Издательство
"УРСС"

И.И.Ляшко
А.К.Боярчук
Я.Г.Гай
Г.П.Головач

Справочное пособие по высшей математике

2

Математический анализ:

ряды, функции
векторного аргумента

Москва
1998

ISBN 5-88417-017-3

И.И.Ляшко, А.К.Боярчук, Я.Г.Гай, Г.П.Головач.

Справочное пособие по высшей математике.

Том 2. Математический анализ: ряды, функции векторного аргумента

"Справочное пособие по высшей математике" выходит в пяти томах и представляет собой новое, исправленное и существенно дополненное издание "Справочного пособия по математическому анализу" тех же авторов. В новом издании пособие охватывает три крупных раздела курса высшей математики — математический анализ, теорию дифференциальных уравнений, теорию функций комплексной переменной.

По содержанию второй том нового издания соответствует первой половине второго тома "Справочного пособия по математическому анализу" и включает в себя теорию рядов и дифференциальное исчисление функций векторного аргумента.

Пособие предназначено для инженерно-технических работников, специалистов по прикладной математике, преподавателей вузов, студентов, а также лиц, самостоятельно изучающих высшую математику.

Группа подготовки издания:

Научный редактор	*Доминго Марин Рикой*
Технические редакторы	*Наталья Финогенова, Марина Копылова*
Набор	*Ирина Макеева, Светлана Бондаренко*
Макет	*Виктор Романов, Василий Подобед*
Корректура	*Леонид Иосилевич, Лариса Кирдяшкина, Игорь Коровин, Елена Кудряшова*

Лицензия ЛР № 063377 от 23.05.94. Подписано к печати 13.11.95.
Формат 70×100 1/16. Бумага офсет № 1. Гарнитура обыкновенная.
Усл. печ. л. 14,0. Доп. тираж 3000 экз. Заказ № 30.
Издательство "УРСС". 111672, г. Москва, ул. Новокасинская, 27/74.
Отпечатано в АООТ "Политех-4" 129110, Москва, ул. Б. Переяславская, 46.

Оглавление

Глава 1. Ряды **3**
§1. Числовые ряды. Признаки сходимости знакопостоянных рядов 3
§2. Признаки сходимости знакопеременных рядов 25
§3. Действия над рядами 38
§4. Функциональные последовательности и ряды. Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов 40
§5. Степенные ряды 58
§6. Ряды Фурье 79
§7. Суммирование рядов. Вычисление определенных интегралов с помощью рядов 96

Глава 2. Дифференциальное исчисление функций векторного аргумента **113**
§1. Предел функции. Непрерывность 113
§2. Частные производные и дифференциалы функции векторного аргумента . . 124
§3. Неявные функции 147
§4. Замена переменных 167
§5. Формула Тейлора 186
§6. Экстремум функции векторного аргумента 196

Ответы **220**

Глава 1

Ряды

§ 1. Числовые ряды. Признаки сходимости знакопостоянных рядов

1.1. Общие понятия и определения.

Определение 1. *Пусть a_n — произвольные элементы линейного пространства $\mathcal{L}$, в котором определена сходимость, $n \in \mathbb{N}$. Рядом элементов a_n называют выражение*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1}$$

а элементы a_n — его членами. В частности, если $a_n \in \mathbb{R}$ или $a_n \in \mathbb{C}$, то ряд (1) называют числовым.

Определение 2. *Сумма n первых членов ряда (1) называется частичной суммой и часто обозначается через S_n, т.е.*

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Определение 3. *Если существует конечный предел*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \quad S \in \mathcal{L},$$

то ряд (1) сходится в $\mathcal{L}$, а элемент S называют суммой ряда. Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ *или не существует, то ряд (1) называют расходящимся.*

Определение 4. *Ряд*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k, \quad a_k \in \mathcal{L}, \tag{2}$$

называется n-м остатком ряда (1) или остатком после n-го члена.

Ряд (1) сходится или расходится вместе со своим остатком, поэтому часто при исследовании вопроса о сходимости ряда вместо него рассматривают n-й остаток.

Определение 5. *Пусть $a_n \in \mathbb{R}$. Если $a_n \geqslant 0$, то ряд (1) называют положительным; если $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, то ряд (1) называют строго положительным.*

1.2. Необходимое условие сходимости ряда.

Для того чтобы ряд (1), п.1.1, сходился в $\mathcal{L}$, необходимо, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \theta, \quad \theta \in \mathcal{L},$$

где θ — нулевой элемент линейного пространства $\mathcal{L}$.

1.3. Критерий Коши.

Пусть $\mathcal{L}$ есть $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Для того чтобы ряд (1), п. 1.1, сходился в $\mathcal{L}$, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ такое, что $\forall n > n_0 \wedge \forall p \in \mathbb{N}$ выполнялось бы неравенство

$$|S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

1.4. Обобщенный гармонический ряд.

Определение. *Числовой ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

называется обобщенным гармоническим рядом, а при $p = 1$ — гармоническим. Он сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$.

1.5. Признаки сравнения числовых рядов.

Теорема 1. *Если ряды* (1), *п.* 1.1, *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{1}$$

положительны и $a_n \leqslant b_n$ $\forall n > n_0$, то из сходимости ряда (1) *настоящего пункта вытекает сходимость ряда* (1), *п.* 1.1, *а из расходимости ряда* (1), *п.* 1.1, *вытекает расходимость ряда* (1).

Теорема 2. *Если ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ строго положительны и $\forall n > n_0$ выполняются неравенства*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

то справедливы выводы предыдущей теоремы.

Теорема 3. *Если ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ строго положительны и*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c, \quad 0 < c < +\infty,$$

то они сходятся или расходятся одновременно.

Теорема 4. *Если при $n \to \infty$*

$$a_n = O^*\left(\frac{1}{n^p}\right),$$

то при $p > 1$ ряд (1), *п.* 1.1, *сходится, а при $p \leqslant 1$ расходится.*

1.6. Признаки д'Аламбера и Коши.

Если ряд (1), п.1.1, строго положителен и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L,$$

то при $L < 1$ этот ряд сходится, а при $L > 1$ расходится. При $L = +\infty$ ряд (1), п.1.1, также расходится, а если $L = 1$, то вопрос о сходимости ряда остается открытым (*признак д'Аламбера в предельной форме*).

Если ряд (1), п.1.1, положителен и

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L,$$

то относительно сходимости ряда (1), п.1.1, делаем те же выводы, что и в признаке д'Аламбера (*признак Коши в простейшей предельной форме*).

1.7. Признак Раабе.

Если ряд (1), п.1.1, строго положителен и

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = p,$$

то при $p > 1$ он сходится, а при $p < 1$ расходится. При $p = +\infty$ ряд (1), п, 1.1, сходится, а если $p = 1$, то для выяснения вопроса о его сходимости или расходимости следует применять другие признаки.

1.8. Признак Гаусса.

Если ряд (1), п.1.1, строго положителен и

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}, \quad \lambda,\ \mu = \text{const},$$

где $\varepsilon > 0$, $|\theta_n| < c$, то при $\lambda > 1$ ряд (1), п.1.1, сходится, а при $\lambda < 1$ расходится. Если же $\lambda = 1$, то ряд сходится при $\mu > 1$ и расходится при $\mu \leqslant 1$.

1.9. Интегральный признак Коши—Маклорена.

Если функция f неотрицательна при $x > 0$ и не возрастает, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом

$$\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Доказать непосредственно сходимость следующих рядов и найти их суммы:

1. $\dfrac{1}{1\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \ldots$.

◀ Покажем, что сходится последовательность частичных сумм (S_n) этого ряда:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

Для этого с помощью очевидных преобразований приведем S_n к виду

$$S_n = \frac{1}{3}\left(\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right).$$

Легко видеть, что последовательность (S_n) сходится, т.е. сходится, по определению, данный числовой ряд. Сумма его

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}. \ ▶$$

2. а) $q\sin\alpha + q^2\sin 2\alpha + \ldots + q^n \sin n\alpha + \ldots$;
б) $q\cos\alpha + q^2\cos 2\alpha + \ldots + q^n\cos n\alpha + \ldots$; $|q| < 1$.

◀ Пусть (u_n) и (v_n) — последовательности частичных сумм рядов б) и а) соответственно, u и v — их суммы. Тогда, использовав формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, можем написать

$$u_n + iv_n = qe^{i\alpha} + q^2e^{2i\alpha} + \ldots + q^ne^{in\alpha} = \frac{qe^{i\alpha} - q^{n+1}e^{i(n+1)\alpha}}{1 - qe^{i\alpha}}.$$

Принимая во внимание условие $|q| < 1$, имеем $|qe^{i\alpha}| < 1$; отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(q^{n+1}e^{i(n+1)\alpha}\right) = 0.$$

А тогда из предыдущей формулы находим

$$u + iv = \lim_{n\to\infty}(u_n + iv_n) = \frac{qe^{i\alpha}}{1 - qe^{i\alpha}} = q\left(\frac{\cos\alpha - q}{1 - 2q\cos\alpha + q^2} + i\frac{\sin\alpha}{1 - 2q\cos\alpha + q^2}\right).$$

Поэтому

$$u = q\frac{\cos\alpha - q}{1 - 2q\cos\alpha + q^2}, \quad v = \frac{q\sin\alpha}{1 - 2q\cos\alpha + q^2}. \ ▶$$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)$.

◀ Непосредственно находим

$$S_n = (\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1) + (\sqrt{4} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2}) + (\sqrt{5} - 2\sqrt{4} + \sqrt{3}) + \ldots + (\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} + \sqrt{n-2}) + (\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) + (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}.$$

Следовательно,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = 1 - \sqrt{2}. \ ▶$$

4. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx$.

◀ Пусть $x \neq k\pi$ (k — целое) и ряд сходится. Тогда должно выполняться необходимое условие сходимости ряда:

$$\lim_{n\to\infty} \sin nx = 0, \quad x \neq k\pi. \tag{1}$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n+1)x = 0$, или $\lim\limits_{n\to\infty} (\sin nx \cos x + \cos nx \sin x) = 0$. Принимая во внимание (1), из последнего соотношения находим, что

$$\lim_{n\to\infty} \cos nx = 0, \quad x \neq k\pi. \tag{2}$$

Из (1) и (2) получаем равенство

$$\lim_{n\to\infty} (\cos^2 nx + \sin^2 nx) = 0,$$

которое противоречит известной формуле $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Источник противоречия – формула (1). Следовательно, если $x \neq k\pi$, то данный ряд расходится. Сходимость же ряда при $x = k\pi$ (k — целое) очевидна, и сумма такого ряда равна нулю. ▶

5. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A_n = \sum\limits_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i$, $p_1 = 1$, $p_1 < p_2 < \ldots$, полученный в результате группировки членов данного ряда без нарушения порядка следования их, также сходится и имеет ту же сумму.

◀ Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ вытекает существование предела любой подпоследовательности последовательности его частичных сумм, равного сумме ряда S. Возьмем эту подпоследовательность в виде

$$a_1 = S_{p_1}, \quad a_1 + a_2 + \ldots + a_{p_2-1} = S_{p_2},$$
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{p_2-1} + a_{p_2} + \ldots + a_{p_3-1} = S_{p_3}, \ \ldots, \ a_1 + a_2 + \ldots + a_{p_{n+1}-1} = S_{p_{n+1}}.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_{p_n} = S$ по условию. Но так как последовательность частичных сумм второго ряда $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ равна $S_{p_{n+1}}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} (A_1 + A_2 + \ldots + A_n)$ также равен S, что и требовалось доказать.

Обратное утверждение неверно, так как из сходимости подпоследовательности еще не вытекает сходимость самой последовательности. Возьмем пример. Пусть $a_n = (-1)^{n+1}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$, очевидно, расходится, хотя, например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-1)$, получаемый из предыдущего в результате группировки его членов по два, сходится. ▶

6. Доказать, что если члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ положительны и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, полученный в результате группировки членов этого ряда, сходится, то данный ряд также сходится.

◀ Пусть (p_k) — произвольная подпоследовательность натуральных чисел: (S_n) и (S_{p_k}) — частичные суммы первого и второго рядов соответственно. Тогда, в силу положительности членов a_n, будем иметь неравенства

$$
\begin{gathered}
S_1 \leqslant S_n \leqslant S_{p_1} \quad \text{для всех } n,\ 1 \leqslant n \leqslant p_1, \\
S_{p_1} \leqslant S_n \leqslant S_{p_2} \quad \text{для всех } n,\ p_1 \leqslant n \leqslant p_2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
S_{p_k} \leqslant S_n \leqslant S_{p_{k+1}} \quad \text{для всех } n,\ p_k \leqslant n \leqslant p_{k+1}.
\end{gathered}
$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве, когда $k \to \infty$, и учитывая, что второй ряд сходится, получаем

$$\lim_{k\to\infty} S_{p_k} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{k\to\infty} S_{p_{k+1}} = S. \ ▶$$

Исследовать сходимость рядов:

7. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \ldots$.

◀ Очевидно, последовательность частичных сумм данного ряда возрастает. Покажем, что она неограничена. С этой целью рассмотрим ее подпоследовательность (S_{2^n}), $n \in \mathbb{N}$:

$$S_{2^1} = S_2 = 1 + \frac{1}{3}, \quad S_{2^2} = S_4 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}, \ \ldots, S_{2^n} = 1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}-1}.$$

В силу оценок

$$1 + \frac{1}{3} > 1, \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{7} > \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} > \frac{4}{16} = \frac{1}{4}, \ldots$$
$$\ldots, \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+3} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}-1} > \frac{2^{n-1}}{2^{n+1}} = \frac{1}{4},$$

имеем неравенство

$$S_{2^n} = \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}\right) + \ldots +$$
$$+ \left(\frac{1}{2^n+1} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}-1}\right) > 1 + \frac{n-1}{4}.$$

Отсюда следует, что подпоследовательность (S_{2^n}) неограничена, а значит, неограничена и последовательность (S_n). Таким образом, данный ряд расходится. ▶

8. $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}} + \ldots$.

◀ Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}}\right) + \left(\frac{1}{4\sqrt{5}} + \frac{1}{5\sqrt{6}} + \frac{1}{6\sqrt{7}} + \frac{1}{7\sqrt{8}}\right) + \left(\frac{1}{8\sqrt{9}} + \ldots + \frac{1}{15\sqrt{16}}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \left(\frac{1}{2^n\sqrt{2^n+1}} + \ldots + \frac{1}{(2^{n+1}-1)\sqrt{2^{n+1}}}\right) + \ldots, \qquad (1)$$

полученный в результате группировки членов данного ряда. Замечаем, что

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} < \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} < \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\
\frac{1}{4\sqrt{5}} + \ldots + \frac{1}{7\sqrt{8}} < \frac{1}{4\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{7\sqrt{7}} < \frac{4}{(2\sqrt{2})^2} = \frac{1}{(\sqrt{2})^2}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\frac{1}{2^n\sqrt{2^n+1}} + \ldots + \frac{1}{(2^{n+1}-1)\sqrt{2^{n+1}}} < \frac{1}{(2^n)^{\frac{3}{2}}} + \ldots + \frac{1}{(2^{n+1}-1)^{\frac{3}{2}}} < \frac{1}{(\sqrt{2})^n}.
\end{gathered}
$$

Поэтому для последовательности частичных сумм ряда (1) имеем оценку

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{(2^{n+1}-1)\sqrt{2^{n+1}}} < \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{(\sqrt{2})^2} + \ldots + \frac{1}{(\sqrt{2})^n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}-1}.$$

Отсюда, учитывая очевидную монотонность S_n, заключаем, что ряд (1) сходится. А тогда, на основании примера 6, сходится данный ряд. ►

9. $\dfrac{1}{\sqrt{1\cdot 3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3\cdot 5}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}+\ldots$.

◄ В силу оценки

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{1\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}>\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}>$$

$$>\frac{1}{2}\left(\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ldots+\ln\frac{n+1}{n}\right)=\frac{1}{2}\ln(n+1),$$

данный ряд расходится. ►

10. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, $a_n\geqslant 0$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ также сходится.

◄ Очевидно, последовательность частичных сумм (C_n) второго ряда монотонно не убывает. Кроме того, в силу $a_n\geqslant 0$ и сходимости первого ряда, справедливо неравенство

$$C_n=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2<(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2=S_n^2\leqslant\text{const}.$$

Поэтому, на основании теоремы о монотонной и ограниченной последовательности, существует $\lim\limits_{n\to\infty}C_n$, т.е. по определению 3, п.1.1, второй ряд сходится.

Заметим, что обратное утверждение неверно. Действительно, пусть $a_n=\frac{1}{2n-1}$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ сходится по теореме 4, п.1.5, хотя ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ расходится (см. пример 7). ►

11. Доказать, что если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ сходятся, то сходятся также ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|,\quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}.$$

◄ Используя элементарное неравенство $|a_nb_n|\leqslant\frac{1}{2}(a_n^2+b_n^2)$, а также условие примера, получаем

$$\sum_{k=1}^{n}|a_kb_k|\leqslant\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2\right)=c.$$

Отсюда следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$ сходится. А тогда и второй ряд в силу оценки

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+2\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2\leqslant 2\Big(c+\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|\Big)$$

также сходится. Сходимость третьего ряда вытекает из сходимости первого, если положить в нем $b_n=\frac{1}{n}$ и воспользоваться тем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится. ►

12. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=a\neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится.

◄ По определению предела, $\forall\varepsilon>0$, $0<\varepsilon<|a|$, $\exists n_0$ такое, что $\forall n>n_0$ и $\forall p\in\mathbb{N}$ справедливы неравенства $a-\varepsilon<(m+n)a_{m+n}<a+\varepsilon$, $m=\overline{1,p}$, или неравенства

$$\frac{a-\varepsilon}{m+n}<a_{m+n}<\frac{a+\varepsilon}{m+n}.$$

Суммируя эти неравенства по m от 1 до p, получаем

$$(a-\varepsilon)\sum_{m=1}^{p}\frac{1}{m+n} < \sum_{m=1}^{p} a_{m+n} < (a+\varepsilon)\sum_{m=1}^{p}\frac{1}{m+n}.$$

Отсюда видно, что в силу расходимости гармонического ряда $\left(\lim\limits_{p\to+\infty}\sum\limits_{m=1}^{p}\frac{1}{m+n}=+\infty\right)$, остаток рассматриваемого ряда расходится. Следовательно, расходится и сам ряд. ►

Примечание. Из условия примера 12 следует, что $a_n = \frac{a}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right) = O^*\left(\frac{1}{n}\right)$ при $n\to\infty$. Поэтому на основании теоремы 4, п.1.5, данный ряд расходится. Однако мы предпочли непосредственное доказательство.

13. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, с монотонно убывающими членами сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

◄ По критерию Коши, из сходимости ряда следует, что $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0$ такое, что $\forall n>n_0$ справедливо неравенство $a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p} < \frac{\varepsilon}{2}$. Так как (a_n) — монотонная и положительная последовательность, то из последнего неравенства вытекает, что $pa_{n+p} < \frac{\varepsilon}{2}$. Полагая, далее, последовательно $p=n$ и $p=n+1$, отсюда находим, что $2na_{2n} < \varepsilon$ и $(2n+1)a_{2n+1} < \varepsilon$ при $n>n_0$. Следовательно, $na_n<\varepsilon$ при любом (четном и нечетном) $n>2n_0$. ►

Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость следующих рядов:

14. $\dfrac{\cos x-\cos 2x}{1}+\dfrac{\cos 2x-\cos 3x}{2}+\ldots+\dfrac{\cos nx-\cos(n+1)x}{n}+\ldots$.

