyin men ketma – ket ikki kun yolg'on gapiraman. Bu uchrashuv haftaning qaysi kuni ro'y bergan?

16. Qirol oy davomida har kuni shirinlik sifatida pirojniyning ikki turini buyurdi. Agar qaysidir ikki kunda shirinliklar bir xil bo'lib qolsa, oshpazning boshi ketadi. Oshpaz boshi ketmasligi uchun pirojniyning necha xilini pishirishni bilishi kerak?

17. Ona stolga pechenielarni qo'yib, o'g'illariga maktabdan qaytgach pechenielarni teng bo'lib olishlarini tayinladi. Birinchi bo'lib maktabdan Anvar qaytdi. U pechenielarni uchdan birini olib ketdi. Keyin Sarvar qaytdi, u stolda turgan pechenielarning uchdan birini olib ketdi. Oxirgi bo'lib Sardor qaytdi va qolgan pecheniyelarning uchdan birini oldi. Agar Sardor 4 ta pecheniye olgan bo'lsa, stol ustida dastlab nechta pecheniye bo'lgan?

Test savollari

Test topshirig'i	To'g'ri javob	Muqobil javob	Muqobil javob	Muqobil javob
Agar $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{4,5,6,7\}$ bo'lsa, $A\Delta B$ (simmetrik ayirma) to'plam qanday elementlardan iborat?	* $\{1,2,3,6,7\}$	$\{6,7\}$	$\{7,9\}$	$\{1,2,3\}$
Quyidagi tengliklardan qaysi biri noto'g'ri?	* $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup C$	$A\setminus B=A\setminus(A\cap B)$	$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$	$(A\cap B)\cup A=A$
Quyidagi tengliklardan qaysi biri noto'g'ri?	* $(A\cup B)\cap A=B$	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus C$	$A\cap(B\setminus A)=\varnothing$;
Agar $A=\{1,2,4,5\}$, $B=\{4,5,6,7,8\}$ bo'lsa, $A\Delta B$ (simmetrik ayirma) to'plam qanday elementlardan iborat?	* $\{1,2,6,7,8\}$	$\{6,7\}$	$\{7,9\}$	$\{1,2,3\}$
Agar $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{3,4,5,8,9\}$ bo'lsa, $A\cup B$ to'plam qanday elementlardan iborat?	* $\{1,2,3,4,5,8,9\}$	$\{3,4\}$	$\{3,2,4\}$	$\{1,2,8,9\}$
Agar $A=\{2,3,5,7\}$, $B=\{5,7,8,9\}$ bo'lsa, $A\cap B$ to'plam qanday elementlardan iborat?	* $\{5,7\}$	$\{8,9\}$	$\{2,3,5,7,8,9\}$	$\{2,3\}$
Agar $A=\{1,2,3,5,8\}$, $B=\{3,5,7,8,9\}$ bo'lsa, $A\setminus B$ to'plam qanday elementlardan iborat?	* $\{1,2\}$	$\{7,9\}$	$\{3,5,8\}$	$\{1,2,8,9\}$
Quyidagi belgilar ketma-ketliklarining qaysi biri formula bo'ladi?	* $((A\leftrightarrow B)\wedge\neg A)$	$(A\to B)\neg\vee B$	$\neg(A\vee B)\to\neg B\ )$	$(\neg B\to\vee A)$
Quyidagi belgilar ketma-ketliklarining qaysi biri formula bo'ladi?	* $((B\to(A\wedge C))\wedge\neg(A\vee C))$	$(A\to\vee(B\wedge C))$	$\neg(\to B\vee C)\wedge A,D)$	$(\neg(A\to B)\vee\neg C))$
Quyidagi belgilar ketma-ketliklarining qaysi biri formula bo'lmaydi?	* $\neg(\to B\vee C)\wedge A,D)$	$((A\leftrightarrow B)\wedge\neg A)$	$((A\leftrightarrow B)\wedge\neg(A\vee \tilde{N}))$	$((A\to B)\vee A)$
Quyidagi belgilar ketma-ketliklarining	* $(B\vee C)\wedge AD)$	$(\neg(B\vee C)\wedge A)$	$(\neg(B\vee C)\wedge(A\vee D))$	$((B\vee C)\wedge(A\vee\neg D))$