◄ Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Найдем число n_0 такое, что при всех $n>n_0$ и произвольном $p>0$ будет справедлива оценка $|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$, где (S_n) последовательность частичных сумм данного ряда. Имеем

$$|S_{n+p}-S_n| = \left|\frac{\cos(n+1)x-\cos(n+2)x}{n+1}+\right.$$
$$\left.+\frac{\cos(n+2)x-\cos(n+3)x}{n+2}+\ldots+\frac{\cos(n+p)x-\cos(n+p+1)x}{n+p}\right| =$$
$$=\left|\frac{\cos(n+1)x}{n+1}-\frac{\cos(n+2)x}{(n+1)(n+2)}-\frac{\cos(n+3)x}{(n+2)(n+3)}-\ldots-\frac{\cos(n+p)x}{(n+p-1)(n+p)}-\right.$$
$$\left.-\frac{\cos(n+p+1)x}{n+p}\right| \leqslant \frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}+\frac{1}{n+p}<\frac{2}{n}.$$

Отсюда следует, что $|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$, если за число n_0 взять $\frac{2}{\varepsilon}$. Поэтому, согласно критерию Коши, ряд сходится. ►

15. $\dfrac{\cos x}{1^2}+\dfrac{\cos x^2}{2^2}+\ldots+\dfrac{\cos x^n}{n^2}+\ldots$.

◄ Найдем число n_0 такое, что $\forall n>n_0$ и произвольном $p>0$ будет выполняться неравенство $|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$. Имеем

$$|S_{n+p}-S_n| = \left|\frac{\cos x^{n+1}}{(n+1)^2}+\frac{\cos x^{n+2}}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{\cos x^{n+p}}{(n+p)^2}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.$$

Следовательно, положив $n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$, по критерию Коши, получим, что данный ряд сходится. ►

Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость следующих рядов:

16. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$.

◄ Пусть $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Положим $p = n$. Тогда

$$|S_{2n} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} > \varepsilon.$$

Следовательно, по критерию Коши, данный ряд расходится. ►

17. $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$.

◄ Поскольку

$$S_{6n} - S_{3n} = \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3} + \ldots + \frac{1}{6n-2} + \frac{1}{6n-1} - \frac{1}{6n},$$

где (S_{6n}), (S_{3n}) — подпоследовательности последовательности частичных сумм данного ряда, то

$$S_{6n} - S_{3n} > \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+4} + \ldots + \frac{1}{6n-2} > \frac{n}{6n-2} > \frac{1}{6}.$$

Поэтому, согласно критерию Коши, ряд расходится. ►

18. $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \ldots$.

◄ Пусть $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Оценим разность:

$$|S_{2n} - S_n| = \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} + \frac{1}{\sqrt{(n+2)(n+3)}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}} >$$

$$> \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n+1} > \frac{1}{4}.$$

Таким образом, по критерию Коши, ряд расходится. ►

Пользуясь различными признаками, исследовать сходимость рядов:

19. $\frac{(1!)^2}{2} + \frac{(2!)^2}{2^4} + \frac{(3!)^2}{2^9} + \ldots + \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} + \ldots$.

◄ Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2 2^{n^2}}{(n!)^2 2^{(n+1)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = 0,$$

то, по признаку д'Аламбера, ряд расходится. ►

20. $\frac{4}{2} + \frac{4\cdot 7}{2\cdot 6} + \frac{4\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 6\cdot 10} + \ldots$.

◄ Замечаем, что общий член ряда a_n имеет вид

$$a_n = \frac{4\cdot 7\cdot 10\ldots(3n+1)}{2\cdot 6\cdot 10\ldots(4n-2)}.$$

Отсюда находим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+4}{4n+2} = \frac{3}{4}.$$

Таким образом, согласно признаку д'Аламбера, ряд сходится. ►

21. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если} \quad n = m^2, \\ \frac{1}{n^2}, & \text{если} \quad n \neq m^2 \end{cases} \quad (m \text{ — натуральное число}).$$

◀ Покажем, что ряд

$$\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{8^2}\right)+\ldots+$$
$$+\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n^2+1)^2}+\ldots+\frac{1}{((n+1)^2-1)^2}\right)+\ldots, \qquad (1)$$

полученный в результате группировки членов данного ряда, сходится. Для этого оценим сначала каждый член ряда (1). Имеем

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}<1+2\cdot\frac{1}{2^2}<2\cdot 1, \quad \frac{1}{4}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{8^2}<\frac{1}{4}+\frac{4}{5^2}<2\cdot\frac{1}{4},$$
$$\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n^2+1)^2}+\ldots+\frac{1}{((n+1)^2-1)^2}<\frac{1}{n^2}+\frac{2n}{(n^2+1)^2}<2\cdot\frac{1}{n^2}; \ldots$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, согласно п.1.4, сходится, то, в силу теоремы 1, п.1.5, сходится и ряд (1). А тогда, на основании утверждения, доказанного в примере 6, заключаем, что данный ряд также сходится. ▶

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha}$.

◀ Легко видеть, что

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha}\leqslant\frac{1}{(1+x^2)^n}. \qquad (1)$$

Предполагая, что $x\neq 0$ (при $x=0$ ряд, очевидно, сходится) и применяя к ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{(1+x^2)^n} \qquad (2)$$

признак д'Аламбера, замечаем, что ряд (2) сходится.

Используя теперь неравенство (1) и теорему 1, п.1.5, можем утверждать, что данный ряд сходится. ▶

23. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$.

◀ Нетрудно найти, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{-2\frac{n-1}{n+1}}=\frac{1}{e^2}<1$. Поэтому, согласно признаку Коши, ряд сходится. ▶

24. $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\ldots$.

◀ Замечая, что общий член ряда имеет вид

$$a_n=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}, \quad n\in\mathbb{N},$$

и полагая здесь $\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{4}$, получаем $a_n=\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{2^n}}=2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}<\frac{\pi}{2^n}$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^n}$ сходится, то по теореме 1, п 1.5, сходится и данный ряд. ▶

25. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$, $a_n>0$, то $a_n=o(q_1^n)$, где $q_1>q$.

◀ Пусть число $\varepsilon>0$ настолько мало, что выполняется неравенство $\varepsilon<q_1-q$. По определению предела, для данного ε можно найти такой номер N, начиная с которого выполняются неравенства

$$q-\varepsilon<\frac{a_{N+1}}{a_N}<q+\varepsilon, \quad q-\varepsilon<\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}<q+\varepsilon, \ldots, q-\varepsilon<\frac{a_n}{a_{n-1}}<q+\varepsilon.$$

Перемножая почленно эти неравенства, получаем

$$a_N(q-\varepsilon)^{n-N} < a_n < (q+\varepsilon)^{n-N}a_N,$$

откуда

$$0 < \frac{a_n}{q_1^n} < a_N\left(\frac{q+\varepsilon}{q_1}\right)^n (q+\varepsilon)^{-N}, \quad \frac{q+\varepsilon}{q_1} < 1.$$

Теперь видно, что увеличением числа n можно достигнуть неравенства

$$\frac{a_n}{q_1^n} < a_N(q+\varepsilon)^{-N}\left(\frac{q+\varepsilon}{q_1}\right)^n < \varepsilon,$$

показывающего, что $a_n = o(q_1^n)$. ►

26. Доказать, что если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$, $a_n > 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

◄ Выберем $\varepsilon > 0$ таким, чтобы выполнялось неравенство $\varepsilon < 1-q$. В силу существования конечного верхнего предела, для выбранного ε найдется такой номер N, начиная с которого справедливы неравенства

$$0 < \frac{a_{i+1}}{a_i} < q+\varepsilon, \quad i = \overline{N, n-1}.$$

Перемножая эти неравенства, находим

$$0 < a_n < \frac{a_N}{(q+\varepsilon)^N}(q+\varepsilon)^n.$$

Поскольку ряд $\sum (q+\varepsilon)^n$ сходится, то, в силу теоремы 1, заключаем, что ряд $\sum a_n$ также сходится.

Обратное утверждение неверно. Рассматривая, например, ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots,$$

замечаем, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty,$$

в то время как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n' = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right),$$

очевидно, сходится. Таким образом, из того, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, не следует, вообще говоря, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$. ►

27. Доказать, что если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q$, $a_n \geqslant 0$, то: а) при $q < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится; б) при $q > 1$ этот ряд расходится (обобщенный признак Коши).

◄ Пусть $q < 1$. Для фиксированного ε, удовлетворяющего условию $0 < \varepsilon < 1-q$, в силу условия примера, найдется номер N, начиная с которого выполняются неравенства

$$0 \leqslant a_{N+1} < (q+\varepsilon)^{N+1}, \ldots, \quad 0 \leqslant a_n < (q+\varepsilon)^n, \; q+\varepsilon < 1.$$

Но так как ряд $\sum (q+\varepsilon)^n$ сходится, то, по теореме 1, из последнего неравенства вытекает, что ряд $\sum a_n$ сходится.

Пусть $q > 1$. Тогда для ε, выбраниого из условия $0 < \varepsilon < q-1$, найдется номер M такой, что при всех $k > M$ члены последовательности (a_{n_k}) ($\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \to q$ при $n_k \to \infty$) будут удовлетворять неравенствам

$$a_{n_{M+1}} > (q-\varepsilon)^{n_{M+1}}, \quad a_{n_{M+2}} > (q-\varepsilon)^{n_{M+2}}, \ldots, a_{n_k} > (q-\varepsilon)^{n_k}, \quad q-\varepsilon > 1.$$

Отсюда следует, что общий член ряда к нулю не стремится, т.е. ряд $\sum a_n$ расходится. ►

Исследовать сходимость рядов:

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$.

◄ Имея в виду обобщенный признак Коши, находим

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[2k]{8k^3}(\sqrt{2}+1)}{3.} = \frac{\sqrt{2}+1}{3} < 1.$$

Следовательно, ряд сходится. ►

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$

◄ Поскольку

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2-\frac{\ln n}{n}} \leqslant \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2-\frac{\ln n}{n}} = \frac{4}{9} < 1,$$

то, по обобщенному признаку Коши, данный ряд сходится. ►

30. $\left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^p + + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^p + \ldots$.

◄ Рассмотрим отношение

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\right)^p \left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n(2n+2)}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)(2n+1)}\right)^p =$$

$$= \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^p = 1+\frac{p}{2n+1}+\frac{p(p-1)}{2(2n+1)^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n\to\infty.$$

Согласно признаку Гаусса, отсюда находим: при $p>2$ ряд сходится, а при $p\leqslant 2$ — расходится. ►

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}}$.

◄ Преобразовывая отношение $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ к виду

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!e^n(n+1)^{n+p+1}}{n^{n+p}(n+1)!e^{n+1}} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p} = \frac{1}{e}\exp\left\{(n+p)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\} =$$

$$= \exp\left\{-1+(n+p)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right\} = \exp\left\{\frac{p-0,5}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right\} =$$

$$= 1+\frac{p-0,5}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n\to\infty,$$

и используя признак Раабе, заключаем, что при $p>\frac{3}{2}$ ряд сходится. ►

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^q}$.

◄ Исключим из рассмотрения тривиальный случай, когда p — целое отрицательное или нуль, и упростим отношение

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+1}{p+n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^q = \left(1+\frac{p}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{q+1} =$$

$$= \left(1-\frac{p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\frac{q+1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1+\frac{q-p+1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n\to\infty.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = q-p+1$, то, согласно признаку Раабе, ряд сходится, если $q>p$. ►

33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}\right)^p\cdot\frac{1}{n^q}$.

◀ Составляя отношение

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^p\left(1+\frac{1}{n}\right)^q=\left(1+\frac{p}{2n+1}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\frac{q}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$
$$=1+\frac{p}{2n+1}+\frac{q}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)=1+\left(\frac{p}{2}+q\right)\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),\quad n\to\infty,$$

получаем $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\frac{p}{2}+q$ и, на основании признака Раабе, заключаем, что данный ряд сходится при $\frac{p}{2}+q>1$. ▶

34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{q(q+1)\ldots(q+n-1)}\right)^\alpha$, $p>0,\ q>0$.

◀ Приводя отношение $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ к виду

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(\frac{q+n}{p+n}\right)^\alpha=\left(1+\frac{q-p}{p+n}\right)^\alpha=1+\frac{\alpha(q-p)}{p+n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

при $n\to\infty$ и пользуясь признаком Раабе, устанавливаем, что ряд сходится при $\alpha(q-p)>1$. ▶

35. Доказать, что если для строго положительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ выполняется условие $\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$ при $n\to\infty$, то $a_n=o\left(\frac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right)$, где $\varepsilon>0$ произвольно мало, причем, если $p>0$, то $a_n\downarrow 0$ при $n\to\infty$, т.е. a_n при $n\geqslant n_0$ монотонно убывая, стремится к нулю, когда $n\to\infty$.

◀ Начнем со случая, когда $p>0$. Фиксируя произвольное ε_0, $0<\varepsilon_0<p$, из условия существования предела $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=p$ находим

$$1+\frac{p-\varepsilon_0}{i}<\frac{a_i}{a_{i+1}}<1+\frac{p+\varepsilon_0}{i},\quad i=\overline{N,n-1},$$

где N — достаточно большой фиксированный номер. Из написанных неравенств следует, что

$$\left(1+\frac{p-\varepsilon_0}{N}\right)\left(1+\frac{p-\varepsilon_0}{N+1}\right)\ldots\left(1+\frac{p-\varepsilon_0}{n-1}\right)<\frac{a_N}{a_n}<\left(1+\frac{p+\varepsilon_0}{N}\right)\left(1+\frac{p+\varepsilon_0}{N+1}\right)\ldots\left(1+\frac{p+\varepsilon_0}{n-1}\right).$$

Отсюда, учитывая, что $a_n>0$, а также пользуясь неравенством Бернулли, получаем

$$0<a_n<\frac{a_N}{\left(1+\frac{p-\varepsilon_0}{N}\right)\left(1+\frac{p-\varepsilon_0}{N+1}\right)\ldots\left(1+\frac{p-\varepsilon_0}{n-1}\right)}<\frac{a_N}{1+(p-\varepsilon_0)\left(\frac{1}{N}+\frac{1}{N+1}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)}.\quad (A)$$

Поскольку $p-\varepsilon_0>0$, а $\frac{1}{N}+\frac{1}{N+1}+\ldots+\frac{1}{n-1}\to\infty$ при $n\to\infty$, то из неравенства (A) вытекает, что $a_n\to 0$. Принимая во внимание еще, что при $p>0$ последовательность (a_n) монотонна (это видно из того, что при $n\geqslant n_0$, где n_0 — достаточно большое число, $\frac{p}{n}>o\left(\frac{1}{n}\right)$, следовательно, $\frac{a_n}{a_{n+1}}>1$), убеждаемся в справедливости второй части утверждения.

Для доказательства первой части утверждения (p — любое, а $\varepsilon>0$) покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}(n^{p-\varepsilon}a_n)=0$.

Вводя обозначение $\varepsilon_n=n^{p-\varepsilon}a_n$ и составляя отношение $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}}$, получаем

$$\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\varepsilon-p}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\varepsilon-p}\left(1+\frac{p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$
$$=\left(1+\frac{\varepsilon-p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\frac{p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=1+\frac{\varepsilon}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),\ n\to\infty.$$

Замечая, что это отношение имеет тот же вид, что и $\frac{a_n}{a_{n+1}}$, на основании доказанного выше, приходим к выводу, что $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. ►

Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, если:

36. $a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^p \ln \dfrac{n-1}{n+1}$, $n > 1$.

◄ Преобразовывая выражение для общего члена a_n и используя при этом разложения $(1+x)^m$, $\ln(1+x)$ по формулам Маклорена с остаточным членом в форме Пеано, имеем

$$a_n = \frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^p} \ln\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) = n^{-\frac{p}{2}}\left(2 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-p}\left(-\frac{2}{n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= n^{-\frac{p}{2}} 2^{-p}\left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(-\frac{2}{n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = O^*\left(\frac{1}{n^{1+\frac{p}{2}}}\right), \quad n \to \infty.$$

Видим, что, по теореме 4, ряд сходится при $p > 0$. ►

37. $a_n = \log_{b^n}\left(1 + \dfrac{\sqrt[n]{a}}{n}\right)$, $a > 0$, $b > 0$.

◄ Пользуясь приемом предыдущего примера, имеем

$$a_n = \frac{\ln(1 + n^{-1}\sqrt[n]{a})}{n \ln b} = \frac{1}{n \ln b}\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = O^*\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty, \quad b \neq 1.$$

Следовательно, по теореме 4, ряд сходится, если $b \neq 1$. ►

38. $a_n = \left(e - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right)^p$.

◄ Пользуясь разложениями функции $x \mapsto \ln(1+x)$ по формуле Маклорена, находим

$$a_n = \left(e - \exp\left\{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right\}\right)^p = e^p\left(1 - \exp\left\{-1 + n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right\}\right)^p =$$

$$= e^p\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^p = O^*\left(\frac{1}{n^p}\right), \quad n \to \infty.$$

Таким образом, если $p > 1$, то, согласно теореме 4, ряд сходится. ►

39. Доказать признак Жамэ: положительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если $(1 - \sqrt[n]{a_n})\dfrac{n}{\ln n} \geqslant p > 1$ при $n > n_0$, и расходится, если $(1 - \sqrt[n]{a_n})\dfrac{n}{\ln n} \leqslant 1$ при $n > n_0$.

◄ Непосредственно из первого условия находим $0 \leqslant a_n \leqslant \left(1 - \frac{p \ln n}{n}\right)^n$ (заметим, что при $n > n_0$ выполняется неравенство $1 - \frac{p \ln n}{n} > 0$), откуда

$$0 \leqslant a_n \leqslant \exp\left\{n \ln\left(1 - \frac{p \ln n}{n}\right)\right\}.$$

Используя разложения функций $x \mapsto \ln(1+x)$, e^x по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано, из последнего неравенства имеем неравенство

$$0 \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{n^p}\exp\left\{-p^2 \frac{\ln^2 n}{2n} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)\right\} = \frac{1}{n^p} - p^2\frac{\ln^2 n}{2n^{p+1}} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^{p+1}}\right), \quad n \to \infty,$$

из которого следует (на основании теоремы 4), что ряд сходится при $p > 1$.

Поступая аналогично, из второго неравенства условия примера можно найти, что

$$a_n \geqslant \frac{1}{n} - \frac{\ln^2 n}{2n^2} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right) = O^*\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty.$$

Последнее неравенство означает, что ряд расходится. ►

40. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, сходится, если существует $\alpha > 0$ такое, что $\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} \geqslant 1+\alpha$ при $n \geqslant n_0$, и расходится, если $\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} \leqslant 1$ при $n \geqslant n_0$ (логарифмический признак).

◀ Из условий примера легко получаем неравенства $0 < a_n \leqslant \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ при $n \geqslant n_0$ (первый случай), а также неравенство $a_n \geqslant \frac{1}{n}$ при $n \geqslant n_0$ (второй случай). Следовательно, по признакам сравнения, можно утверждать, что в первом случае ряд сходится, если $\alpha > 0$, а во втором расходится. ▶

Исследовать на сходимость ряды с общим членом a_n, если:

41. $a_n = \dfrac{1}{(\ln(\ln n))^{\ln n}}$, $n > 2$.

◀ Поскольку $\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} = \frac{\ln(\ln(\ln n))^{\ln n}}{\ln n} = \ln(\ln(\ln n)) > 1{,}1$ при $n > \exp(\exp(\exp 1{,}1))$, то, согласно логарифмическому признаку, ряд сходится (см. пример 40). ▶

42. $a_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}$, $n > 1$.

◀ В силу оценки

$$\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} = \frac{(\ln(\ln n))^2}{\ln n} \leqslant 1,$$

справедливой при достаточно большом n $\left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\ln(\ln n))^2}{\ln n} = 0\right)$, на основании логарифмического признака утверждаем, что данный ряд расходится. ▶

Пользуясь интегральным признаком Коши—Маклорена, исследовать сходимость рядов с общим членом a_n:

43. $a_n = \dfrac{1}{n \ln^p n}$, $n > 1$.

◀ Функция $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln^p x}$ при $x > 1$ является положитеьной и, судя по знаку производной, убывающей (при любом p и достаточно большом x). Поэтому для исследования данного ряда на сходимость можно применять интегральный признак Коши. Имеем

$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} = \int\limits_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^p x} = \frac{1}{(p-1)2^{p-1}} < \infty$$

при $p > 1$. Следовательно, ряд также сходится при $p > 1$. ▶

44. $a_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^p(\ln(\ln n))^q}$, $n > 2$.