formula?				
Quyidagi uch o‘zgaruvchili formulalarning qaysi biri keltirilgan formula?	* $((\neg A \wedge B) \vee \neg C)$	$(\neg(A \wedge B) \vee C)$	$((A \to B) \vee C)$	$(\neg(A \vee B) \vee C)$
Quyidagi uch o‘zgaruvchili formulalarning qaysi biri keltirilgan formula?	* $((\neg A \wedge B) \vee (\neg C \wedge \neg B))$	$((\neg A \wedge B) \vee \neg(\neg C \wedge \neg B))$	$((\neg A \wedge B) \to (\neg C \wedge \neg B))$	$((\neg A \wedge B) \vee (\neg C \to \neg B))$
Quyidagi formulalarning qaysi biri DNF bo‘ladi?	* $((\neg A \wedge B) \vee (\neg C \wedge \neg B))$	$((\neg A \wedge B) \vee (\neg C \to \neg B))$	$((\neg A \to B) \vee (\neg C \to \neg B))$	$(\neg(\neg A \wedge B) \vee \neg(\neg C \wedge \neg B))$
Quyidagi formulalarning qaysi biri DNF bo‘ladi?	* $(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$	$(B \to \neg A)$	$(A \leftrightarrow B)$	$((A \vee B) \wedge C)$
Quyidagi formulalarning qaysi biri KNF bo‘ladi?	* $(\neg A \vee B \vee C)$	$((\neg A \to B) \vee (\neg C \to \neg B))$	$((\neg A \wedge B) \vee (\neg C \to \neg B))$	$(\neg(\neg A \wedge B) \vee \neg C)$
Quyidagi ikki o‘zgaruvchili formulalarning qaysi biri KNF bo‘ladi?	* $(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee C)$	$(B \to \neg A)$	$\neg(A \wedge B)$	$((A \vee B) \wedge \neg(C \vee A))$
Quyidagi ketma-ketliklardan qaysi biri formula bo‘ladi.	* $((A \wedge B) \vee C)$	$A \vee B(C \wedge D)$	$(A \neg B) \to C$	$(A \wedge \to B) \vee C$
Quyidagi ketma-ketliklardan qaysi biri formula bo‘ladi.	* $((\neg A \wedge B) \to (B \vee C))$	$(\vee B \wedge C) \to A$	$A \to (B \vee C)$	$A \wedge B) \to C$
$(((A \to \neg B) \to B) \wedge (\neg A \vee B))$ formula propozitsional o‘zgaruvchilar tanlanmalarining nechtasida rost qiymat qabul qiladi.	*2 ta	0 ta	1 ta	3 ta
$(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$ formula propozitsional o‘zgaruvchilar tanlanmalarining nechtasida rost qiymat qabul qiladi.	*4 ta	2 ta	1 ta	3 ta
$(((A \vee \neg B) \wedge C) \to (A \wedge C))$ formula propozitsional o‘zgaruvchilar tanlanmalarining nechtasida rost qiymat qabul qiladi.	*7 ta	5 ta	3 ta	8 ta

qaysi biri formula bo'lmaydi?				
$F \equiv (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ formulaning barcha qism formulalarini yozing.	* $A, B, \neg A, \neg B, (A \to B), (\neg B \to \neg A), F$	$A, B, (A \to B), (\neg B \to \neg A)$	$(A \to B), (\neg B \to \neg A)$	$\neg A, \neg B, (A \to B), (\neg B \to \neg A), F$
$F \equiv (((A \vee B) \wedge \neg C) \to (A \wedge B))$ formulaning barcha qism formulalarini yozing.	* $A, B, C, \neg C, (A \vee B), (A \wedge B), ((A \vee B) \wedge \neg C), F$	$A, B, (A \vee B), (A \wedge B), F$	$A, B, C, (A \vee B), ((A \vee B) \wedge \neg C)$	$A, B, C, \neg C, ((A \vee B) \wedge \neg C), F$
Quyidagi ikki o'zgaruvchili formula o'zgaruvchilar qiymatlarining nechta tanlanmasida 1 qiymat qabul qiladi? $(A \to (B \to (A \wedge B)))$	*4	2	3	1
Quyidagi ikki o'zgaruvchili formula o'zgaruvchilar qiymatlarining nechta tanlanmasida 1 qiymat qabul qiladi? ($(((A \vee \neg B) \to B) \wedge (\neg A \vee B))$	*2	1	3	4
$(\neg((A \to \neg B) \vee C) \wedge B)$ uch o'zgaruvchili qiymatlarining nechta tanlanmasida 1 qiymat qabul qiladi?	*1	3	6	8
Quyidagi ikki o'zgaruvchili formula o'zgaruvchilar qiymatlarining nechta tanlamasida 0 qiymat qabul qiladi? $(P \to (Q \to (P \wedge Q)))$	*0	2	4	1
$(((P \vee \neg Q) \wedge R) \to (P \wedge Q))$ uch o'zgaruvchili formula o'zgaruvchilar qiymatlarining nechta tanlamasida 0 qiymat qabul qiladi?	*2	3	8	5
Quyidagi ikki o'zgaruvchili formulalarning qaysi biri keltirilgan formula?	* $(A \vee B)$	$(A \to B)$	$\neg(A \vee B)$	$\neg(A \wedge B)$
Quyidagi ikki o'zgaruvchili formulalarning qaysi biri keltirilgan	* $(A \vee \neg B) \wedge \neg C$	$(A \to \neg B)$	$\neg(A \wedge B) \to C$	$\neg(A \wedge \neg B)$

Qaysi Bul funksiyalar sistemasi to'lik?	*$\{+, \cdot, 1, \to\}$	$\{\cdot, \to\}$	$\{+\}$	$\{\leftrightarrow\}$
Nol va birni saqlovchi uch o'zgaruvchili funksiyalar soni qancha?	*64	16	128	256
O'ziga o'zi qo'shma uch o'zgaruvchili funksiyalar soni qancha?	*16	64	36	12
Uch o'zgaruvchili Bul funksiyalar soni qancha?	*256	8	32	16
Nolni saqlovchi uch o'zgaruvchili funksiyalar soni qancha?	*128	32	64	256
$((\neg A \vee B) \wedge C)$ formula propozitsional o'zgaruvchilar tanlanmalarining nechtasida rost qiymat qabul qiladi.	*3 ta	5 ta	6 ta	4 ta
$\neg((A \wedge B) \to \neg A)$ formulani mukammal dizyunktiv normal formaga keltiring.	*$(A \wedge B)$	$(\neg A \wedge B)$	$((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B))$	$((\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$
$(((A \to B) \to A) \to (A \to (B \wedge A)))$ formulaning mukammal dizyunktiv normal formaga keltiring.	*$((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B))$	$((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B))$	$((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$	$(\neg A \wedge B)$
$((C \to A) \to (\neg(B \vee C) \to A))$ formulani mukammal konyunktiv normal formaga keltiring.	*$(A \vee B \vee C)$	$(\neg A \vee B \vee C)$	$(A \vee B \vee \neg C)$	$(\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$
$\neg((A \wedge B) \to (A \vee B))$ formulani mukammal dizyunktiv normal formaga keltiring.	*$((A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$	$(A \vee B)$	$(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$	$(A \vee B) \vee (A \wedge \neg B)$