◀ Как и в предыдущем примере, нетрудно установить, что здесь применим интегральный признак. Рассмотрим интеграл

$$I = \int\limits_3^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x(\ln(\ln x))^q} = \int\limits_{\ln 3}^{+\infty} \frac{dt}{t^p \ln^q t}.$$

Если $p = 1$, то отсюда находим, что

$$I = \int\limits_{\ln(\ln 3)}^{+\infty} \frac{dz}{z^q} = \left.\frac{z^{-q+1}}{1-q}\right|_{\ln(\ln 3)}^{+\infty} < \infty$$

при $q > 1$. Следовательно, ряд сходится при $p = 1$ и $q > 1$.

Если $p > 1$, то в силу того, что $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln^\gamma t}{t^\varepsilon} = 0$ при $\varepsilon > 0$ и любом γ, можем написать $\frac{1}{t^p \ln^q t} \leqslant \frac{1}{t^\alpha}$ при достаточно большом $t > 0$, где $p \geqslant \alpha > 1$.

Аналогично, если $p < 1$, то при достаточно большом $t > 0$ справедливо неравенство $\frac{1}{t^p \ln^q t} \geqslant \frac{1}{t^\alpha}$, где $p \leqslant \alpha < 1$.

А тогда, на основании признака сравнения, можем утверждать, что рассматриваемый интеграл сходится, если $p > 1$, и расходится, если $p < 1$ (в обоих случаях q — любое). Это же, согласно интегральному признаку, относится и к данному ряду. ►

45. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(n)}{n^2}$, где $\nu(n)$ — количество цифр числа n.

◄ Легко показать, что $\nu(n) = [\lg n] + 1 \leqslant \ln n + 1$. Так как $\frac{\nu(n)}{n^2} \leqslant \frac{\ln n}{n^2} + \frac{1}{n^2}$ и ряды $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходятся, то, согласно теореме 1, п.1.5, сходится и данный ряд. ►

46. Пусть λ_n, $n \in \mathbb{N}$, — последовательные корни уравнения $\operatorname{tg} x = x$. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2}$.

◄ Графически можно установить, что для $\lambda_n > 0$ справедливы неравенства $n\pi < \lambda_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$\frac{1}{\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^2} < \frac{1}{\lambda_n^2} < \frac{1}{n^2\pi^2},$$

и, в силу п.1.4, данный ряд сходится.

Аналогично поступаем в случае $\lambda_n < 0$. ►

47. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$.

◄ Согласно интегральному признаку Коши—Маклорена, ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ расходится. Пользуясь неравенством $\ln(n!) < n \ln n$ и теоремой 1, п.1.5, заключаем, что данный ряд также расходится. ►

48. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ со строго положительными монотонно убывающими членами сходится или расходится одновременно с рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

◄ Поскольку $0 < a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{2^{n+1}} \leqslant a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^n a_{2^n}$, то, в силу монотонности (S_n), $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, а также теоремы о монотонной ограниченной последовательности, из сходимости второго ряда вытекает сходимость первого.

Кроме того, в силу оценки

$$\frac{1}{2}(4a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^{n+1} a_{2^{n+1}}) \leqslant a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2^{n+1}},$$

из сходимости первого ряда вытекает сходимость второго. ►

49. Пусть $f(x) > 0$ при $x \geqslant 1$, f — монотонно невозрастающая функция. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится, то для остатка его $R^n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f(k)$ справедлива оценка

$$\int\limits_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx < R_n < f(n+1) + \int\limits_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ с точностью до 0,01.

◀ В силу монотонного невозрастания функции f, имеем неравенства $0 < f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k)$ при $k \leqslant x \leqslant k+1$, $k \in \mathbb{N}$, используя которые, находим

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{k}^{k+1} f(x)\,dx < \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) = R_n,$$

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{k}^{k+1} f(x)\,dx > \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k+1) = R_n - f(n+1).$$

Теперь легко видеть, что из полученных неравенств следует требуемая оценка.

Для вычисления суммы ряда с указанной точностью воспользуемся доказанной выше оценкой. В данном случае $R_n = 0{,}01$; $f(x) = \frac{1}{x^3}$. Тогда

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^3} < 0{,}01 < \frac{1}{(n+1)^3} + \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^3},$$

откуда получаем число первых членов ряда, которое нужно взять для вычисления суммы ряда с точностью до 0,01: $n = 7$. Следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} \approx 1 + 0{,}1250 + 0{,}0370 + 0{,}0156 + 0{,}0080 + 0{,}0046 + 0{,}0029 \approx 1{,}1931 \approx 1{,}19$ (с недостатком). ▶

Исследовать сходимость следующих рядов.

50. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi n}{4n-2} - \sin \frac{\pi n}{2n+1} \right)$.

◀ Применяя формулу Маклорена с остаточным членом в форме Пеано, а также пользуясь элементарными преобразованиями тригонометрических функций, получаем

$$a_n = \operatorname{ctg} \frac{\pi n}{4n-2} - \sin \frac{\pi n}{2n+1} = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{2(4n-2)}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{2(4n-2)}} - \cos \frac{\pi}{2(2n+1)} =$$

$$= \frac{1 - \frac{\pi}{2(4n-2)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{1 + \frac{\pi}{2(4n-2)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} - 1 + \frac{\pi^2}{8(2n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{\pi}{4n-2} + o\left(\frac{1}{n}\right) = O^*\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty.$$

Следовательно, по теореме 4, п.1.5, ряд расходится. ▶

51. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^\alpha}$.

◀ При $n \geqslant 3$ справедливы неравенства

$$\frac{n-2}{n^\alpha} < \frac{\ln(n!)}{n^\alpha} < \frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}.$$

Поскольку ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n^\alpha}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}$, согласно интегральному признаку, сходятся при $\alpha > 2$, то исследуемый ряд, в силу теоремы 1, п.1.5, также сходится при $\alpha > 2$. ▶

52. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 \right)$.

◀ Пользуясь формулой Маклорена, получаем

$$a_n = n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 = \exp\left(\frac{\ln n}{n^2+1}\right) - 1 = \frac{\ln n}{n^2+1} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) = O^*\left(\frac{\ln n}{n^2}\right), \quad n \to \infty.$$

Отсюда, на основании интегрального признака и теоремы 3, п.1.5, заключаем, что данный ряд сходится. ►

53. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln^2\left(\sin\frac{1}{n}\right)}$.

◄ Поскольку $\sin\frac{1}{n} > \frac{2}{\pi n}$, $n \in \mathbb{N}$, то $\ln^2\left(\sin\frac{1}{n}\right) < \ln^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)$. Следовательно,

$$\frac{1}{\ln^2\left(\sin\frac{1}{n}\right)} > \frac{1}{\ln^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)} > \frac{2}{\pi n \ln\frac{\pi n}{2}} = O^*\left(\frac{1}{n\ln n}\right), \quad n \to \infty.$$

Таким образом, на основании интегрального признака и теоремы 3, п.1.5, из последнего соотношения следует, что данный ряд расходится. ►

54. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^{n^\alpha} - 1)$.

◄ При $\alpha \geqslant 0$ ряд расходится, так как общий член ряда не стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому будем считать, что $\alpha < 0$, и при установлении порядка стремления общего члена ряда при $n \to \infty$ будем пользоваться формулой Маклорена. Имеем

$$n^{n^\alpha} - 1 = \exp(n^\alpha \ln n) - 1 = \frac{\ln n}{n^{-\alpha}} + o\left(\frac{\ln n}{n^{-\alpha}}\right) = O^*\left(\frac{\ln n}{n^{-\alpha}}\right), \quad n \to \infty.$$

Отсюда, на основании интегрального признака и теоремы 3, п.1.5, видим, что ряд сходится при $\alpha < -1$. ►

55. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}$, $a > 0$, $b > 0$.

◄ Имеем

$$a_n = \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}} = \frac{1}{n^{a+b}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n+b}\left(1+\frac{b}{n}\right)^{n+a}}.$$

Так как последовательности $\left(\left(1+\frac{a}{n}\right)^{b+n}\right)$ и $\left(\left(1+\frac{b}{n}\right)^{a+n}\right)$ при $n \to \infty$ стремятся к постоянным e^a и e^b соответственно, то $a_n \sim \frac{e^{-a-b}}{n^{a+b}}$ при $n \to \infty$. Следовательно, по теоремам 3 и 4, п.1.5, данный ряд сходится при $a + b > 1$. ►

56. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\ln\dfrac{1}{n^\alpha} - \ln\left(\sin\dfrac{1}{n^\alpha}\right)\right)$.

◄ Очевидно, если $\alpha \leqslant 0$, то ряд расходится, ибо общий член ряда не стремится к нулю. Далее, при $\alpha > 0$, используя формулу Маклорена, получаем

$$a_n = \ln\frac{1}{n^\alpha} - \ln\left(\sin\frac{1}{n^\alpha}\right) = -\ln\left(n^\alpha \sin\frac{1}{n^\alpha}\right) =$$
$$= -\ln\left(n^\alpha\left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{6n^{3\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)\right)\right) = O^*\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right), \quad n \to \infty.$$

Таким образом, по теореме 4, п.1.5, ряд сходится при $\alpha > \frac{1}{2}$. ►

Исследовать сходимость рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ со следующими общими членами:

57. $u_n = \left(\displaystyle\int_0^n \sqrt[4]{1+x^4}\,dx\right)^{-1}$.

◄ Поскольку

$$\int_0^n \sqrt[4]{1+x^4}\,dx > \int_0^n x\,dx = \frac{n^2}{2},$$

то $0 < u_n < \frac{2}{n^2}$, т.е. по теоремам 1 и 4, п.1.5, ряд сходится. ►

58. Доказать, что сходимость векторного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ в $\mathbf{E}^k$, $A_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nk})$, $A_n \in \mathbf{E}^k$, эквивалентна сходимости всех рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{ni}$, $i = \overline{1, k}$.

◄ 1. Пусть все ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{ni}$, $i = \overline{1, k}$, сходятся. Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_{ni} = S_i$, где S_{ni} и S_i — соответственно частичные суммы и суммы рядов. По определению предела последовательности $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ такое, что $\forall n > n_0$ выполняются неравенства

$$|S_{ni} - S_i| < \varepsilon, \quad i = \overline{1, k}.$$

Отсюда

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{k} |S_{ni} - S_i|^2} < \varepsilon\sqrt{k},$$

или $\|S_n - S\| < \varepsilon\sqrt{k}$, где $\|\cdot\|$ — норма элемента в $\mathbf{E}^k$, $S_n = (S_{n1}, S_{n2}, \dots, S_{nk})$, $S = (S_1, S_2, \dots, S_k) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Следовательно, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ в $\mathbf{E}^k$, т.е. по определению 3, п, 1.1, векторный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ сходится к S.

2. Пусть сходится векторный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ к сумме S, $S \in \mathbf{E}^k$. Тогда по определению 3, п.1.1, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ такое, что $\forall n > n_0$ выполняется неравенство

$$\|S_n - S\| < \varepsilon \quad \text{или} \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{k} |S_{ni} - S_i|^2} < \varepsilon.$$

Отсюда

$$|S_{ni} - S_i| < \varepsilon \quad \forall i = \overline{1, k},$$

т.е. сходятся все ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{ni}$. ►

59. Исследовать на сходимость векторные ряды:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n \ln n}, e^{-n}\right)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\sqrt{n}}, \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}, \frac{n!}{(2n+1)!!(|\sin n| + |\cos n|)}\right)$.

◄ а) Поскольку ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ в силу интегрального признака Коши—Маклорена расходится, то данный векторный ряд, по доказанному выше, также расходится.

б) Для сходимости данного векторного ряда необходимо и достаточно, чтобы сходились все три ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!!(|\sin n| + |\cos n|)}.$$

К первому ряду применим признак Раабе:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\exp\left\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right\} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\exp\left\{\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right\} - 1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^{-1} = +\infty.$$

Следовательно, ряд сходится. Ко второму ряду применяем интегральный признак Коши—Маклорена, т.е. исследуем на сходимость несобственный интеграл:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x\, dx}{x\sqrt{x}} = -2x^{-\frac{1}{2}} \ln x\Big|_1^{+\infty} + 2\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}} = 2\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}.$$

Поскольку интеграл сходится, то сходится и ряд. Что же касается третьего ряда, то сначала используем признак сравнения

$$\frac{n!}{(2n+1)!!\,(|\sin n| + |\cos n|)} \leqslant \frac{n!}{(2n+1)!!},$$

а затем к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!!}$ применим признак д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!(2n+1)!!}{(2n+3)!!\,n!} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, третий ряд является сходящимся. Таким образом, поскольку все три ряда сходятся, то данный векторный ряд также сходится. ►

60. Доказать, что сходимость ряда комплексных чисел $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ эквивалентна сходимости двух действительных рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$, где $z_n = x_n + iy_n$.

◄ 1. Пусть ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ сходятся соответственно к суммам X и Y. Тогда, по определению 1, п.1.1, $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0$ такое, что $\forall n > n_0$ выполняются неравенства

$$|X_n - X| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |Y_n - Y| < \varepsilon, \tag{1}$$

где X_n, Y_n — частичные суммы этих рядов. Учитывая неравенства (1), получаем

$$|X_n + iY_n - (X + iY)| = |X_n - X + i(Y_n - Y)| \leqslant |X_n - X| + |Y_n - Y| < 2\varepsilon.$$

Следовательно, частичные суммы комплексного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n + iy_n)$ сходятся к числу $X + iY = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n + i\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$.

2. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится к сумме $X + iY$. Тогда, по определению 1, п.1.1, $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0$ такое, что выполняется неравенство

$$|X_n + iY_n - (X + iY)| < \varepsilon \ \text{или} \ \sqrt{(X_n - X)^2 + (Y_n - Y)^2} < \varepsilon, \tag{2}$$

где $X_n + iY_n = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 + \ldots + x_n + iy_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$ — частичные суммы рассматриваемого ряда. Из (2) следует

$$|X_n - X| < \varepsilon, \quad |Y_n - Y| < \varepsilon,$$

т.е. $X_n \to X$, $Y_n \to Y$ при $n \to \infty$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится к сумме X, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ — к сумме Y. ►

61. Исследовать на сходимость комплексные ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+i}{n^3+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(i+2)(i+4)\ldots(i+2n)}$.

◀ а) Поскольку ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}$ сходятся, то по доказанному выше сходится данный комплексный ряд.

б) Используя формулу $x + iy = \sqrt{x^2+y^2}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, преобразуем выражение $\frac{1}{(i+2)(i+4)\ldots(i+2n)}$ к виду $\frac{\cos\varphi_n - i\sin\varphi_n}{\sqrt{5}\sqrt{17}\ldots\sqrt{4n^2+1}}$, где $\varphi_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{arctg}\frac{1}{2k}$. Поскольку

$$\frac{n!|\cos\varphi_n|}{\sqrt{5}\sqrt{17}\ldots\sqrt{4n^2+1}} \leqslant \frac{n!}{\sqrt{5}\sqrt{17}\ldots\sqrt{4n^2+1}}, \quad \frac{n!|\sin\varphi_n|}{\sqrt{5}\sqrt{17}\ldots\sqrt{4n^2+1}} \leqslant \frac{n!}{\sqrt{5}\sqrt{17}\ldots\sqrt{4n^2+1}}$$

и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\sqrt{5}\sqrt{17}\ldots\sqrt{4n^2+1}}$ по признаку д'Аламбера сходится, то на основании доказанной выше теоремы (пример 60) сходится и данный комплексный ряд. ▶

Заменив последовательности (x_n), $n \in \mathbb{N}$, соответствующими рядами, исследовать их сходимость:

62. $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$.

◀ Поскольку $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) + x_1$, то

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} = -1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})^2}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})^2}.$$

Полученный ряд сходится по теореме 4, п.1.5, ибо

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})^2} \sim \frac{1}{2k^{\frac{3}{2}}} \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

поэтому сходится также данная последовательность. ▶

63. $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{\ln^2 n}{2}$.

◀ Поступая аналогично проделанному в предыдущем примере, получаем

$$x_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\ln(k+1)}{k+1} + \frac{1}{2}\left(\ln^2 k - \ln^2(k+1)\right) \right),$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\ln(k+1)}{k+1} + \frac{1}{2}\left(\ln^2 k - \ln^2(k+1)\right) \right).$$

Пользуясь формулой Маклорена с остаточным членом в форме Пеано, имеем

$$2a_n = \frac{2\ln(n+1)}{n+1} + \ln\frac{n}{n+1} \cdot \ln n(n+1) =$$

$$= \frac{2\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln(n+1)+\ln n}{n} + O^*\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) = -\frac{2\ln n}{n(n+1)} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{-n+1}{n(n+1)} + O^*\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) =$$

$$= -\frac{2\ln n}{n(n+1)} + \frac{n-1}{n^2(n+1)} + O^*\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) = O^*\left(\frac{\ln n}{n^2}\right), \; n \to \infty.$$

Следовательно, сходимость последовательности (x_n) эквивалентна сходимости ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$. Последний, по интегральному признаку, сходится, поэтому сходится и данная последовательность. ►

64. Сколько примерно надо взять членов ряда, чтобы найти его сумму с точностью до 10^{-5}, если

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n+1)!}$?

◄ Нужное число членов ряда найдем из неравенства

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots| < 10^{-5}, \tag{1}$$

где a_n — общий член рассматриваемого ряда.

а) Пусть $a_n = \frac{1}{n^2}$. Поскольку

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \int\limits_n^{n+1} \frac{dx}{x^2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

то

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots < \int\limits_n^{+\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

Следовательно, если

$$\int\limits_n^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \leqslant 10^{-5}, \tag{2}$$

то неравенство (1) будет выполняться. Из (2) находим $n \geqslant 10^{-5}$.

б) Пусть $a_n = \frac{2n}{(n+1)!}$. Тогда

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots| = \frac{2^{n+1}}{(n+2)!}\left(1 + \frac{2}{n+3} + \frac{2^2}{(n+3)(n+4)} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{2^{n+1}}{(n+2)!}\left(1 + \frac{2}{n+3} + \left(\frac{2}{n+3}\right)^2 + \ldots\right) = \frac{(n+3)2^{n+1}}{(n+2)!(n+1)}.$$

Таким образом, если $\frac{(n+3)2^{n+1}}{(n+2)!(n+1)} \leqslant 10^{-5}$, то неравенство (1) будет выполняться. Решая последнее неравенство, находим $n \geqslant 10$. ►

Упражнения для самостоятельной работы

Исследовать сходимость рядов:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(2n)!^2}$. **2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+5)(n+10)}{2^n}$. **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2}$. **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^3}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)\right|^{\frac{3}{5}}$. **6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\ln\left(n \operatorname{tg}\frac{1}{n}\right)}$. **7.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} e^{-\sqrt{n}}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+3)(n+6)\ldots(4n-3)}{(n+1)(n+4)\ldots(4n-2)(n+2)^2}$. **9.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)!}{\left(n+\sqrt{n-1}\operatorname{tg}\frac{1}{n-1}\right)\left(n-1+\sqrt{n-2}\operatorname{tg}\frac{1}{n-2}\right)\ldots(2+\operatorname{tg}1)}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^3 n}{n^2}$. **11.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(\ln n)}{(\ln n)^{\alpha}}$. **12.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n \ln^2 n}$. **13.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n\left(\sqrt{4+\frac{1}{n^2}} - \sqrt[3]{8+\frac{3}{n^2}}\right)}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\sin\left(e^{\frac{1}{n}}-\frac{2}{n}-\cos\sqrt{\frac{2}{n}}\right)\right|^{\alpha}$. **15.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sin^{\alpha}\frac{1}{n^2\ln^2 n}$.

16. Доказать признак Бертрана: если существует хотя бы в несобственном смысле предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right)\ln n\right)=q,$$

то числовой строго положительный ряд $\sum a_n$ при $q>1$ сходится, а при $q<1$ — расходится.