Quyidagi teng kuchliliklarning qaysi biri noto‘g‘ri?	* $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee C;$	$A \vee B \equiv B \vee A;$	$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C;$	$\neg\neg A \equiv A;$
Quyidagi tengkuchliliklarning qaysi biri noto‘g‘ri?	* $\neg(A \leftrightarrow B) \equiv \neg A \vee \neg B$	$A \vee (A \wedge B) \equiv A$	$A \vee \neg A \equiv 1$	$A \vee B \equiv B \vee A;$
Quyidagi tengkuchliliklarning qaysi biri noto‘g‘ri?	* $(A \rightarrow B) \equiv (B \rightarrow A)$	$A \wedge (A \vee B) \equiv A;$	$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$	$A \vee (A \wedge B) \equiv A$
Quyidagi tengkuchliliklarning qaysi biri noto‘g‘ri?	* $A \wedge \neg A \equiv 1$	$A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$	$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$	$A \vee (A \wedge B) \equiv A$
Quyidagi belgilar ketma-ketliklarining qaysi biri formula bo‘ladi?	* $((C \leftrightarrow B) \wedge \neg B)$	$(A \rightarrow C)\neg \vee C$	$\neg(A \vee B) \rightarrow \neg B\ )$	$(\neg B \rightarrow \vee A)$
Quyidagi ikki o‘zgaruvchili formula o‘zgaruvchilar qiymatlarining nechta tanlanmasida 1 qiymat qabul qiladi? $(\neg B \vee (C \rightarrow (B \wedge C)))$	*4	2	3	1
$(\neg((B \rightarrow \neg C) \vee A) \wedge C)$ uch o‘zgaruvchili qiymatlarining nechta tanlanmasida 1 qiymat qabul qiladi?	*1	3	6	8
$((A \leftrightarrow B) \wedge C)$ uch o‘zgaruvchili formula o‘zgaruvchilar qiymatlarining nechta tanlamasida 0 qiymat qabul qiladi?	*2	4	6	5
Quyidagi ikki o‘zgaruvchili formulalarning qaysi biri keltirilgan formula?	* $(A \vee \neg B)$	$\neg(A \rightarrow B)$	$\neg(A \vee B)$	$\neg(A \wedge B)$
Quyidagi uch o‘zgaruvchili formulalarning qaysi biri keltirilgan formula?	* $((A \wedge \neg B) \vee C)$	$(\neg A \wedge \neg(B \vee C))$	$((A \rightarrow B) \vee C)$	$(\neg(A \vee B) \vee C)$
Quyidagi formulalarning qaysi biri DNF bo‘ladi?	* $(P \vee \neg Q)$	$(Q \rightarrow \neg P)$	$(P \rightarrow Q)$	$((P \vee Q) \wedge R)$
Quyidagi ikki o‘zgaruvchili formulalarning qaysi biri KNF bo‘ladi?	* $((P \vee \neg Q) \wedge R)$	$(Q \rightarrow \neg P)$	$\neg(P \wedge R)$	$((P \vee Q) \wedge \neg(R \vee P))$

Quyidagi ikki o'zgaruvchili formulaning MDNFida nechta xad bor? $A\to(B\to A)$	*4	1	3	2
Quyidagi ketma-ketliklardan qaysi biri formula bo'ladi.	* $((P\wedge R)\vee Q)$	$R\vee P(Q\wedge S)$	$(P\neg Q)\to R$	$(P\wedge\to Q)\vee R$
$(((P\to\neg R)\to R)\wedge(\neg P\vee R))$ formula propozitsional o'zgaruvchilar tanlanmalarining nechtasida rost qiymat qabul qiladi.	*2 ta	0 ta	1 ta	3 ta
$(F\to G)\leftrightarrow(\neg G\to\neg F)$ formula propozitsional o'zgaruvchilar tanlanmalarining nechtasida rost qiymat qabul qiladi.	*4 ta	2 ta	1 ta	3 ta
$(((F\vee\neg G)\wedge H)\to(F\wedge H))$ formula propozitsional o'zgaruvchilar tanlanmalarining nechtasida rost qiymat qabul qiladi.	*7 ta	5 ta	3 ta	8 ta
$((\neg F\vee G)\wedge H)$ formula propozitsional o'zgaruvchilar tanlanmalarining nechtasida rost qiymat qabul qiladi.	*3 ta	5 ta	6 ta	4 ta
$\neg(\neg(F\wedge G)\vee\neg F)$ formulani mukammal dizyunktiv normal formaga keltiring.	* $(F\wedge G)$	$(\neg F\wedge G)$	$((F\wedge G)\vee(\neg F\wedge G))$	$((\neg F\wedge G)\vee(\neg F\wedge\neg G))$
Quyidagi tengkuchliliklarning qaysi biri noto'g'ri?	* $\neg(F\vee G)\equiv\neg F\vee\neg G$	$F\vee(F\wedge G)\equiv F$	$G\vee\neg G\equiv 1$	$F\vee G\equiv G\vee F;$
Agar $A=\{1,2,3,\}$, $B=\{3,4,5,8,\}$ bo'lsa, $A\cup B$ to'plam qanday elementlardan iborat?	* $\{1,2,3,5,8,\}$	$\{3\}$	$\{3,2\}$	$\{1,2,8\}$
Agar $A=\{2,3,5,6,7\}$, $B=\{5,6,7,8,9\}$	* $\{5,6,7\}$	$\{8,9\}$	$\{2,3,5,6,7,8,9\}$	$\{2,3,6\}$

bo'lsa, $A \cap B$ to'plam qanday elementlardan iborat?				
Agar $A=\{1,2,3,5,6,8\}$, $B=\{3,5,7,8,9\}$ bo'lsa, $A \setminus B$ to'plam qanday elementlardan iborat?	* $\{1,2,6\}$	$\{7,9\}$	$\{3,5,6,8\}$	$\{1,2,6,8,9\}$
Agar $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{4,5,6,7,8,9\}$ bo'lsa, $A \triangle B$ (simmetrik ayirma) to'plam qanday elementlardan iborat?	* $\{1,2,3,6,7,8,9\}$	$\{6,7,8\}$	$\{7,9\}$	$\{1,2,3,8,9\}$
1,5,6,7,8 raqamlardan nechta uch xonali sonlarni hosil qilish mumkin?	125	60	150	90
Nechta usulda kitobxon 6 ta kitobdan 2 tasini tanlashi mumkin?	15	10	12	17
Agar P(A)=0,4; P(B)=0,7 va P(AB)=0,5 bo'lsa, u holda P(A+B)=?	0,6	0,8	0,7	0,2
Idishda 10 ta bir xil sharlar bo`lib ulardan 6 tasi oq, qolganlari qora rangda. Tavakkaliga ikkita shar olinganda ularni oq rangli bo`lish ehtimoli topilsin	1/3	1/45	2/3	1/10
Guruhda 12 ta talaba bo'lib, ularning 7 tasi a'lochilar. 5 ta talaba dekanatga chaqirildi. Ularning barchasi a'lochilar	$\frac{7}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{45}{91}$	$\frac{5}{24}$

bo‘lishi ehtimolini toping				
Javonda 10 ta biologiyaga va 4 ta matematikaga oid kitob bor. Tasodifan tanlangan 3 ta kitobdan 2 tasi biolgiya va 1 tasi matematikaga oid bo‘lgan nechta o‘ram hosil qilish mumkin	180	90	200	210
Yashikda 8 ta detalbo‘lib, ularorasida4 ta bo‘yalgan. Tavakkaliga 4 ta detal olindi. Olingan detallarning xammasi bo‘yalgan bo‘lish ehtimolini toping.	$\frac{1}{70}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{5}{91}$
1,2,3,4,5,6 raqamlarini faqat bir marta ishtirok ettirib nechta 4 xonali son hosil qilish mumkin	360	240	120	60
Chigitning unib chiqishi extimolligi 0.5 ga teng bo‘lsa, ekilgan 6 ta chigitdan 4 tasi unib chiqishi extimolini toping	$\frac{3}{73}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{5}{91}$
Idishda 10 ta bir xil sharlar bo‘lib ulardan 6 tasi oq, qolganlari qora rangda. Tavakkaliga ikkita shar olinganda ularni, bittasi qora rangli bo‘lish extimoli topilsin	$\frac{7}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{45}{91}$	$\frac{5}{24}$

Glossariy

Birlashma - A va B to'plamlarning barcha elementlaridan tashkil topgan to'plamga aytiladi va $A \cup B$ kabi belgilanadi.	**The union** of the sets A and B, denoted by A ∪ B, is the set that contains those elements that are either in A or in B, or in both.	**Объединением** множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B. Объединение множеств A и B обозначается A∪ B.
Kesishma - A va B to'plamlarning umumiy elementlaridan tashkil topgan to'plamga aytiladi.	The **intersection** of the sets A and B, denoted by A ∩ B, is the set containing those elements in both A and B.	**Пересечением** множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат и A, и B.
Ayirma - A to'plamning B to'plamga tegishli bo'lmagan barcha elementlaridan tashkil topgan to'plamga aytiladi.	The **difference** of A and B, denoted by A−B, is the set containing those elements that are in A but not in B.	**Разностью** множеств A-B называется множество всех тех и только тех элементов A, которые не содержатся в B.
To'ldiruvchi to'plam - U universal to`plam bo`lsin.	Let U be the universal set. The complement of the set A, denoted by A, is the complement	Дополнение множества A, *обозначаемое* $\overline{A}$ — *это*