Пользуясь признаком Бертрана, исследовать сходимость следующих рядов:

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\prod\limits_{k=2}^{n}\gamma_k$ где $\gamma_k=\left(1+\frac{1}{k}+\frac{\alpha}{k\ln k}+\frac{1}{k\ln^2 k}\right)^{-1}$. **18.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!\sqrt{n}\ln^{\alpha} n}$.

Установив поведение общего члена при $n\to\infty$, исследовать сходимость следующих рядов:

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)n^{\alpha}$. **20.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp\{-n^2x^2+x\}}{nx^4+x^2+1}\,dx\right)$.

21. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{t\cos nt}{\sqrt{1+t^4}}\,dt$. **22.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{e^{-nt}\ln t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$.

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int\limits_{0}^{+\infty}f(x)|\sin nx|\,dx$, где функция f абсолютно интегрируема на $]0,+\infty[$ и

$$\int\limits_{0}^{+\infty}f(x)\,dx\neq 0.$$

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-x^n}\,dx-1\right|$. **25.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\int\limits_{n}^{+\infty}\sin t^2\,dt-\frac{\cos n^2}{2n}\right|$.

26. Матричный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$, где A_n матрицы размера $k\times l$, называется сходящимся, если

$$\exists\lim_{n\to\infty}\sum_{p=1}^{n}A_p=A,$$

где A — матрица размера $k\times l$.

Показать, что сходимость матричного ряда эквивалентна сходимости всех рядов вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{pq},\quad 1\leqslant p\leqslant k,\quad 1\leqslant q\leqslant l,$$

где a_n^{pq} — элементы матрицы A_n, $n\in\mathbb{N}$.

27. Доказать, что матричный ряд

$$I+\frac{xA}{1!}+\frac{x^2A^2}{2!}+\ldots+\frac{x^nA^n}{n!}+\ldots,\tag{1}$$

где A — квадратная матрица, I — единичная матрица, x — число, сходится. Матричный ряд (1) определяет матричную экспоненту e^{xA}, т.е.

$$e^{xA}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^nA^n}{n!}.$$

28. Пусть квадратная матрица A приводится к диагональному виду, т.е. существует матрица T такая, что

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$e^{A} = T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}.$$

Доказать это.

29. Пусть квадратная матрица размера $n \times n$ имеет вид

$$I = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & & \dots & 0 \\ & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$e^{I} = \begin{pmatrix} e^{\lambda} & \frac{e^{\lambda}}{1!} & \frac{e^{\lambda}}{2!} & \dots & \frac{e^{\lambda}}{(n-1)!} \\ & e^{\lambda} & \frac{e^{\lambda}}{1!} & \dots & \frac{e^{\lambda}}{(n-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \frac{e^{\lambda}}{1!} \\ 0 & & & & e^{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Доказать это.

30. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$ сходится, если

$$\sum_{p,\,q=1}^{m} (a^{pq})^2 < 1,$$

где $a^{pq} \in \mathbb{R}$ — элементы матрицы A.

§ 2. Признаки сходимости знакопеременных рядов

2.1. Абсолютная и условная сходимости ряда.

Определение 1. *Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, где $a_n \in \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.*

Определение 2. *Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется условно сходящимся.*

Теорема 1. *Из абсолютной сходимости ряда следует его сходимость.*

Теорема 2. *Если ряд сходится абсолютно к сумме S, то члены ряда можно переставлять в любом порядке и сумма переставленного ряда также будет равна S.*

Теорема 3 (Римана). *Если ряд сходится условно, то путем соответствующей перестановки его членов можно получить ряд с наперед заданным значением суммы (при этом не исключается $\pm\infty$).*

2.2. Признак Лейбница.

Если $a_n = (-1)^n b_n$, $b_n \geqslant 0$, и последовательность (b_n), начиная с некоторого номера n_0, монотонно стремится к нулю, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Для остатка такого ряда справедлива оценка:

$$R_n = (-1)^n \theta_n b_{n+1}, \quad 0 \leqslant \theta_n \leqslant 1, \quad n > n_0.$$

2.3. Признак Абеля.

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{1}$$

сходится, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и последовательность (b_n) есть монотонная и ограниченная.

2.4. Признак Дирихле.

Ряд (1) сходится, если последовательность (b_n), начиная с некоторого номера n_0, монотонно стремится к нулю, а последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ограничена.

2.5. Ассоциативное свойство ряда.

Члены сходящегося ряда можно группировать произвольно; при этом сумма ряда не изменяется.

65. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ является сходящимся, если выполнены условия: а) общий член этого ряда $a_n \to 0$ при $n \to \infty$; б) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, полученный в результате группировки членов данного ряда без нарушения их порядка, сходится; в) число слагаемых a_i, входящих в член $A_n = \sum\limits_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i$, $1 = p_1 < p_2 < \ldots$, ограничено.

◄ Пусть (S_{nk}^A) — последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Тогда

$$S_{nk}^A = a_1 + a_2 + \ldots + a_{p_2-1} + a_{p_2} + a_{p_2+1} + \ldots + a_{p_3-1} + \ldots +$$
$$+ a_{p_n} + a_{p_n+1} + \ldots + a_k + a_{k+1} + \ldots + a_{p_{n+1}-1} =$$
$$= S_k + a_{k+1} + \ldots + a_{p_{n+1}-1}, \quad p_n \leqslant k \leqslant p_{n+1} - 1,$$

где (S_k) — последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Поскольку $a_n \to 0$ и число членов последовательности $(a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{p_{n+1}-1}) = (C_k)$, по условию, ограничено, то $C_k \to 0$ при $k \to \infty$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{nk}^A = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, что и требоваяось доказать. ►

66. Доказать, что ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{p_2-1} - a_{p_2} - \ldots - a_{p_3-1} + a_{p_3} + \ldots$$

сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \right), \quad a_i > 0; \quad 1 = p_1 < p_2 < \ldots .$$

◀ Пусть сходится первый ряд. Тогда сходится любая подпоследовательность его частичных сумм, в том числе и такая:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(\sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i\right)\right),$$

т.е. последовательность частичных сумм второго ряда. Следовательно, второй ряд также сходится.

Пусть теперь сходится второй ряд. Тогда $\sum\limits_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \to 0$ при $n \to \infty$. Это означает, что, в силу положительности a_i, сумма $a_{k+1} + \ldots + a_{p_{n+1}-1}$ (см. предыдущий пример) также стремится к нулю и

$$\lim_{n\to\infty} S_{nk}^{A} = \lim_{k\to\infty} S_k,$$

т.е. сходится первый ряд. ▶

67. Доказать, что сумма сходящегося ряда не изменится, если члены этого ряда переставить так, что ни один из них не удаляется от своего прежнего положения больше чем на m мест, где m – некоторое заранее заданное число.

◀ Пусть S – сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$ такое, что $\forall n > N$ для последовательности частичных сумм (S_n) этого ряда выполняются неравенства $S - \varepsilon < S_n < S + \varepsilon$. В силу условия примера, при $n > N + m$ можем написать $S - \varepsilon < S'_n < S + \varepsilon$, где (S'_n) — последовательность частичных сумм ряда, полученного в результате указанной перестановки. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n = S$. ▶

Доказать сходимость следующих рядов и найти их суммы:

68. $1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \ldots.$

◀ Общий член ряда $a_n = (-1)^n b_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, donde $b_n = \frac{2n+1}{2^n}$. Так как b_n, начиная с некоторого номера, монотонно стремится к нулю, то, согласно признаку Лейбница, ряд сходится. Доказать сходимость этого ряда можно и непосредственно. Замечая, что последовательность (S_n) частичных сумм этого ряда представляется в виде

$$S_n = S_n^{(1)} + S_n^{(2)} + \ldots + S_n^{(n+1)},$$

$$S_n^{(1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right),$$

$$S_n^{(2)} = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{(-1)^n}{2^n}\right) = \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2} - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$S_n^{(k+1)} = 2\left(\frac{(-1)^k}{2^k} - \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} + \ldots + \frac{(-1)^n}{2^n}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{(-1)^k}{2^k} - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$S_n^{(n)} = \frac{4}{3}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right), \quad S_n^{(n+1)} = 2\frac{(-1)^n}{2^n},$$

получаем

$$S_n = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right) - \frac{2}{3}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{4}{3}\cdot\frac{(n-1)(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} + 2\frac{(-1)^n}{2^n}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ существует (т.е. ряд сходится) и равен $\frac{2}{9}$. ▶

69. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots.$

◀ Поскольку общий член ряда имеет вид $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, а последовательность $\left(\frac{1}{n}\right)$ монотонно стремится к нулю, то, по признаку Лейбница, ряд сходится. Найдем S_{2n}. Имеем

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) =$$
$$= C + \ln 2n + \varepsilon_{2n} - (C + \ln n + \varepsilon_n) = \ln 2 + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n,$$

где C — постоянная Эйлера, а $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Учитывая еще, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}$ где (S_n) – последовательность частичных сумм данного ряда, окончательно получаем

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \ln 2. \text{ ▶}$$

70. Зная, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$, доказать следующее утверждение: если члены ряда $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$ переставить так, чтобы группу p последовательных положительных членов сменяла группа q последовательных отрицательных членов, то сумма нового ряда будет равна $\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}$.

◀ В результате указанной перестановки получим ряд

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{2q} + \frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2p+3} + \ldots + \frac{1}{4p-1} - \ldots,$$

сумма которого, в силу примера 66, равна сумме ряда

$$\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2p-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2q}\right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2p+3} + \ldots + \frac{1}{4p-1}\right) - \ldots \tag{1}$$

в случае сходимости последнего.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2(n-1)p+1} + \frac{1}{2(n-1)p+3} + \ldots + \frac{1}{2np-1} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2(n-1)q+2} - \frac{1}{2(n-1)q+4} - \ldots - \frac{1}{2nq} \right). \tag{2}$$

Ряд (2) получается из ряда (1) в результате группировки членов ряда (1) по два. Поэтому если мы покажем, что ряд (2) сходится, и найдем его сумму, то, на основании результата, полученного в примере 65, можем утверждать, что ряд (1) имеет ту же сумму.

Пусть $p > q$. Тогда нетрудно получить, что

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2nq} + \frac{1}{2nq+1} + \frac{1}{2nq+3} + \ldots + \frac{1}{2np-1}, \tag{3}$$

где (S_n) — последовательность частичных сумм ряда (2). Прибавляя и вычитая в выражении (3) слагаемое

$$\frac{1}{2nq+2} + \frac{1}{2nq+4} + \ldots + \frac{1}{2np} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{nq+1} + \frac{1}{nq+2} + \ldots + \frac{1}{np}\right)$$

и пользуясь асимптотической формулой

$$\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln \frac{m}{n} + \varepsilon_{mn}, \ \varepsilon_{mn} \to 0, \ m \to \infty,$$

из (3) получаем

$$S_n = C_{2np} + \ln\frac{2np}{2nq} - \frac{1}{2}\ln\frac{np}{nq} + \varepsilon'_n, \ \varepsilon'_n \to 0, \ n \to \infty, \tag{4}$$

где (C_{2np}) — четная подпоследовательность частичных сумм сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Таким образом, из (4) находим

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}.$$

Заметим, что при $p \leqslant q$ аналогичным образом получается этот же результат. В частности, если $p = 2$ и $q = 1$, то

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots = \frac{3}{2}\ln 2;$$

если $p = 1$, $q = 2$, то

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{2}\ln 2. \ ►$$

71. Члены сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ переставить так, чтобы он стал расходящимся.

◄ Рассмотрим, например, ряд

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \\ + \ldots + \left(\frac{1}{\sqrt{6n-5}} + \frac{1}{\sqrt{6n-3}} + \frac{1}{\sqrt{6n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) + \ldots = \\ = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{6n-5}} + \frac{1}{\sqrt{6n-3}} + \frac{1}{\sqrt{6n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Очевидно, этот ряд получается из данного ряда в результате такой перестановки: за тремя положительными членами следует один отрицательный. Покажем, что ряд расходится.

В силу неравенства $\frac{1}{\sqrt{6n-3}} + \frac{1}{\sqrt{6n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} > \frac{2}{\sqrt{6n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} > 0$, имеем оценку общего члена второго ряда: $a_n > \frac{1}{\sqrt{6n-5}}$. Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{6n-5}}$ по теореме 4, п.1.5, расходится, то по теореме 1, п.1.5, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также расходится, что и требовалось. Заметим, что исходный ряд сходится по признаку Лейбница. ►

Исследовать сходимость знакопеременных рядов:

72. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \ldots$.

◄ Поскольку сгруппированный ряд, согласно признаку Лейбница, сходится, то, на основании доказательства, приведенного в примере 65, приходим к выводу, что данный ряд также сходится. ►

73. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^{100} n}{n}\sin\frac{n\pi}{4}$.

◄ Поскольку

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{4}\right| = \left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^{-1}\left|\sin\frac{n\pi}{8}\sin\frac{n+1}{8}\pi\right| < \frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}},$$

а последовательность $(n^{-1}\ln^{100} n)$, начиная с достаточно большого n, монотонно стремится к нулю (это вытекает из того, что

$$\lim_{x\to+\infty} x^{-1}\ln^{100} x = 100 \lim_{x\to+\infty} x^{-1}\ln^{99} x = 0, \quad (x^{-1}\ln^{100} x)' < 0 \ \forall x > e^{100}),$$

то, согласно признаку Дирихле, данный ряд сходится. ►

74. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$.

◄ Ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos 2n}{n}$ сходятся: первый — по признаку Лейбница, второй (в силу ограниченности последовательности $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\cos 2k\right)$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos 2k\right| = \left|-\frac{1}{2}+\frac{(-1)^n}{2\cos 1}\cos(2n+1)\right| < \frac{1+(\cos 1)^{-1}}{2},$$

и монотонного стремления $\frac{1}{n}$ к нулю при $n\to\infty$) — по признаку Дирихле. Следовательно, их полуразность

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(1-\cos 2n) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$$

является также сходящимся рядом. ►

75. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

◄ Представляя общий член ряда в виде

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = (-1)^n\frac{\sqrt{n}-(-1)^n}{n-1} = (-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1}-\frac{1}{n-1}$$

и замечая, что ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$, по признаку Лейбница, сходится, а ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$ расходится (к $+\infty$), заключаем, что данный ряд также расходится (к $+\infty$). ►

76. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+k^2})$.

◄ Поскольку

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2}\right) = (-1)^n\sin\pi\left(\sqrt{n^2+k^2}-n\right) \equiv (-1)^n b_n,$$

где $b_n = \sin\frac{\pi k^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n}$ — последовательность, монотонно (при $n > n_0$) стремящаяся к нулю при $n\to\infty$, то, по признаку Лейбница, ряд сходится. ►

77. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$.

◄ Рассмотрим ряд, полученный в результате группировки членов данного ряда. Имеем

$$-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{15}\right)+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^k\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\ldots+\frac{1}{(k+1)^2-1}\right)+\ldots.$$

Поскольку

$$A_k = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \ldots + \frac{1}{(k+1)^2-1} < \frac{2k+1}{k^2} \to 0, \ k \to \infty,$$

$$A_k - A_{k+1} = (2k+1)\sum_{m=0}^{2k} \frac{1}{(k^2+m)((k+1)^2+m)} - \frac{1}{k^2+4k+2} - \frac{1}{k^2+4k+3} >$$

$$> \frac{(2k+1)^2}{(k^2+2k)(k^2+4k+1)} - \frac{1}{k^2+4k+2} - \frac{1}{k^2+4k+3} > 0$$

при $k \geqslant k_0$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k A_k$, согласно признаку Лейбница, сходится. А тогда на основании выводов, полученных в примере 66, данный ряд также сходится. ►

78. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n}$.

◄ Имеем

$$\cos\frac{\pi n^2}{n+1} = (-1)^n \cos\left(\pi\frac{n^2}{n+1} - \pi n\right) = (-1)^{n+1}\cos\frac{\pi}{n+1}.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln^2 n}$, по признаку Лейбница, сходится, а последовательность $\left(\cos\frac{\pi}{n+1}\right)$ монотонна и ограничена, то исследуемый ряд, по признаку Абеля, также сходится. ►

79. Доказать, что знакочередующийся ряд

$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots + (-1)^{n-1}b_n + \ldots, \ b_n > 0,$$

сходится, если $\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ при $n \to \infty$, где $p > 0$.

◄ Как следует из примера 35, при $p > 0$ последовательность $(b_n) \downarrow 0$ при $n > n_0$. Поэтому, по признаку Лейбница, данный ряд сходится. ►

Исследовать на абсолютную сходимость следующие ряды:

80. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right)$.

◄ Пусть $p \leqslant 0$. Тогда общий член ряда к нулю не стремится и, следовательно, ряд расходится. Полагая, далее, $p > 0$ и пользуясь формулой Маклорена с остаточным членом в форме Пеано, находим

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right) = \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{1}{2n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right) \quad \text{при} \ \ n \to \infty.$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$, согласно признаку Лейбница, сходится при $p > 0$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^*$, где $a_n^* = \frac{1}{2n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$, по теореме 4, п.1.5, сходится при $p > \frac{1}{2}$ (при $p \leqslant \frac{1}{2}$ ряд расходится к $+\infty$), то данный ряд сходится только при $p > \frac{1}{2}$.

В силу неравенства

$$\frac{1}{2n^p} < \left|\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right)\right| < \frac{2}{n^p}, \quad p > 0,$$

и теорем 1, 4, п.1.5, данный ряд сходится абсолютно при $p > 1$. Следовательно, при значениях p, удовлетворяющих неравенству $\frac{1}{2} < p \leqslant 1$, исследуемый ряд сходится условно. ►

81. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p}$.

◀ При $p \leqslant 0$ общий член ряда не стремится к нулю, т.е. ряд расходится. Поэтому, считая, что $p > 0$, и применяя формулу Маклорена с остаточным членом в форме Пеано, преобразовываем общий член ряда к виду

$$\frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p} = (-1)^n n^{-p}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{-p} =$$

$$= (-1)^n n^{-p}\left(1+p\frac{(-1)^{n+1}}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{p}{n^{p+1}} + o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)$$

при $n \to \infty$. Ряды $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$, $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{p}{n^{p+1}}+o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)\right)$ сходятся при $p > 0$ (первый — в силу признака Лейбница, а второй — по теореме 4, п.1.5). Поэтому исходный ряд сходится при этом же условии.

Поскольку, далее,

$$\frac{1}{(n+1)^p} \leqslant \frac{1}{(n+(-1)^n)^p} \leqslant \frac{1}{(n-1)^p}, \quad n = \overline{2, \infty},$$

и ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$, то, в силу последнего неравенства и теоремы 1, п.1.5, данный ряд сходится абсолютно при $p > 1$. Следовательно, при $0 < p \leqslant 1$ исследуемый ряд сходится условно. ▶

82. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}}$.

◀ Очевидно, при $p \leqslant 0$ ряд расходится, поскольку при этом не выполняется необходимое условие сходимости. При $p > 0$, как и в предыдущем примере, представим общий член ряда в виде

$$\sin\frac{n\pi}{4}\left(n^p+\sin\frac{n\pi}{4}\right)^{-1} = n^{-p}\sin\frac{n\pi}{4}\left(1+\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}\left(1-\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}+o\left(\frac{1}{n^p}\right)\right) = \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p} - \frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right), \quad n \to \infty.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}$ сходится, по признаку Дирихле, при $p > 0$, поскольку

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{4}\right| < \frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}}, \quad \frac{1}{n^p} \downarrow 0, \quad n \to \infty.$$

Далее, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^{2p}}$ при $p > 0$ сходится также по признаку Дирихле, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{2p}}+o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)\right)$$

сходится по теореме 4, п.1.5, только при $p > \frac{1}{2}$. Поэтому полуразность этих рядов

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{2p}}+o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)\right) - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos\frac{n\pi}{12}}{n^{2p}}+o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)\right)$$

является сходящимся при $p > \frac{1}{2}$ рядом (при $0 < p \leqslant \frac{1}{2}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}$ расходится к $+\infty$, поэтому и последний ряд расходится к $+\infty$). Следовательно, исходный ряд сходится лишь при $p > \frac{1}{2}$.

Для установления области абсолютной сходимости воспользуемся оценками

$$\frac{\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|}{2n^p} \leqslant \frac{\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|}{n^p}\cdot\frac{1}{\left|1+\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}\right|} \leqslant \frac{2\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|}{n^p}, \quad \frac{1}{2n^p}-\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{2n^p} = \frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^p} \leqslant \frac{\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|}{n^p} \leqslant \frac{1}{n^p}$$

и теоремами 1, 4, п.1.5. Из этих неравенств следует, что данный ряд сходится абсолютно лишь при $p>1$. Поэтому при $\frac{1}{2}<p\leqslant 1$ ряд сходится условно. ►

83. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$. $\qquad (1)$

◄ Очевидно, при $p>1$ ряд сходится абсолютно. Для выяснения области сходимости рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n A_n, \tag{2}$$

где $A_n=\frac{1}{(n^2)^p}+\frac{1}{(n^2+1)^p}+\ldots+\frac{1}{(n^2+2n)^p}$, полученный в результате группировки членов данного ряда. Поскольку $0<A_n<\frac{2n+1}{n^{2p}}\to 0$ при $n\to\infty$ и $p>\frac{1}{2}$, а также

$$A_n-A_{n+1}=\sum_{i=0}^{2n}\frac{((n+1)^2+i)^p-(n^2+i)^p}{(n^2+i)^p(n^2+2n+i+1)^p}-(n^2+4n+2)^{-p}-(n^2+4n+3)^{-p} >$$

$$> \frac{(2n+1)((n^2+4n+1)^p-(n^2+2n)^p)}{(n^2+2n)^p(n^2+4n+1)^p}-\frac{1}{(n^2+4n+2)^p}-\frac{1}{(n^2+4n+3)^p}>0$$

при достаточно большом n, то, в силу признака Лейбница, ряд (2) сходится. Кроме того, $A_n>\frac{2n+1}{(n^2+2n)^p}$ не стремится к 0 при $p\leqslant\frac{1}{2}$; поэтому ряд (2) расходится, если $p\leqslant\frac{1}{2}$. Следовательно, согласно примеру 66, ряд (1) сходится лишь при $p>\frac{1}{2}$. Таким образом, область условной сходимости ряда (1) определяется неравенствами $\frac{1}{2}<p\leqslant 1$. ►

84. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$.

◄ Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left(\frac{1}{[e^{k-1}]+1}+\ldots+\frac{1}{[e^k]}\right),$$

полученный в результате группировки членов данного ряда, в силу оценки $\frac{1}{[e^{k-1}]+1}+\ldots+\frac{1}{[e^k]}>\frac{[e^k]-[e^{k-1}]}{[e^k]}=1-\frac{[e^{k-1}]}{[e^k]}\to 1-\frac{1}{e}$, $k\to\infty$, расходится. Следовательно, согласно примеру 66, исследуемый ряд также расходится. ►

85. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}\right)^p$.

◄ Рассмотрим отношение

$$\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}\right)^p : \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)(2n+2)}\right)^p =$$

$$=\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^p=1+\frac{p}{2n+1}+o\left(\frac{1}{n}\right)=1+\frac{p}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n\to\infty.$$

Отсюда видим, что, согласно примеру 79, ряд сходится, если $p>0$. Так как при $p\leqslant 0$ общий член ряда не стремится к нулю при $n\to\infty$, то это условие ($p>0$) является необходимым для сходимости ряда.

Далее, по признаку Гаусса, ряд сходится абсолютно лишь при $p > 2$. Следовательно, при значениях p, удовлетворяющих неравенству $0 < p \leqslant 2$, данный ряд сходится только условно. ►

86. $\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^q} + \frac{1}{5^p} - \frac{1}{6^q} + \ldots$.

◄ Сразу заметим, что если $p \leqslant 0$ или $q \leqslant 0$, то ряд расходится в силу необходимого признака. Поэтому далее, считаем, что $p > 0$ и $q > 0$.

Имея в виду пример 65, сгруппируем члены данного ряда следующим образом:

$$\left(\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^q}\right) + \left(\frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^q}\right) + \left(\frac{1}{5^p} - \frac{1}{6^q}\right) + \ldots = \sum_{n=1,3,5,\ldots} \left(\frac{1}{n^p} - \frac{1}{(n+1)^q}\right).$$

Так как

$$\frac{1}{n^p} - \frac{1}{(n+1)^q} = \frac{1}{n^p} - \frac{1}{n^q}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-q} = \frac{1}{n^p} - \frac{1}{n^q}\left(1 - \frac{q}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{n^p} - \frac{1}{n^q} + \frac{q}{n^{q+1}} + o\left(\frac{1}{n^{q+1}}\right), \quad n \to \infty,$$

то, по теореме 4, п.1.5, сгруппированный ряд сходится при $p = q > 0$. Если же $p \neq q$, то отсюда следует, что ряд сходится при $p > 1$ и $q > 1$ одновременно. А тогда, согласно упомянутому примеру, при этих же условиях сходится и данный ряд.

Очевидно, абсолютно ряд сходится лишь при $p > 1$ и $q > 1$. ►

87. $1 + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{4^p} + \ldots$.

◄ Ряд $1 + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots$, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, сходится лишь при $p > 1$, так как при этом условии сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ и члены абсолютно сходящегося ряда можно переставить в любом порядке.

При $p = 1$ получаем ряд, сходимость которого исследована в примере 70. Там мы установили, что ряд сходится.

Рассмотрим случай, когда $0 < p < 1$. Образуем подпоследовательность частичных сумм данного ряда (S_{3n}), где

$$S_{3n} = 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^p} + \frac{1}{(2n+1)^p} + \frac{1}{(2n+3)^p} + \ldots + \frac{1}{(4n-1)^p} =$$
$$= C_{2n} + \frac{1}{(2n+1)^p} + \frac{1}{(2n+3)^p} + \ldots + \frac{1}{(4n-1)^p};$$

(C_{2n}) — подпоследоватеяьность последовательности частичных сумм сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$. Поскольку

$$\frac{1}{(2n+1)^p} + \frac{1}{(2n+3)^p} + \ldots + \frac{1}{(4n-1)^p} > \frac{n}{(4n-1)^p} \to +\infty \quad \text{при } n \to \infty, \text{ то}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{3n} = \lim_{n\to\infty} C_{2n} + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(2n+1)^p} + \frac{1}{(2n+3)^p} + \ldots + \frac{1}{(4n-1)^p}\right) = +\infty.$$

Следовательно, данный ряд при $0 < p < 1$ расходится. Заметив, что расходимость его при $p \leqslant 0$ следует из необходимого условия, окончательно устанавливаем, что исследуемый ряд абсолютно сходится, если $p > 1$, и условно, если $p = 1$. ►

88. $1 + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{1^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{3^p} + \frac{1}{9^p} + \frac{1}{11^p} - \frac{1}{5^p} + \ldots$.

◄ Очевидно, при $p > 1$ данный ряд сходится абсолютно, ибо при этом условии сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, и члены абсолютно сходящегося ряда можно переставить в любом порядке.

Пусть $0 < p < 1$. Рассмотрим подпоследовательность (S_{3n}) последовательности частичных сумм данного ряда. Имеем

$$S_{3n} = \frac{1}{(2n+1)^p} + \frac{1}{(2n+3)^p} + \ldots + \frac{1}{(4n-1)^p}.$$

Поскольку $S_{3n} > \frac{n}{(4n-1)^p} \to \infty$ при $n \to \infty$, то данный ряд расходится.

Пусть $p = 1$. Тогда $0 < S_{3n} < \frac{1}{2}$ и, по теореме о монотонной ограниченной последовательности, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{3n}$ конечен. Следовательно, сходится ряд

$$\left(1 + \frac{1}{3} - 1\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{5}\right) + \ldots.$$

А так как все условия примера 65 здесь выполнены, то данный ряд также сходится.

Учитывая еще, что при $p \leqslant 0$ исследуемый ряд расходится, окончательно устанавливаем, что он сходится абсолютно при $p > 1$, а при $p = 1$ — условно. ►

89.

$$1 - \frac{2}{2^q} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} - \frac{2}{5^q} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{2}{8^q} + \ldots. \tag{1}$$

◄ Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1,4,7,\ldots} \left(\frac{1}{n^p} - \frac{2}{(n+1)^q} + \frac{1}{(n+2)^p}\right), \tag{2}$$

полученный из данного в результате группировки его членов по три. Считая, что $p > 0$ и $q > 0$, имеем

$$a_n = \frac{1}{n^p} - \frac{2}{(n+1)^q} + \frac{1}{(n+2)^p} = 2\left(\frac{1}{n^p} - \frac{1}{n^q}\right) + 2\left(\frac{q}{n^{q+1}} - \frac{p}{n^{p+1}}\right) + o\left(\frac{1}{n^{q+1}}\right) + o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right),$$
$$n \to \infty.$$

Отсюда, в силу признаков сравнения, п.1.5, следует, что при $p = q$ ряд (2) сходится. Пусть $p \neq q$. Тогда $a_n \sim \frac{1}{n^{\min(p,\,q)}}$ при $n \to \infty$, и, следовательно, по признакам сравнения, ряд (2) расходится, если $\min(p, q) \leqslant 1$. Так как все условия примера 65 здесь выполнены, то выводы, относящиеся к ряду (2), остаются в силе для ряда (1).

Замечая еще, что при $p \leqslant 0$ или $q \leqslant 0$ исследуемый ряд (1) расходится (общий член ряда не стремится к нулю), а при $p > 1$ и $q > 1$ он сходится абсолютно, заключаем, что при $0 < p = q \leqslant 1$ ряд сходится условно. ►

90. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n}$, где $\binom{m}{n} = \dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}$.

◄ Для удобства представим общий член ряда в виде

$$\binom{m}{n} = (-1)^{n-1} b_n, \quad b_n = \frac{(n-m-1)(n-m-2)\ldots(1-m)m}{n!}.$$

Очевидно, при $m \in \mathbb{Z}_0$ ряд сходится абсолютно. Поэтому, исключая этот случай, можно образовать отношение

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{m+1}{n} + \frac{m}{n(n-m)}.$$

Так как начиная с некоторого номера n_0, последовательность (b_n) имеет определенный знак, то будем считать, что $b_n > 0$, $n \geqslant n_0$. В таком случае из отношения (1), учитывая пример 79, находим, что ряд сходится, если $m + 1 > 0$. Поскольку при $m + 1 \leqslant 0$ последовательность монотонно возрастает, то условие $m + 1 > 0$ является также и необходимым для сходимости ряда. Далее, по признаку Гаусса, из (1) следует, что ряд сходится абсолютно, если $m > 0$, а при $m < 0$ — расходится (абсолютно).

Таким образом, все сказанное позволяет сделать вывод, что при $m \geqslant 0$ ряд сходится абсолютно, а если $-1 < m < 0$, то ряд сходится условно. ►

91. Доказать, что сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ для каждого $p>0$ лежит между $\dfrac{1}{2}$ и 1.

◀ Поскольку ряд, в силу признака Лейбница, сходится, то подпоследовательности частичных сумм его имеют один и тот же предел S; причем подпоследовательность (S_{2n}),

$$S_{2n}=\left(1-\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{(2n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^p}\right),$$

возрастает, а подпоследовательность (S_{2n-1}),

$$S_{2n-1}=1-\left(\frac{1}{2^p}-\frac{1}{3^p}\right)-\ldots-\left(\frac{1}{(2n-2)^p}-\frac{1}{(2n-1)^p}\right),$$

убывает. Следовательно, $S_{2n}<S<S_{2n-1}$, откуда находим, что $S<S_1<1$. Для доказательства оценки снизу рассмотрим подпоследовательность (S_{4n-1}). Поскольку график функции $x\mapsto\frac{1}{x^p}$, $p>0$, $x>0$, является выпуклым вниз, то выполняются неравенства

$$\frac{1}{3^p}+\frac{1}{5^p}>\frac{2}{4^p},\quad \frac{1}{7^p}+\frac{1}{9^p}>\frac{2}{8^p},\ \ldots,\ \frac{1}{(4n-1)^p}+\frac{1}{(4n+1)^p}>\frac{2}{(4n)^p}.$$

Отсюда для S_{4n-1} имеем оценку

$$S_{4n-1}=1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\ldots+\frac{1}{(4n-1)^p}-\frac{1}{(4n)^p}+\frac{1}{(4n+1)^p}>$$
$$>1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}-\ldots-\frac{1}{(4n-2)^p}+\frac{1}{(4n)^p}=1-\frac{1}{2^p}S_{2n},$$

из которой предельным переходом получаем

$$\lim_{n\to\infty}S_{4n-1}=S\geqslant 1-\frac{1}{2^p}\lim_{n\to\infty}S_{2n}=1-\frac{S}{2^p}.$$

Итак, $S\geqslant\frac{2^p}{2^p+1}>\frac{1}{2}$, что и требовалось доказать. ▶

92. Сколько членов ряда следует взять, чтобы получить его сумму с точностью до $\varepsilon=10^{-6}$, если:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n^\circ}{\sqrt{n}}$?

◀ а) Согласно оценке остатка, вытекающей из признака Лейбница, нужное число N находим из неравенства $\frac{1}{\sqrt{(N+1)^2+1}}<10^{-6}$, откуда $N\geqslant10^6$ (см. п.2.2).

б) В силу признака Дирихле, ряд сходится, а по п.2.5 сумма ряда равна сумме сгруппированного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n,\quad b_n=(-1)^{n+1}\sum_{k=180(n-1)+1}^{180n-1}\frac{\sin k^\circ}{\sqrt{k}},$$

который, очевидно, является рядом лейбницева типа, т.е. сходящимся по признаку Лейбница. Следовательно, для остатка этого ряда справедлива оценка

$$\left|\sum_{k=180n+1}^{180n+179}\frac{\sin k^\circ}{\sqrt{k}}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{180n+1}}\sum_{k=180n+1}^{160n+179}\sin k^\circ<\frac{1}{\sqrt{N+1}\sin\frac{\pi}{360}}<10^{-6},$$

откуда $N\geqslant1{,}32\cdot10^6$. ▶

93. Доказать, что гармонический ряд останется расходящимся, если, не переставляя его членов, изменить знаки их так, чтобы за p положительными членами следовало бы q отрицательных членов $(p\neq q)$. Сходимость будет иметь место лишь при $p=q$.

◀ Указанный в условии ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2} - \ldots - \frac{1}{p+q} + \frac{1}{p+q+1} + \ldots + \frac{1}{2p+q} - \ldots,$$

в силу примера 66, сходится или расходится одновременно с рядом

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p}\right) - \left(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \ldots + \frac{1}{p+q}\right) + \left(\frac{1}{p+q+1} + \ldots + \frac{1}{2p+q}\right) - \ldots. \quad (1)$$

Пусть $p > q$. Поскольку справедливы оценки

$$S_2 = \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p}\right) - \left(\frac{1}{p+1} + \ldots + \frac{1}{p+q}\right) > 1 - \frac{q}{p} = (p-q)\frac{1}{p},$$

$$S_4 = S_2 + \left(\frac{1}{p+q+1} + \ldots + \frac{1}{2p+q}\right) - \left(\frac{1}{2p+q+1} + \ldots + \frac{1}{2p+2q}\right) >$$

$$> S_2 + \frac{p}{2p+q} - \frac{q}{2p+q} > (p-q)\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{2p+q}\right),$$

. . . .

$$S_{2n} > (p-q)\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{2p+q} + \ldots + \frac{1}{np+(n-1)q}\right) \equiv x_n > 0$$

и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, то ряд (1) расходится.

Пусть $p < q$. Тогда, оценивая частичные суммы ряда следующим образом:

$$S_1 < p, \quad S_2 < p - \frac{q}{p+q}, \quad S_3 < p - \frac{q-p}{p+q}, \quad S_4 < p - \frac{q-p}{p+q} - \frac{q}{2(p+q)}, \quad S_5 < p - \frac{q-p}{p+q}\left(1 + \frac{1}{2}\right), \ldots$$

$$\ldots, S_{2n} < p - \frac{q-p}{p+q}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right) - \frac{q}{n(p+q)}, \quad S_{2n+1} < p - \frac{q-p}{p+q}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right),$$

находим, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = -\infty$, т.е. ряд (1) расходится.

Наконец, пусть $p = q$. Тогда ряд (1) есть ряд лейбницева типа, следовательно, он сходится. ▶

Упражнения для самостоятельной работы

Исследовать сходимость следующих рядов:

31. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{\sqrt[100]{n}} \sin\left(\frac{100}{\sqrt{n}}\right)$. **32.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{(-1)^n}{n}} - 1\right) q^n$. **33.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin^3 n \ln\left(1 + \frac{n^2 + 0{,}1\cos n}{n^3+1}\right)$.

34. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \exp\left\{\frac{\ln^2 n}{n}\right\} \frac{\cos^5 n}{n \ln n}$. **35.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} n \operatorname{tg}\left(\sin\sqrt{\frac{n}{n^2+1}}\right) \sin\left(n + \frac{1}{n}\right)$.

36. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{1}{\sqrt{n}} \cos\frac{1}{n^2} \cdot (-1)^n$. **37.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(\pi\sqrt[3]{n^3+n})}{\ln^\alpha n}$. **38.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^2\sqrt{n}}{\ln^\alpha n} \sin\left(\pi\sqrt[3]{n^3+n^2}\right)$.

39. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2(-1)^n n}{\pi}\right)^{1+\frac{1}{n}} - 1\right)$. **40.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} \sum\limits_{k=1}^{n} k^p \cos^3 2n$, $p \in \mathbb{N}$. **41.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{n}\right)}{n^\alpha}$.

42. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^3+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^3+n}}\right)$. **43.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int\limits_0^{+\infty} \frac{1+x^n}{1+x^{2n}}\, dx$.

44. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^1 (1-x^2)^{n^2}\, dx \cdot \sin n$. **45.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^{\frac{\sin n}{n}} \frac{\sin x}{x}\, dx$.

46. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где a_n есть решение задачи

$$(n+2)a_{n+2} + 2(n+1)a_{n+1} + na_n = 0, \; a_1 = -1, \; a_2 = \tfrac{1}{2}.$$

Исследовать сходимость матричных рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, если:

47. $A_n = \begin{pmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ \sin 1 & -\cos 1 \end{pmatrix}^n \dfrac{\sin \frac{\pi n}{18}}{n}$. **48.** $A_n = \begin{pmatrix} 2^{\frac{1}{n}} - 1 & \operatorname{arctg} \frac{n^2}{n^3+2} \\ \frac{\sin n}{n} & \frac{\cos n}{n} \end{pmatrix} (-1)^n$.

§ 3. Действия над рядами

3.1. Сложение рядов.

Если ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad a_n, b_n \in \mathcal{L}, \tag{1}$$

сходятся в $\mathcal{L}$, то справедливы равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

где λ, μ — произвольные действительные или комплексные числа.

3.2. Правило Коши.

Под произведением двух рядов (1), где a_n, b_n — числа, понимается третий ряд, общий член которого имеет вид

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1.$$

Вообще говоря, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \neq \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Однако, если один из рядов сходится, а второй сходится абсолютно, то всегда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Эта формула справедлива и в том случае, когда все три ряда сходятся.

Найти суммы рядов:

94. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n}$.

◀ Поскольку

$$\cos \frac{2n\pi}{3} = 1 - 2\sin^2 \frac{n\pi}{3} = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & \text{если} \quad n \neq 3k, \quad k \in \mathbb{N}, \\ 1, & \text{если} \quad n = 3k, \end{cases}$$

и ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3n}}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходятся, то, на основании утверждения п.3.1, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5}\right) + \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8}\right) + \frac{1}{2^9} - \ldots =$$

$$= \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3n}} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = -\frac{2}{7}. \;▶$$

95. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{\left[\frac{n}{2}\right]} y^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$, $|xy| < 1$.