$U \setminus A$ to'plam A to'plamni U to'plamgacha to'ldiruvchi to'plam deyiladi va $\overline{A}$ kabi yoziladi.	of A with respect to U. Therefore, the complement of the set A is U − A.	множество элементов универсума, которые не принадлежат А.
Dekart ko'paytma - barcha (a,b) ko'rinishdagi juftliklardan tashkil topgan $\{(a,b): a \in A, b \in B\}$ to'plamga aytiladi va $A \times B$ kabi belgilanadi.	The **Cartesian product** of the sets $A_1, A_2, \ldots, A_n$, denoted by $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, is the set of ordered n-tuples $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, where ai belongs to A_i for i = 1, 2,...,n.	**Декартово произведение** множеств А и В, обозначаемое АхВ, есть множество {(a,b) : a ∈ A и b ∈ B}.
Binar munosabat - A va B to'plamlar elementlari orasida o'rnatilgan munosabat bo'lib juftliklar iborat to'plamdir.	Given a **binary relation** R on a set X, the domain of R is defined to be the set of all y such that ⟨y, z⟩∈R for some z; the range of R is the set of all z such that ⟨y, z⟩ ∈R for some y; and the field of R is the union of the domain and range of R.	Операция, заданная на некотором множестве, называется **бинарной,** если она действует на два элемента этого множества и ее результатом является элемент этого же множества.
Refleksiv munosabat - A to'plamda berilgan shunday R munosabatki, har qanday a ∈ A uchun aRa o'rinli bo'ladi.	A binary relation R is said to be **reflexive** if xRx for all x in the field of R;	Отношение R на А х А называется рефлексивным, если(a,a) принадлежит R для всех a∈A.
Simmetriklik munosabati - aRb munosabatning bajarilishidan bRa munosabatning ham bajarilishi kelib chiqadigan barcha juftliklar to'plamidir.	A binary relation R is said to be **symmetric** if xRy implies yRx.	**Отношение** R **симметрично**, если для всех а и b, принадлежащих А, из (a, b)∈R следует, что (b, a)∈R.
Ekvivalentlik munosabati - A to'plamda aniqlangan hamda bir vaqtda refleksiv, simmetrik va tranzitiv bo'lgan R munosabatga aytiladi.	A binary relation that is reflexive, symmetric, and transitive is called an **equivalence relation**	Отношение R на А есть **отношение эквивалентности**, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.
Fikr - chinligi yoki yolg'onligini bir qiymatli aniqlash mumkin bo'lgan har qanday tasdiqlovchi darak gapdir.	A **proposition** is a declarative sentence (that is, a sentence that declares a fact) that is either true or false, but not both.	**Высказывание**-это утверждение или повествовательное предложение, о котором можно сказать, что оно истинно или ложно.
Inkor amali - o'zi chin bo'lganda yolg'on, yolg'on bo'lganda esa chin bo'ladigan fikrga aytiladi va fikrning inkori deyiladi. U o'zbek tilidagi « emas» bog'lovchisiga mos keladi.	Let **A** be a proposition. The negation of **A**, denoted by ¬**A** (also denoted by **A**), is the statement	Истинностное значение ¬**A** всегда противоположно истинностному значению **A**.
Kon'yunksiya - A va B	The **conjunction** of A and B,	**Конъюнкцией** двух