◄ В силу сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(xy)^n$, на основании утверждения п.3.1, имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{\left[\frac{n}{2}\right]} y^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} = 1 + y + xy + xy^2 + x^2y^2 + x^2y^3 + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(xy)^n + y\sum_{n=0}^{\infty}(xy)^n = (1+y)\sum_{n=0}^{\infty}(xy)^n = \frac{1+y}{1-xy}. \ ►$$

96. Показать, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!} = 1.$$

◄ Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ сходится, поэтому, согласно п.3.2, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n,$$

где

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{(k-1)!(n-k)!}, \quad a_k = \frac{1}{(k-1)!}, \quad b_k = \frac{(-1)^k}{(k-1)!}.$$

Поскольку $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!}(1-1)^n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, то

$$c_{n+1} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

что и требовалось показать. ►

97. Показать, что квадрат сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ является рядом расходящимся.

◄ Прежде всего заметим, что данный ряд сходится (условно) по признаку Лейбница. По правилу п.3.2, имеем

$$c_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}\cdot\frac{(-1)^{n-k+2}}{\sqrt{n-k+1}}\right) = (-1)^{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}}.$$

Поскольку $\frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}} \geqslant \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $k = \overline{1, n}$, то

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}} \geqslant \frac{n}{n} = 1.$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, в силу необходимого признака, расходится. ►

98. Проверить, что произведение двух расходящихся рядов

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n \quad \text{и} \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

есть абсолютно сходящийся ряд.

◀ Легко установить (хотя бы с помощью признака Коши), что эти ряды расходятся. По правилу перемножения рядов имеем

$$c_n = a_1 b_n + b_1 a_n + \sum_{k=2}^{n-1} a_k b_{n-k+1},$$

где

$$a_1 = 1,\ a_n = -\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1},\ b_1 = 1,\ b_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left(2^{n-1} + \frac{1}{2^n}\right),\ n = 2,\ 3,\ \ldots .$$

Следовательно,

$$c_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left(2^{n-1} + \frac{1}{2^n}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 4\cdot 3^{n-2}\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{2^k} - \frac{3^{n-2}}{2^{2n-1}}\sum_{k=2}^{n-1} 2^k = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = 4.\ ▶$$

Упражнения для самостоятельной работы

Используя правило Коши, перемножить следующие ряды и найти суммы произведений:

49. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}$. **50.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \sum\limits_{n=1}^{\infty} y^n$. **51.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$. **52.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

53. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{4}\right)^n\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$. **54.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$.

55. Доказать следующие свойства матричной экспоненты:

$$\text{a) } e^{x_1 A}e^{x_2 A} = e^{(x_1+x_2)A};\quad \text{b) } (e^{xA})^{-1} = e^{-xA},$$

где A — любая числовая квадратная матрица, $x_1,\ x_2,\ x \in \mathbb{R}$.

56. Показать, что в общем случае

$$e^A e^B \neq e^{A+B},$$

где A, B — квадратные матрицы.

57. Показать:

а) $(e^A)^* = e^{A^*}$, где A^* — эрмитово сопряженная матрица;

б) если $A^т = -A$, то матрица e^A — ортогональная;

в) если $A^* = -A$, то матрица e^A — унитарная.

§ 4. Функциональные последовательности и ряды. Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов

4.1. Понятие равномерной сходимости последовательностей рядов.

Определение 1. *Последовательность функций* (f_n), $f_n : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, *называется сходящейся поточечно к функции* $f : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, *если при каждом фиксированном* $x_0 \in X$ *числовая последовательность* $(f_n(x_0))$ *сходится к числу* $f(x_0)$, *т.е.* $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon, x_0)$ такое, что $\forall n > N$ *справедливо неравенство*

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Функция f называется *предельной* для последовательности (f_n).

Определение 2. *Последовательность функций* (f_n), $f_n : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, *называется* *равномерно сходящейся к функции* $f : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ *на множестве* X, *если* $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$ *такое, что* $\forall n > N \wedge \forall x \in X$ *выполняется неравенство*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

В этом случае пишут $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X.

Определение 3. *Функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_k(x) + \ldots, \tag{1}$$

где $u_k : X_1 \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $X_1 \supset X$, называется *сходящимся поточечно на множестве* X *к своей сумме* $S(x)$, $x \in X$, *если сходится поточечно последовательность его частичных сумм* $(S_n(x))$, *т.е.* $\forall x_0 \in X\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0) = S(x_0)$.

Определение 4. *Функциональный ряд* (1) *называется равномерно сходящимся к своей сумме* $S(x)$ *на множестве* X, *если последовательность частичных сумм* $(S_n(x))$ *этого ряда равномерно сходится на* X *к* $S(x)$.

4.2. Критерий Коши.

Для равномерной сходимости ряда (1), п.4.1, на множестве X необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$ такое, что $\forall n > N \wedge \forall p \in \mathbb{N} \wedge \forall x \in X$ выполнялось неравенство

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon.$$

4.3. Важнейшие достаточные признаки равномерной сходимости рядов.

Мажорантный признак Вейерштрасса. *Если* $\exists a_k \in \mathbb{R}$ *такие, что* $\forall x \in X$ *справедливы неравенства* $|u_k(x)| \leqslant a_k$, $k \in \mathbb{N}$, *и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, то ряд* (1), *п.4.1, сходится равномерно на* X.

Признак Дирихле. *Если частичные суммы ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ *равномерно ограничены на* X, *т.е.* $\exists M > 0$ *такое, что* $\forall x \in X \wedge \forall n \in \mathbb{N}$ *выполняется неравенство* $|S_n(x)| = \left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)\right| \leqslant M$, *а функциональная последовательность* $(b_n(x))$ *удовлетворяет двум условиям:*

а) $\forall x \in X : b_{n+1}(x) \leqslant b_n(x)\ \forall n > n_0$;

б) $b_n(x) \rightrightarrows 0$ *на* X *при* $n \to \infty$, *то функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x) \tag{1}$$

сходится равномерно на X.

Признак Абеля. *Ряд* (1) *сходится равномерно на* X, *если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ *сходится равномерно на* X, *а функции* b_k *удовлетворяют двум условиям:*

а) $\exists M > 0$ *такое, что* $\forall x \in X \wedge \forall k \in \mathbb{N}$ *выполняется неравенство* $|b_k(x)| \leqslant M$;

б) $\forall x_0 \in X$ *последовательность* $(b_k(x_0))$ *монотонна при* $k > k_0$.

4.4. Непрерывность предельной функции и суммы ряда.

Если последовательность непрерывных функций (f_n), $f_n : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, сходится равномерно на X к функции $f : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, то f непрерывна на X. Если все члены ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ непрерывны на X и ряд сходится равномерно на X к сумме $S(x)$, то функция S непрерывна на X.

4.5. Почленный предельный переход в рядах и функциональных последовательностях.

Если функциональный ряд (1), п.4.1, сходится равномерно в некоторой окрестности точки x_0 и если $\lim\limits_{x \to x_0} u_k(x) = c_k$, $k \in \mathbb{N}$, то числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ сходится, причем

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k.$$

Если последовательность функций (f_n), $n \in \mathbb{N}$, равномерно сходится в окрестности точки x_0 и $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = A_n$, то последовательность чисел (A_n), $n \in \mathbb{N}$, также сходится и

$$\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right).$$

4.6. Предельный переход под знаком интеграла и почленное интегрирование ряда.

Если последовательность интегрируемых функций (f_n), $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится равномерно на $[a, b]$ к функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, то $\forall x_0 \in [a, b]$:

$$\int_{x_0}^{x} f_n(t)\, dt \rightrightarrows \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \quad \forall x \in [a, b],\ n \to \infty.$$

Если ряд (1), п.4.1, члены которого интегрируемы на $[a, b]$, сходится равномерно на $[a, b]$, то справедливо равенство

$$\int_{x_0}^{x} S(t)\, dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_k(t)\, dt,$$

т.е. ряд (1), п.4.1, можно почленно интегрировать на отрезке $[x_0, x] \subset [a, b]$.

4.7. Предельный переход под знаком производной и почленное дифференцирование ряда.

Если последовательность непрерывно дифференцируемых функций (f_n), $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, а последовательность (f_n'), $n \in \mathbb{N}$, сходится равномерно к функции $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$, то функция f также дифференцируема на $[a, b]$ и $f'(x) = \varphi(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n'(x)$, т.е. допустим предельный переход под знаком производной.

Если ряд (1), п.4.1, с непрерывно дифференцируемыми членами сходится на $[a, b]$, а ряд производных

$$\sigma(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$$

сходится равномерно на $[a, b]$, то сумма ряда (1), п.4.1, дифференцируема на $[a, b]$, причем на этом отрезке выполняется равенство

$$S'(x) = \sigma(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x),$$

т.е. ряд (1), п.4.1, можно почленно дифференцировать.

Определить промежутки сходимости (абсолютной и условной) следующих функциональных рядов:

99. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^p \sin nx}{1 + n^q}$, $q > 0$, $0 < x < \pi$.

◀ Для сходимости ряда необходимо, чтобы $\frac{n^p}{1+n^q} = \frac{1}{n^{q-p}} \frac{1}{1+n^{-q}} \to 0$ при $n \to \infty$, т.е. чтобы $q > p$.

Абсолютная сходимость. Поскольку $|\sin nx| \geqslant \sin^2 nx = \frac{1-\cos 2nx}{2}$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{1+n^q} |\sin nx| \geqslant \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{1+n^q} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{1+n^q} n^p$$

расходится при $0 < q - p \leqslant 1$. Действительно, первый ряд справа, в силу теоремы 4, п.1.5, расходится к $+\infty$, поскольку $\frac{n^p}{1+n^q} \sim \frac{1}{n^{q-p}}$ при $n \to \infty$, а второй ряд справа при $0 < q-p \leqslant 1$, по признаку Дирихле, сходится, ибо

$$\left| \sum_{n=1}^{n} \cos 2kx \right| = \left| \frac{\sin nx \cos(n+1)x}{\sin x} \right| \leqslant \frac{1}{|\sin x|}$$

и $\frac{n^p}{1+n^q} \downarrow 0$ *при* $n \to \infty$.

Кроме того, поскольку $|\sin nx| \leqslant 1$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{1+n^q} |\sin nx| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{1+n^q},$$

в силу теорем 1, 4, п.1.5, сходится, если $q - p > 1$ $\left(\frac{n^p}{1+n^q} \sim \frac{1}{n^{q-p}} \text{ при } n \to \infty \right)$.

Таким образом, исследуемый ряд сходится абсолютно только при $q - p > 1$.

Условная сходимость. Представляя данный ряд в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{q-p}} \cdot \frac{1}{1+n^{-q}}$$

и пользуясь признаком Абеля, находим, что при $q - p > 0$ ряд сходится. Действительно, в этом случае последовательность $\left(\frac{1}{1+n^{-q}}\right) \uparrow 1$ при $n \to \infty$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{q-p}}$, в силу признака Дирихле, сходится. Следовательно, при $0 < q - p \leqslant 1$ исследуемый ряд сходится условно. ▶

100. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+y^n}$, $y \geqslant 0$.

◀ Пусть $0 \leqslant y \leqslant 1$. Тогда ряд, по признаку Коши, сходится при $|x| < 1$. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n+y^n}} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+y^n}} = |x| < 1.$$

Если $0 \leqslant y \leqslant 1$ и $x \geqslant 1$, то $\frac{x^n}{n+y^n} \geqslant \frac{x^n}{n+1} \geqslant \frac{1}{n+1}$. Следовательно, в силу теоремы 1, п.1.5, данный ряд расходится, ибо расходится гармонический ряд.

Если $0 \leqslant y \leqslant 1$ и $x < -1$, то общий член ряда к нулю не стремится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n+y^n} = +\infty$.

Если $0 \leqslant y \leqslant 1$, $x = -1$, то получим ряд лейбницева типа:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+y^n}.$$

Пусть $y > 1$. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{y}\right)^n \cdot \frac{1}{1+ny^{-n}},$$

в силу признака Коши, абсолютно сходится, если $|x| < y$.

При $x = \pm y$ общий член исследуемого ряда к нулю не стремится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y^n}{n+y^n} = 1$.

Итак, если $0 \leqslant y \leqslant 1$ и $|x| < 1$ или $|x| < y$ и $y > 1$, то ряд сходится абсолютно. Если же $x = -1$ и $0 \leqslant y \leqslant 1$, то данный ряд сходится лишь условно. ►

101. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(1+x^n)}{n^y}$, $x \geqslant 0$.

◄ Рассмотрим три случая: а) $0 \leqslant x < 1$; б) $x = 1$; в) $x > 1$. В случае а) имеем $\ln(1+x^n) \sim x^n$ при $n \to \infty$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^y}$, согласно признаку Коши, сходится при любом y, то, в силу теоремы 3, п.1.5, при таких же условиях сходится и исследуемый ряд.

В случае б) получаем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2}{n^y}$, который при $y > 1$ сходится по п.1.4.

Наконец, в случае в) имеем

$$\ln(1+x^n) = n\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^n}\right) \sim n\ln x + \frac{1}{x^n}, \ n \to \infty.$$

Поскольку ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln x}{n^{y-1}}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^y x^n}$ сходятся при $y > 2$, то данный ряд, по теореме 3, п.1.5 также сходится при $y > 2$. ►

102. Доказать, что если ряд Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n^x}$ сходится при $x = x_0$, то этот ряд сходится также при $x > x_0$.

◄ К ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} \cdot \frac{1}{n^{x-x_0}}$$

применим признак Абеля. Здесь ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$ сходится по условию, $\left(\frac{1}{n^{x-x_0}}\right)$ — монотонная и ограниченная единицей последовательность $\forall x > x_0$.

Следовательно, по признаку Абеля, ряд сходится также при $x > x_0$. ►

103. Доказать, что для равномерной сходимости на множестве X последовательности (f_n), $f_n : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, к предельной функции $f : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_X r_n(x)\right) = 0,$$

где

$$r_n(x) = |f(x) - f_n(x)|.$$

◄ *Необходимость.* Пусть $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X, $n \to \infty$. По определению 2, п.4.1, это означает, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$ такое, что $\forall n > N \land \forall x \in X$ выполняется неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Отсюда следует, что $\sup\limits_X r_n(x) \leqslant \varepsilon$.

Достаточность. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sup\limits_X r_n(x)\right) = 0$. Тогда по определению предела числовой последовательности $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$ такое, что $\forall n > N$ будет $\sup\limits_X r_n(x) < \varepsilon$. Но поскольку $r_n(x) \leqslant \sup\limits_X r_n(x)$, то $r_n(x) < \varepsilon\ \forall x \in X$. Последнее, по определению 2, п.4.1, означает, что $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X при $n \to \infty$. ►

Исследовать на равномерную сходимость следующие функции:

104. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

◄ Очевидно, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Поскольку

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}, \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\right) = \frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0,$$

то по критерию, доказанному в примере 103, $f_n(x) \rightrightarrows 0$. ►

105. $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

◄ Имеем $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, $x \in [0, 1]$. Функция f_n достигает абсолютного максимума во внутренней точке сегмента: $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$, $x_n \in]0, 1[$. Таким образом, имеем

$$\sup_{x\in[0,1]} r_n(x) = f_n(x_n) = \frac{1}{4}, \quad \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in[0,1]} r_n(x)\right) = \frac{1}{4} \neq 0.$$

Отсюда следует, что последовательность $(f_n(x))$ стремится к нулю неравномерно. ►

106. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n+x}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

◄ Нетрудно видеть, что $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n+x} = x$ и справедлива оценка $\sup\limits_{x\in[0,1]}\left|\frac{nx}{1+n+x} - x\right| \leqslant \frac{2}{n+1}$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x) - f(x)|\right) = 0, \quad f_n(x) \rightrightarrows x. \ ►$$

107. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$, $-\infty < x < +\infty$.

◄ При $n \to \infty$ $f_n(x) \to |x|$ на интервале $]-\infty, +\infty[$, причем

$$\sup_{x\in]-\infty,+\infty[}\left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} - |x|\right| = \sup_{x\in]-\infty,+\infty[}\frac{1}{n^2\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x|\right)} = \frac{1}{n},$$

поэтому $f_n(x) \rightrightarrows |x|$ на всей числовой прямой. ►

108. $f_n(x) = n\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$, $0 < x < +\infty$.

◄ Очевидно

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad 0 < x < +\infty.$$

Поскольку

$$\sup_{0<x<+\infty}\left|\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}}\right| = \sup_{0<x<+\infty}\frac{1}{2n\sqrt{x}\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}\right)^2} = +\infty,$$

то, по утверждению примера 103, последовательность сходится неравномерно. ►

109. а) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$, $-\infty < x < +\infty$;

б) $f_n(x) = \sin\dfrac{x}{n}$, $-\infty < x < +\infty$.

◄ Имеем:

а) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin nx}{n} = 0$;

б) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{x}{n} = 0$.

Поскольку в случае а)

$$\sup_{-\infty<x<+\infty} f_n(x) = \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

а в случае б)

$$\sup_{-\infty<x<+\infty} \left|\sin \frac{x}{n}\right| = 1$$

(достигается при $x = \frac{\pi n}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$), то, в силу примера 103, заключаем, что в случае а) $f_n(x) \rightrightarrows 0$, а в случае б) последовательность сходится неравномерно. ►

110. а) $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$, $0 < x < +\infty$; б) $f_n(x) = x \operatorname{arctg} nx$, $0 < x < +\infty$.

◄ а) Имеем $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg} nx = \frac{\pi}{2}$. Поскольку

$$\sup_{0<x<+\infty} \left|\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} nx\right| = \lim_{x\to+0} \left|\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} nx\right| = \frac{\pi}{2},$$

то последовательность, согласно примеру 103, сходится неравномерно.

б) Здесь $f(x) = \frac{\pi x}{2}$, $r_n(x) = x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} nx\right)$. Используя равенство $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} nx = \operatorname{arctg} \frac{1}{nx}$, $x > 0$ и неравенство $\operatorname{arctg} \alpha < \alpha$, $\alpha > 0$, имеем оценку

$$\left|x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} nx\right)\right| = \left|x \operatorname{arctg} \frac{1}{nx}\right| < x\frac{1}{nx} = \frac{1}{n} \to 0, \ n \to \infty,$$

независимо от $x \in]0, +\infty[$. Следовательно, по определению 2, п.4.1 $f_n(x) \rightrightarrows \frac{\pi x}{2}$. ►

111. $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$: а) на конечном интервале $]a, b[$; б) на интервале $]-\infty, +\infty[$.

◄ В обоих случаях легко находим предельную функцию $f : x \mapsto e^x$. Далее, в случае а) представляем последовательность в виде

$$f_n(x) = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right). \tag{1}$$

Здесь $n > N$, где N выбирается из очевидного условия $1 + \frac{x}{N} > 0$ при $x \in]a, b[$. Применяя к функции $x \mapsto \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$, формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, из (1) получаем

$$f_n(x) = \exp\left(x - \frac{x^2\xi_n^2}{2n}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку

$$e^x\left(1 - \exp\left\{-\frac{x^2\xi_n^2}{2n}\right\}\right) < e^b\left(1 - \exp\left\{-\frac{M^2}{2n}\left(1 - \frac{M}{n}\right)^{-2}\right\}\right),$$

где $M = \max(|a|, |b|)$, стремится к нулю при $n \to \infty$ независимо от $x \in]a, b[$, то по определению 2, п.4.1, $f_n(x) \rightrightarrows e^x$ на $]a, b[$.

В случае б) получаем

$$\lim_{x\to+\infty} \left|e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right| = +\infty,$$

поэтому $\sup\limits_{-\infty<x<+\infty} r_n(x) = +\infty$. Таким образом, последовательность $(f_n(x))$ на всей числовой прямой сходится неравномерно. ►

112. $f_n(x) = n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right)$, $1 \leqslant x \leqslant a$.

◄ Легко найти, что $f_n(x) \to \ln x$ на $[1, a]$ при $n \to \infty$. Далее, применяя формулу Тейлора, находим

$$r_n(x) = \left|n(x^{\frac{1}{n}} - 1) - \ln x\right| = \left|n(e^{\frac{1}{n}\ln x} - 1) - \ln x\right| =$$

$$= \left|n\left(1 + \frac{1}{n}\ln x - \frac{\ln^2 x}{2n^2}e^{\xi_n} - 1\right) - \ln x\right| = \frac{\ln^2 x}{2n}e^{\xi_n} < \frac{\ln^2 a}{2n}e^{\xi_n} \to 0$$

при $n \to \infty$, $0 < \xi_n < \frac{\ln a}{n}$. Следовательно, $f_n(x) \rightrightarrows \ln x$ на $[1, a]$. ►

113.
$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}, \\ n^2\left(\frac{2}{n} - x\right), & \text{если} \quad \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n}, \\ 0, & \text{если} \quad x \geqslant \frac{2}{n}, \end{cases}$$
на $[0, 1]$.

◄ Поскольку $f_n(0) = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 0$. Далее, $\forall x \in]0, 1]\ \exists N : \forall n > N$ будет $x > \frac{2}{n}$. Следовательно, $f_n(x) = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ при $x \in [0, 1]$. Таким образом, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ при $x \in [0, 1]$.

Поскольку $\sup\limits_{x\in[0,1]} f_n(x) = n$ (*и достигается при* $x = \frac{1}{n}$), то $\lim\limits_{n\to\infty} (\sup f_n(x)) = +\infty$, в силу чего последовательность сходится неравномерно. ►

114. Пусть f — произвольная функция, определенная на отрезке $[a, b]$ и $f_n(x) = \frac{[nf(x)]}{n}$. Доказать, что $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ при $a \leqslant x \leqslant b$, $n \to \infty$.

◄ Из определения целой части следует, что $[nf(x)] = nf(x) - p_n(x)$, $0 \leqslant p_n(x) < 1$. Поэтому $f_n(x)$ можно представить в виде $f_n(x) = f(x) - \frac{p_n(x)}{n}$. Отсюда находим $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, а также $|f_n(x) - f(x)| = \frac{p_n(x)}{n} \leqslant \frac{1}{n} \to 0$, т.е. $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$. ►

Исследовать на равномерную сходимость следующие ряды:

115. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ на отрезке $[-1, 1]$.

◄ Оценивая остаток ряда следующим образом:
$$|S(x) - S_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$
где $S(x)$, $(S_n(x))$ — соответственно сумма и последовательность частичных сумм данного ряда, сходящегося в силу признака сравнения $\left(\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}\right| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty\right)$, заключаем, что рассматриваемый ряд сходится равномерно. ►

116. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ на интервале $]0, +\infty[$.

◄ Поскольку сумма этого ряда $S(x) = e^x$, то остаток ряда $r_n(x) = e^x - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Но $\sup\limits_{0<x<+\infty} |r_n(x)| = +\infty$ (функция $x \mapsto e^x$ стремится к $+\infty$ при $x \to +\infty$ быстрее любой степенной функции $x \mapsto x^n$), поэтому ряд сходится неравномерно. ►

117. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (1 - x)x^n$ на отрезке $[0, 1]$.

◄ Частичная сумма ряда $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} (1 - x)x^k = 1 - x^{n+1}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; отсюда находим сумму ряда:
$$S(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & \text{если} \quad x = 1. \end{cases}$$
Следовательно, $\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} |S_n(x) - S(x)| = 1$, т.е. данный ряд сходится неравномерно. ►

Замечание. Если функциональный ряд непрерывных на отрезке функций сходится на этом отрезке к разрывной функции, то ряд сходится неравномерно.

118. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)}$, $0 < x < +\infty$.

◀ Находим частичную сумму ряда:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{((k-1)x+1)(kx+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(k-1)x+1} - \frac{1}{kx+1} \right) = 1 - \frac{1}{nx+1},$$

откуда получаем, что $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = 1$, $0 < x < +\infty$. Далее, поскольку $\sup\limits_{0<x<+\infty} \frac{1}{nx+1} = 1$, то ряд сходится неравномерно. ▶

119. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\ldots(1+nx)}$: а) $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$; б) $\varepsilon \leqslant x < +\infty$.

◀ Представляя общий член ряда $a_n(x)$ в виде

$$a_n(x) = \frac{1}{(1+x)(1+2x)\ldots(1+(n-1)x)} - \frac{1}{(1+x)(1+2x)\ldots(1+(n-1)x)(1+nx)},$$

находим частичную сумму ряда:

$$S_n(x) = 1 - \frac{1}{(1+x)(1+2x)\ldots(1+nx)}.$$

Отсюда следует, что

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x > 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0. \end{cases}$$

Далее, в случае а) имеем $\sup\limits_{0<x<+\infty} |S(x) - S_n(x)| = |S(+0) - S_n(+0)| = 1$, поэтому ряд сходится неравномерно. В случае б) находим

$$\sup_{\varepsilon\leqslant x<+\infty} |S(x) - S_n(x)| = \frac{1}{(1+\varepsilon)(1+2\varepsilon)\ldots(1+n\varepsilon)} \to 0$$

при $n \to \infty$, в силу чего ряд сходится равномерно. ▶

Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость в указанных промежутках следующих функциональных рядов:

120. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$, $|x| < +\infty$.

◀ Найдем $\sup\limits_{|x|<+\infty} |a_n(x)|$, где $a_n(x)$ — общий член ряда. Имеем

$$\sup_{|x|<+\infty} |a_n(x)| = \sup_{|x|<+\infty} \left| \frac{nx}{1+n^5x^2} \right| = \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

и достигается при $x_n = \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ является мажорантным для данного ряда. Так как мажорантный ряд сходится, то исходный ряд, согласно признаку Вейерштрасса, сходится равномерно. ▶

121. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n})$, $\frac{1}{2} \leqslant |x| \leqslant 2$.

◀ Легко найти, что

$$\sup_{\frac{1}{2}\leqslant|x|<2} (x^n + x^{-n}) = 2^n + \frac{1}{2^n} < 2^{n+1}.$$

Поскольку, к тому же, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} 2^{n+1}$, в силу признака д'Аламбера, сходится, то исследуемый ряд сходится равномерно. ▶

122. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}$, $|x| < a$, где $a > 0$.

◀ Мажорантным для данного ряда является ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}$, сходимость которого при $a < 1$ очевидна, так как в этом случае

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!} < \sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{a}{1-a}.$$

Пусть $a \geqslant 1$. Тогда, обозначая через S_n последовательность частичных сумм мажорантного ряда, в силу оценки

$$S_n < S_{2n+1} = \frac{a}{0!} + \frac{a^2}{1!} + \frac{a^3}{1!} + \ldots + \frac{a^{2n}}{n!} + \frac{a^{2n+1}}{n!} \leqslant a + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{2k+1}}{k!} = S,$$

получим $S_n \leqslant S$. Следовательно, последовательность (S_n), будучи монотонной возрастающей, ограничена сверху. А тогда, по известной теореме, она сходится, т.е. сходится мажорантный ряд. ▶

123. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n}\right)$, $|x| < a$.

◀ Исходя из неравенства

$$0 \leqslant \ln\left(1 + \frac{x^2}{n \ln n}\right) \leqslant \frac{x^2}{n \ln^2 n} < \frac{a^2}{n \ln^2 n}$$

и сходимости числового ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{a^2}{n \ln^2 n}$, мажорантного для данного функционального, приходим к выводу о равномерной сходимости предложенного ряда. ▶

Исследовать на равномерную сходимость в указанных промежутках следующие функциональные ряды:

124. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$: а) на отрезке $\varepsilon \leqslant x \leqslant 2\pi - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$; б) на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

◀ а) Поскольку частичные суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx$ ограничены:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| = \left|\frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \leqslant \frac{1}{\sin \frac{\varepsilon}{2}},$$

а последовательность $\left(\frac{1}{n}\right) \downarrow 0$ при $n \to \infty$, то, по признаку Дирихле, ряд сходится равномерно.

б) В этом случае указанная сумма не является ограниченной по совокупности переменных x и n, поскольку при $x = \frac{\pi}{n}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{n} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n} \to +\infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, признак Дирихле неприменим.

Воспользуемся критерием Коши. Взяв $\varepsilon = 0{,}1$, оценим разность

$$|S_{2n}(x) - S_n(x)|\Big|_{x=\frac{1}{n}} = \left|\frac{\sin(n+1)x}{n+1} + \frac{\sin(n+2)x}{n+2} + \ldots + \frac{\sin 2nx}{2n}\right|\Bigg|_{x=\frac{1}{n}} =$$

$$= \frac{\sin\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n+1} + \frac{\sin\left(1 + \frac{2}{n}\right)}{n+2} + \ldots + \frac{\sin 2}{2n} \geqslant \frac{\sin 1}{2} > \varepsilon$$

при любом n. Следовательно, по критерию Коши, последовательность сходится неравномерно, т.е. неравномерно сходится исследуемый ряд (сходимость ряда при каждом фиксированном $x \in]0, 2\pi[$ следует из того же признака Дирихле, а при $x = 0$ и $x = 2\pi$ сходимость ряда очевидна). ►

125. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{3^n x}$, $0 < x < +\infty$.

◄ При каждом фиксированном $x > 0$ имеем $2^n \sin\frac{1}{3^n x} \sim \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{x}$ при $n \to \infty$. Отсюда следует, что по теореме 3, п.1.5, данный ряд сходится. Для исследования на равномерную сходимость ряда применим критерий Коши. Пусть $\varepsilon = 1$, $p = n$, $x = \frac{1}{3^n}$. Тогда

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \left|2^{n+1}\sin\frac{1}{3} + 2^{n+2}\sin\frac{1}{3^2} + \ldots + 2^{2n}\sin\frac{1}{3^n}\right| > 2^{n+1}\sin\frac{1}{3} > \varepsilon, \quad n > 1,$$

т.е. ряд сходится неравномерно. ►

126. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}$, $0 \leqslant x < +\infty$.

◄ Поскольку частичные суммы, в силу оценки

$$\left|\sum_{n=1}^{n} \sin x \sin kx\right| = 2\left|\cos\frac{x}{2}\right|\left|\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x\right| \leqslant 2,$$

ограничены, а функциональная последовательность $\left((n+x)^{-\frac{1}{2}}\right)$ равномерно по x $\left(\frac{1}{\sqrt{n+x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0\right)$ и монотонно по n

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n+x}} - \frac{1}{\sqrt{n+1+x}} = \frac{1}{\sqrt{(n+x)(n+1+x)}(\sqrt{n+1+x} + \sqrt{n+x})} > 0\right)$$

стремится к нулю при $n \to \infty$, то, согласно признаку Дирихле, ряд сходится равномерно. ►

127. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}$, $0 \leqslant x < +\infty$.

◄ Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ сходится (см. пример 77), а функции $x \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}$ ограничены числом 1 и при каждом фиксированном $x \geqslant 0$ образуют монотонную последовательность. Следовательно, по признаку Абеля, данный ряд сходится равномерно. ►

128. Доказать, что абсолютно и равномерно сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, где

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2^{-(n+1)}, \\ \frac{1}{n}\sin^2(2^{n+1}\pi x), & \text{если} \quad 2^{-(n+1)} < x < 2^{-n}, \\ 0, & \text{если} \quad 2^{-n} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

нельзя мажорировать сходящимся числовым рядом с неотрицательными членами.

◄ Нетрудно найти, что

$$S_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{1}{k}\sin^2(2^{k+1}\pi x), & \text{если} \quad 2^{-(k+1)} \leqslant x \leqslant 2^{-k}, \ k = \overline{1, n}, \\ 0, & \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2^{-(n+1)}, \end{cases}$$

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{1}{k}\sin^2(2^{k+1}\pi x), & \text{если} \quad 2^{-(k+1)} \leqslant x \leqslant 2^{-k}, \ k = \overline{1, \infty}, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0, \end{cases}$$

где $(S_n(x))$ и $S(x)$ — последовательность частичных сумм и сумма данного ряда соответственно. Далее,

$$S(x) - S_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{1}{k}\sin^2(2^{k+1}\pi x), & \text{если} \quad 2^{-(k+1)} \leqslant x \leqslant 2^{-k},\ k = \overline{n+1, \infty}, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0. \end{cases}$$

Поскольку $\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} |S(x) - S_n(x)| = \frac{1}{n+1}$ (достигается при $x_n = \frac{3}{2^{n+3}}$) стремится к нулю при $n \to \infty$, то ряд сходится равномерно.

Абсолютная сходимость ряда следует из того, что при фиксированном $x \in [0, 1]$ он содержит не более одного отличного от нуля члена.

Пусть c_n — члены числового мажорирующего ряда. По условию, $c_n \geqslant \sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} |f_n(x)|$. Поскольку $\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} |f_n(x)| = \frac{1}{n}$ и достигается при $x = \frac{3}{2^{n+2}}$, то $c_n \geqslant \frac{1}{n}$. Однако ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, поэтому исходный ряд нельзя мажорировать сходящимся числовым рядом с неотрицательными членами. ►

129. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$, члены которого – монотонные функции на сегменте $[a, b]$, сходится абсолютно в концевых точках этого сегмента, то данный ряд сходится абсолютно и равномерно на сегменте $[a, b]$.

◄ Принимая во внимание монотонность функций φ_n, оценим остаток ряда $r_n(x)$. При $x \in [a, b]$ имеем

$$|r_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |\varphi_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \max(|\varphi_k(a)|, |\varphi_k(b)|). \tag{1}$$

Поскольку ряд с членами $\varphi_n(x)$ сходится абсолютно при $x = a$ и $x = b$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$ такое, что $\forall n > N$ выполняются неравенства

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\varphi_k(a)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} |\varphi_k(b)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Так как $\max(|\varphi_k(a)|, |\varphi_k(b)|) \leqslant |\varphi_k(a)| + |\varphi_k(b)|$, то на основании неравенств (2), неравенство (1) принимает вид

$$|r_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} (|\varphi_k(a)| + |\varphi_k(b)|) < \varepsilon,$$

откуда следует, что $r_n(x) \rightrightarrows 0$, $x \to \infty$, т.е. исследуемый ряд сходится равномерно.

Абсолютная сходимость ряда вытекает из оценки (1). ►

130. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ сходится равномерно при $x \geqslant 0$.

◄ Функции $x \mapsto \frac{1}{n^x}$ ограничены единицей и при каждом $x \geqslant 0$ образуют монотонную последовательность $\left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \geqslant 0\right)$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по условию; поэтому, по признаку Абеля, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ сходится равномерно при $x \geqslant 0$. ►

131. Показать, что функция $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ непрерывна и имеет непрерывную производную в области $-\infty < x < +\infty$.

◀ Функции $x \mapsto \sin nx$, $x \mapsto \cos nx$ непрерывны в указанной области. Кроме того, ряды
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2},$$
в силу признака Вейерштрасса, сходятся равномерно. Поэтому, во-первых, почленное дифференцирование данного ряда, согласно п.4.7, возможно; во-вторых, согласно п.4.4, функции f и f' непрерывны. ▶

132. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(nxe^{-nx} - (n-1)xe^{-(n-1)x})$ сходится неравномерно на $[0, 1]$, однако его сумма есть значение функции, непрерывной на этом отрезке.

◀ Имеем
$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(kxe^{-kx} - (k-1)xe^{-(k-1)x}) = nxe^{-nx}, \quad S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = 0, \quad x \in [0, 1].$$
Таким образом, S — непрерывная на $[0, 1]$ функция. Однако, $\sup\limits_{x\in[0,1]} |S_n(x) - S(x)| = \frac{1}{e}$, поэтому ряд сходится к своей сумме неравномерно. ▶

133. Определить области существования функции f и исследовать ее на непрерывность, если: а) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x + \frac{1}{n}\right)^n$; б) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x + n(-1)^n}{x^2 + n^2}$.

◀ а) По признаку Коши, ряд сходится, если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|x + \frac{1}{n}\right| < 1$, т.е. при $|x| < 1$ (и расходится при $x \geqslant 1$, так как в этом случае общий член ряда не стремится к нулю). Функция f, таким образом, определена при $|x| < 1$. При $|x| \leqslant r < 1$ функциональный ряд сходится равномерно, поскольку сходится мажорантный для него ряд с членами $\left(r + \frac{1}{n}\right)^n$. Поэтому, на основании п.4.4, можно утверждать, что функция f непрерывна при $|x| \leqslant r < 1$, т.е. непрерывна на интервале $]-1, 1[$.

б) Функция $f_n : x \mapsto \frac{x+n(-1)^n}{x^2+n^2}$ непрерывна при $-\infty < x < +\infty$, а ряд с членами $f_n(x)$ равномерно сходится на всей числовой прямой. В самом деле, представив функции f_n в виде
$$f_n : x \mapsto \frac{n^2}{x^2 + n^2}\left(\frac{x}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n}\right),$$
замечаем, что функции $\varphi_n : x \mapsto \frac{n^2}{x^2+n^2}$ ограничены в совокупности ($\varphi_n(x) \leqslant 1$) и при каждом x образуют монотонную последовательность по n, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ сходится равномерно на каждом интервале $]-L, L[$, в силу чего ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, по признаку Абеля, сходится равномерно на $]-L, L[$. Поэтому сумма ряда является непрерывной функцией на $]-L, L[$. В силу произвольности числа L, утверждаем, что сумма ряда непрерывна на всей числовой прямой. ▶

134. Доказать, что дзета-функция Римана
$$\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$
непрерывна в области $x > 1$ и имеет в этой области непрерывные производные всех порядков.

◀ Пусть $x \geqslant x_0 > 1$. Тогда, в силу сходимости ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^p n}{n^{x_0}}, \quad p \in \mathbb{Z}_0, \tag{1}$$

и признака Вейерштрасса, заключаем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^p n}{n^x} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^p n}{n^{x_0}}$$

сходится равномерно при $x \geqslant x_0 > 1$. Так как, кроме того, функции $x \mapsto n^{-x}$ непрерывны в указанной области, то, согласно п.4.4, функции

$$x \mapsto \zeta^{(p)}(x) = (-1)^p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^p n}{n^x}$$

также непрерывны при $x \geqslant x_0 > 1$, т.е. при $x > 1$.

Сходимость ряда (1) вытекает из признаков сравнения п.1.5 и оценки $\ln^p n \leqslant n^{\frac{x_0-1}{2}}$, $x_0 > 1$, справедливой при достаточно большом n. ►

135. Доказать, что тэта-функция

$$\theta : x \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

определена и бесконечно дифференцируема при $x > 0$.

◄ Сходимость данного ряда вытекает из сходимости ряда с общим членом $e^{-\pi|n|x}$ и признака сравнения п.1.5 ($e^{-\pi n^2 x} \leqslant e^{-\pi|n|x}$), т.е. функция θ определена при $x > 0$.

Далее, рассмотрим ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^{2p} e^{-\pi n^2 x_0}, \quad p \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

где $x \geqslant x_0 > 0$, являющийся мажорирующим по отношению к ряду

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^{2p} e^{-\pi n^2 x}. \tag{2}$$

Поскольку ряд (1), по признаку Коши, сходится, то, по признаку Вейерштрасса, ряд (2) сходится равномерно. Следовательно, согласно п.4.7, функция θ любое число раз дифференцируема при $x \geqslant x_0 > 0$. В силу произвольности числа x_0, сделанное заключение пригодно при $x > 0$. ►

136. Определить область существования функции f и исследовать ее на дифференцируемость, если:

а) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}$; б) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2+x^2}$.

◄ Функциональная последовательность $\left(\frac{x}{n+x}\right)$ при $x \neq -n$ монотонно по n стремится к нулю. Следовательно, по признаку Лейбница, ряд сходится, т.е. функция f существует при всех $x \neq -n$.