fikrlar bir vaqtda chin bo'lgandagina chin bo'ladigan fikrni bildiruvchi fikr bo'lib, uni mantiqiy ko'paytma ham deyiladi. U o'zbek tilidagi « va» bog'lovchisiga mos keladi.	denoted by A ∧ B, is the proposition "A and B." The conjunction A ∧ B is true when both A and B are true and is false otherwise.	высказываний А, В называется новое высказывание, которое считается истинным, если оба высказывания А, В истинны, и ложным во всех остальных случаях.
Diz'yunksiya - A va B fikrlarning kamida bittasi chin bo'lgandagina chin bo'ladigan fikrni bildiruvchi fikr bo'lib, uni mantiqiy yig'indi ham deyiladi. U o'zbek tilidagi « yoki» bog'lovchisiga mos keladi.	The **disjunction** of A and B, denoted by A∨B, is the proposition "A or B." The disjunction A ∨ B is false when both A and B are false and is true otherwise.	**Дизъюнкцией** двух высказываний А, В называется новое высказывание, которое считается ложным, если оба высказывания А, В ложны, и истинным во всех остальных случаях. Дизъюнкция высказываний А, В обозначается А∨В (и читается «А или В».
Implikasiya - A fikr chin, B fikr yolg'on bo'lgandagina yolg'on bo'lib, qolgan barcha hollarda chin bo'ladigan fikr A va B larning implikativ bog'lanishidan sodir bo'lgan fikrdir. U o'zbek tilidagi « agar ... bo'lsa, u xolda ... bo'ladi» bog'lovchisiga mos keladi.	The conditional statement A→B is the proposition "if A, then B." The conditional statement A→B is false when A is true and B is false, and true otherwise. In the conditional statement A→B, A is called the hypothesis (or antecedent or premise) and B is called the conclusion (or consequence).	Импликацией двух высказываний А, В называется новое высказывание, которое считается ложным, если высказывание А истинно, а В ложно, и истинным во всех остальных случаях. Импликация высказываний А, В обозначается А→В и читается «если А, то В». Высказывание А называют посылкой (условием), а В – заключением (следствием).
A va B mulohazalarning **ekvivalensiyasi** – bu bir vaqtda chin yoki bir vaqtda yolg`on bo`lganda rost, boshqa holatlarda yolg`on bo`ladigan mulohaza. A va B mulohazalarning ekvivalensiyasi A↔B kabi belgilanadi.	The **biconditional statement** A↔B is the proposition "A if and only if B." The biconditional statement A↔B is true when A and B have the same truth values, and is false otherwise. Biconditional statements are also called biimplications	**Эквиваленцией** двух высказываний А, В называется новое высказывание, которое считается истинным, когда оба высказывания А, В одновременно истинны или одновременно ложны, и ложным во всех остальных случаях. Эквивалентность высказываний А, В обозначается (А↔В) и читается обычно «А тогда и только тогда, когда В, в некоторых случаях «А в том и только том случае, когда В», «для того, что-бы А необходимо и достаточно В».
DNF- formulaning dizyunktiv normal formalasi.	disjunctive normal formulas.(dnf)	дизъюнктивно нормальная формула
KNF - formulaning konyunktiv normal formalasi.	conjunctive normal form.(cnf)	конъюнктно нормальноая формула
MDNF - formulaning mukammal dizyunktiv normal formalasi.	well-formed disjunctive normal formulas.	Совершенно дизъюнктивно нормальная формула

MKNF - formulaning mukammal konyunktiv normal formalasi.	well-formed conjunctive normal formulas.	Совершенно конъюнктно нормальная формула
Bul funksiyasi - E^n to'plamni E to'plamga akslantiruvchi funksiya.	Boolean Functions .	Функция Була
Superpozitsiya - $\mathcal{B}$ to'plamdan $f(x_1, x_2,...,x_n)$ funksiyani hosil qilish jarayonini superpozitsiya amali deyiladi.	Superposition functions	Суперпозиция функции
Ekvivalent formulalar - bir xil rostlik jadvaliga ega bo'lgan formulalar	equivalent formulas	Эквивалентный формулы
Duallik printsipi - berilgan funksiyaga dual bo'lgan funksiyani aniqlash usuli	duality principle	принцип двойственности
Yopiq to'plam - yopilmasi o'ziga teng bo'lgan Bul funksiyalari to'plami.	Closed set	Замкнутый множество
Aksiomatik nazariya - L nazariyaning aksiomalari deb ataluvchi formulalar to'plami ajratilgan bo'lib, L nazariyaning berilgan formulasi aksioma bo'lish yoki bo'lmasligini effektiv aniqlash mumkin bo'lsa.	Axiomatic theory	Аксиоматическая теория