Поскольку функции $x \mapsto \left(\frac{x}{n+x}\right)'_x = \frac{n}{(n+x)^2}$ непрерывны при $x \neq -n$ и ряд

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{(n+x)^2},$$

в силу признака Дирихле, сходится равномерно на каждом замкнутом множестве числовой прямой, не содержащем точек $x = -1, -2, \ldots$, то почленное дифференцирование ряда а) при $x \neq -n$, $n \in \mathbb{N}$, возможно.

б) Ряд сходится равномерно, по признаку Вейерштрасса, при всех конечных x. Действительно, здесь $\frac{|x|}{n^2+x^2} \leqslant \frac{A}{n^2}$, $A = \text{const}$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится. Следовательно, функция f существует при всех $x \in]-\infty, +\infty[$.

Далее, выполняя формальное дифференцирование ряда, получаем

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \operatorname{sgn} x - x|x|}{(n^2+x^2)^2}, \quad x \neq 0. \tag{1}$$

Поскольку $\varphi_n(x) = \frac{n^2 \operatorname{sgn} x - x|x|}{(n^2+x^2)^2} \leqslant \frac{n^2+A^2}{n^4} \leqslant \frac{2n^2}{n^4} = \frac{2}{n^2}$ при $n \geqslant n_0$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ сходится, то, по признаку Вейерштрасса, ряд (1) сходится равномерно при $|x| < A$. А тогда, принимая во внимание непрерывность функций φ_n при $x \neq 0$ и учитывая п.4.7, заключаем, что почленное дифференцирование ряда б) справедливо.

Для исследования на дифференцируемость ряда б) в точке $x = 0$ рассмотрим

$$\lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \left(\frac{|\Delta x|}{\Delta x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + (\Delta x)^2} \right). \tag{2}$$

Здесь ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+(\Delta x)^2}$ сходится равномерно по признаку Вейерштрасса. Поэтому, согласно п.4.5,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+(\Delta x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty. \tag{3}$$

Тогда, как следует из (2), с учетом (3) можно написать $f'_+(0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $f'_-(0) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Таким образом, функция f в точке $x = 0$ не дифференцируема. ►

137. При каких значениях параметра α: а) последовательность

$$(f_n(x)), \quad f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}, \quad x \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

сходится на отрезке $[0, 1]$; б) последовательность (1) сходится равномерно на $[0, 1]$; в) возможен предельный переход под знаком интеграла:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx?$$

◄ а) Если $x > 0$, то, используя правило Лопиталя, легко проверить, что $\lim\limits_{y\to+\infty} y^\alpha x e^{-xy} = 0$ при любом α. При $x = 0$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 0$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ при всех $x \in [0, 1]$.

б) Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in[0,1]} n^\alpha x e^{-nx} \right) = \frac{1}{e} \lim_{n\to\infty} n^{\alpha-1} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \alpha < 1, \\ \frac{1}{e}, & \text{если} \quad \alpha = 1, \\ +\infty, & \text{если} \quad \alpha > 1, \end{cases}$$

то, на основании утверждения примера 103, данная последовательность сходится равномерно только при $\alpha < 1$.

в) Поскольку $\int\limits_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = 0$, а $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(\frac{1}{n^2} - e^{-n} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \right) \right) n^\alpha \right)$ равен нулю лишь при $\alpha < 2$, то предельный переход под знаком интеграла возможен только при $\alpha < 2$. ►

138. Показать, что последовательность $(f_n(x))$, $f_n(x) = nx(1-x)^n$, $n \in \mathbb{N}$, сходится неравномерно на сегменте $[0, 1]$, однако

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

◀ Очевидно, предельная функция равна нулю на $[0, 1]$. Далее,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in[0,1]}(nx(1-x)^n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{1}{e} \neq 0,$$

поэтому последовательность $(f_n(x))$ сходится неравномерно. В то же время

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x(1-x)^n\,dx = \lim_{n\to\infty} n\int_0^1 (1-u)u^n\,du = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)} = 0. \ ▶$$

Найти:

139. $\lim\limits_{x\to 1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\dfrac{x^n}{x^n+1}$.

◀ Данный ряд, согласно признаку Абеля, сходится равномерно в области $x \geqslant 0$. Кроме того, $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{x^n}{x^n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$, поэтому, согласно п.4.5, возможен предельный переход под знаком суммы:

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{x^n}{x^n+1} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{1}{2}\ln 2. \ ▶$$

140. $\lim\limits_{x\to 1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{n+1})$.

◀ Поскольку данный ряд сходится неравномерно на $[0, 1]$, то мы не имеем права переходить к пределу под знаком суммы. Поэтому найдем этот предел, предварительно вычислив сумму данного ряда. Имеем

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n = \lim_{x\to 1-0}(\lim_{n\to\infty}(1-x^n)) = \lim_{x\to 1-0}\left\{\begin{array}{lll} 1, & \text{если} & 0 \leqslant x < 1, \\ 0, & \text{если} & x = 1 \end{array}\right\} = 1. \ ▶$$

141. $\lim\limits_{x\to +0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n n^x}$.

◀ Данный ряд, в силу признака Вейерштрасса, сходится равномерно при $x \geqslant 0$. Поэтому, согласно п.4.5, имеем

$$\lim_{x\to +0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x} = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to +0}\frac{1}{2^n n^x} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1. \ ▶$$

142. $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{1+n^2x^2}$.

◀ Поскольку $\sup\limits_{-\infty<x<+\infty}\frac{x^2}{1+n^2x^2} = \frac{1}{n^2}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, то, по признаку Вейерштрасса, данный ряд сходится равномерно. Замечая еще, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+n^2x^2} = \frac{1}{n^2}$, на основании п.4.5 переходим к пределу под знаком суммы:

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{1+n^2x^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}. \ ▶$$

143. Возможно ли почленное дифференцирование ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}$?

◀ Функции $x \mapsto \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$, непрерывно дифференцируемы при $|x| < \infty$. На этом же интервале функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}$, как следует из теоремы 3, п.1.5 $\left(\operatorname{arctg} \frac{x}{n^2} \sim \frac{x}{n^2}\right.$ при $\left. n \to \infty\right)$, сходится. Кроме того, ряд производных $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+x^2}$, в силу признака Вейерштрасса, сходится равномерно при $|x| < \infty$. Следовательно, согласно п.4.7, почленное дифференцирование ряда возможно. ▶

144. Возможно ли почленное интегрирование ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}\right)$ на сегменте $[0, 1]$?

◀ Данный функциональный ряд сходится на $[0, 1]$ неравномерно. Действительно, для частичной суммы $S_n(x)$ и суммы $S(x)$ ряда имеем

$$S_n(x) = -x + x^{\frac{1}{2n+1}}, \quad S(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x = 0, \\ 1 - x, & \text{если} \quad 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Видим, что сумма ряда – разрывная функция, поэтому ряд не может сходиться равномерно. Следовательно, воспользоваться утверждением п.4.6 мы не имеем права. Тем не менее, поскольку

$$\int_0^1 S(x)\, dx = \frac{1}{2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}\right) dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2},$$

то почленное интегрирование ряда возможно. ▶

Упражнения для самостоятельной работы

Исследовать на равномерную сходимость следующие функциональные семейства:

58. а) $f_y(x) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ при $y \to +\infty$, $x \in]0, +\infty[$;

б) $f_y(x) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ при $y \to +0$, $x \in]0, +\infty[$;

в) $f_y(x) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ при $y \to +0$, $x \in]1, +A[$;

г) $f_y(x) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ при $y \to +0$, $x \in]1, +\infty[$.

59. $f_y(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2y}$, $x \in]0, 1[$: а) при $y \to 1$; б) при $y \to 2$.

60. $f_y(x) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{\frac{y}{x}+\frac{x}{y}}}$, $x \in]1, +\infty[$: a) при $y \to +\infty$; b) при $y \to +0$.

61. $f_y(x) = \frac{1}{x}(e^{xy} - 1)$, $x \in]0, +\infty[$: а) при $y \to +0$; б) при $y \to -0$; в) при $y \to -\infty$; г) при $y \to 1$.

62. $f_y(x) = \frac{y \operatorname{arctg}(xy)}{y+1}$, $x \in [1, +\infty[$: а) при $y \to +0$; б) при $y \to +\infty$.

63. $f_y(x) = y \ln(x^2 + y^2)$, $x \in]0, 1[$: а) при $y \to 0$; б) при $y \to 1$.

Исследовать на равномерную сходимость функциональные последовательности:

64. $f_n(x) = e^{-nx}$: а) $x \in]0, 1[$; б) $x \in [1, +\infty[$. **65.** $f_n(x) = \frac{n^2x^2}{1+n^2x^2}$: а) $x \in]0, 1]$; б) $x \in [1, +\infty[$.

66. $f_n(x) = \frac{\ln(nx)}{\sqrt{nx}}$: а) $x \in]0, 1]$; б) $x \in [1, +\infty[$. **67.** $f_n(x) = \left(1 + \frac{1}{nx}\right)^{nx}$, $0 < x < 1$.

68. $f_n(x) = \int_0^1 \sin\left(\frac{xy^2}{n}\right) dy$: а) $x \in]0, 1[$; б) $x \in]0, +\infty[$.

69. $f_n(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 \cos(xy)\, dy}{y^2+n^2}$: а) $x \in]0, 1[$; б) $x \in]1, +\infty[$.

70. $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{arctg} \frac{k^2 x}{n^3}$, $x \in]0, +\infty[$. **71.** $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k^2}{xn^2}\right)$, $x \in]0, 1[$.

Предварительно определив область сходимости функционального ряда, исследовать его на равномерную сходимость:

72. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$. **73.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$. **74.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{\sqrt{n}+x^2}$.

75. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(2n+1)x}{2n+1}$. **76.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$. **77.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{nx}e^{-\sqrt{nx}}$.

78. Может ли функциональный ряд разрывных функций, сходящийся неравномерно на интервале $]a, b[$, представлять на этом интервале непрерывную функцию? Привести примеры.

79. Пусть $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n e^{-n^2 x}$ равномерно сходится при $x \geqslant \varepsilon > 0$.

Обосновать возможность почленного дифференцирования рядов в указанных областях:

80. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n(n+1)}$, $0 < x < 2\pi$. **81.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1+nx^{2n}}$, $|x| \neq 1$. **82.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$, $|x| < 1$.

83. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\sqrt{n}x)}{n^2+\cos(\sqrt{n}x)}$, $0 < x < 2\pi$. **84.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\varepsilon x}}$, $x > \frac{1}{\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$.

85. Можно ли утверждать, что:

а) если функция f непрерывна на каждом отрезке $[\alpha, \beta] \subset]a, b[$, то она непрерывна на интервале $]a, b[$;

б) если последовательность $(f_n(x))$ равномерно сходится на каждом отрезке $[\alpha, \beta] \subset]a, b[$, то она равномерно сходится на интервале $]a, b[$;

в) если последовательность (f_n), $f_n \in C[\alpha, \beta]$, $n \in \mathbb{N}$, равномерно сходится на каждом отрезке $[\alpha, \beta] \subset]a, b[$ к функции f, то на интервале $]a, b[$ предельная функция непременно непрерывна?

Найти:

86. $\lim\limits_{x\to+0} \frac{1}{x} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1-e^{-nx})}{x^2+n^3} \cos nx$. **87.** $\lim\limits_{x\to+0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n\ln(1-e^{-x})}$. **88.** $\lim\limits_{y\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^1 \frac{\arcsin\left(\frac{ny}{ny+1}\right)}{1+n^4x^2+y}\,dx$.

89. $\lim\limits_{y\to0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n \cos ny}{y+n} \frac{\sin y}{y}\right)$. **90.** $\lim\limits_{y\to1+0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\left(\frac{\sqrt{x}(y-1)}{n}\right)}{\cos\frac{\pi y}{2} \ln\left(1+\frac{x(y-1)}{n}\right)}\,dx$.

91. Последовательность функций (f_n), $f_n \in R[a, b]$, $n \in \mathbb{N}$, называется *сходящейся в среднем* к функции $f \in R[a, b]$, если

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b |f_n(x) - f(x)|^2\,dx = 0.$$

Показать, что из равномерной сходимости последовательности интегрируемых функций вытекает сходимость в среднем.

92. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, $a_n \in R[a, b]$, называется *сходящимся в среднем* к функции S на $[a, b]$, если последовательность его частичных сумм $(S_n(x))$, $n \in \mathbb{N}$, сходится в среднем к S на $[a, b]$. Доказать, что если функциональный ряд с интегрируемыми членами сходится в среднем к интегрируемой функции S на $[a, b]$, то $\forall x_0, x \in [a, b]$ справедливо равенство

$$\int\limits_{x_0}^{x} S(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} a_n(t)\,dt.$$

93. Доказать, что если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ с непрерывно дифференцируемыми членами сходится поточечно на $[a, b]$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k'(x)$ сходится в среднем к непрерывной функции σ, то функция $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ дифференцируема на $[a, b]$ и $S'(x) = \sigma(x)$.

94. Вытекает ли из поточечной сходимости на $[a, b]$ функциональной последовательности $(f_n(x))$ сходимость ее в среднем на этом отрезке?

Убедиться, что следующие функциональные последовательности сходятся в среднем, но не сходятся равномерно к функциям, получаемым поточечным предельным переходом:

95. $f_n(x) = \sqrt{n}e^{-nx}$, $x \in [0, 1]$. **96.** $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$, $x \in [0, 1]$.

97. $f_n(x) = \left|\frac{\ln(1+nx^2)}{\ln n} - 1\right|$, $x \in [0, 1]$. **98.** $f_n(x) = \frac{\sin nx}{nx}$, $x \in]0, +\infty[$.

Показать, что почленное дифференцирование следующих рядов возможно:

99. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}\left(\frac{e^{-x}}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$, $x \in]0, 1[$. **100.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$, $x \in]0, 1[$.

Показать, что почленное интегрирование следующих рядов на указанном отрезке возможно:

101. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}x^n$, $x \in [0, 1]$. **102.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(nx+1)((n-1)x+1)}$, $x \in [0, 2]$.

§ 5. Степенные ряды

5.1. Круг и радиус сходимости степенного ряда.

Определение. *Ряд вида*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n, \text{ где } a_n,\ z,\ a \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

называется степенным рядом; a_n — коэффициенты степенного ряда (они не зависят от z), a — фиксированная точка на комплексной плоскости.

Теорема. *Каждый степенной ряд сходится абсолютно внутри некоторого круга $|z-a| \leqslant R$, где радиус круга $R \geqslant 0$ определяется по формуле Коши—Адамара*

$$R = \begin{cases} \frac{1}{l}, & \text{если } \ 0 < l = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < +\infty, \\ 0, & \text{если } \ l = +\infty, \\ +\infty, & \text{если } \ l = 0, \end{cases}$$

или по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \tag{2}$$

если этот предел существует хотя бы в несобственном смысле.

Вне круга $|z-a| \leqslant R$ ряд (1) не сходится ни в одной точке $z \in \mathbb{C}$. Вопрос сходимости ряда (1) в точках окружности $|z-a| = R$, $R > 0$, остается открытым и решается отдельно для каждого ряда.

В случае, когда a_n, z, $a \in \mathbb{R}$, внутренность круга сходимости вырождается в интервал $]a-R, a+R[$, $R > 0$, на действительной прямой.

При $R = 0$ круг вырождается в точку $z = a$, а при $R = +\infty$ представляет комплексную плоскость (или числовую прямую, если ряд (1) действителен).

5.2. Основные свойства степенных рядов.

Сумма степенного ряда внутри круга сходимости представляет собой непрерывную функцию. Если ряд (1), п.5.1, действительный и на конце его интервала сходимости $z = R+a$, $R > 0$, расходится, то сходимость ряда на интервале $[a, R+a[$ не может быть равномерной.

Если действительный степенной ряд сходится при $z = R + a$, $R > 0$, то сходимость ряда будет равномерной на отрезке $[a, R+a]$.

Сумма действительного степенного ряда внутри интервала сходимости имеет производные любого порядка.

Теорема (Абеля). *Если действительный степенной ряд сходится в точке $z = R + a$, $R > 0$, то его сумма $S(z)$ представляет собой значение непрерывной слева функции в этой точке, т.е.*

$$S(R+a) = \lim_{z \to R+a-0} S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Аналогичные утверждения справедливы и для левого конца интервала сходимости.

5.3. Разложение функции в ряд Тейлора.

Определение. *Пусть $f :]a - R_1, a + R_2[\to \mathbb{R}$, $R_i > 0$, $i = 1, 2$. Говорят, что функция f раскладывается в степенной ряд на интервале $]a - R, a + R[$, где $0 < R \leqslant \min(R_1, R_2)$, если $\exists a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}_0$, такие, что $\forall x \in]a - R, a + R[$ справедливо равенство*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n.$$

Теорема (Тейлора). *Для того чтобы функция f могла быть разложена в ряд Тейлора на интервале $]a - R, a + R[$, $R > 0$, необходимо и достаточно, чтобы она была бесконечно дифференцируема и остаточный член в формуле Тейлора для этой функции стремился к нулю при $n \to \infty$ на указанном интервале.*

Разложение имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{1}$$

Функция f, разлагающаяся в ряд Тейлора, называется *аналитической* и ее разложение (1) единственно.

Практически важными являются случаи представления остаточного члена разложения (1) в форме Лагранжа

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

и в форме Коши

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta_1(x-a))}{n!}(1-\theta_1)^n (x-a)^{n+1},$$

где $0 < \theta < 1$, $0 < \theta_1 < 1$.

5.4. Разложения основных элементарных функций.

Полагая в формуле (1), п.5.3, $a = 0$, получаем пять основных разложений:

I. $\quad e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ |x| < \infty.$

II. $\quad \sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ |x| < \infty.$

III. $\quad \cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \ |x| < \infty.$

IV. $\quad (1+x)^m = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n, \ -1 < x < 1.$

V. $\quad \ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \ -1 < x \leqslant 1.$

Разложения I—III справедливы для всех комплексных значений z, разложение IV выполняется при $|z| < 1$, $m \in \mathbb{R}$, а равенство V — при $|z| \leqslant 1$, $z \neq -1$.

5.5. Операции над степенными рядами.

Ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$$

всегда имеют общее множество сходимости и внутри этого множества справедливы следующие операции сложения и умножения:

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)(z-a)^n;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

где $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$; λ, μ — числа.

Если степенной ряд (1), п.5.1, действителен, то внутри интервала сходимости его можно почленно дифференцировать и почленно интегрировать; при этом интервал сходимости полученного таким образом ряда совпадает с интервалом сходимости исходного ряда. Соответствующие формулы имеют вид:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-a)^n,$$

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1} + C.$$

Определить радиус и интервал сходимости и исследовать поведение в граничных точках интервала сходимости следующих степенных рядов:

146. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n.$

◀ По формуле Коши—Адамара имеем

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n + (-2)^n}{n}} = \lim_{k \to \infty} \sqrt[2k]{\frac{9^k + 4^k}{2k}} = 3,$$

поэтому при $-\frac{4}{3} < x < -\frac{2}{3}$ ряд сходится абсолютно.

Исследуем поведение степенного ряда на концах интервала сходимости. Пусть $x = -\frac{4}{3}$. Нетрудно видеть, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \cdot \frac{(-1)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

сходится, так как равен сумме двух сходящихся рядов.

Пусть $x = -\frac{2}{3}$. Тогда числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n3^n},$$

в силу признака сравнения, расходится $\left(\frac{3^n+(-2)^n}{n3^n} = \frac{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n} > \frac{1}{4n}\right)$. Следовательно, в точке $x = -\frac{4}{3}$ степенной ряд сходится лишь условно, в точке $x = -\frac{2}{3}$ — расходится. ►

147. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$.

◄ По формуле (2), п.5.1, находим

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2(2n+2)!}{(2n)!((n+1)!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = 4,$$

поэтому при $|x| < 4$ ряд сходится абсолютно.

При $x = 4$ получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}$. Поскольку $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n(n+1)}$ то $a_n < a_{n+1}$. Это означает, что последовательность (a_n) монотонно возрастает. Следовательно, общий член ряда к нулю не стремится, т.е. ряд расходится. По этой же причине он расходится и в точке $x = -4$. ►

148. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

◄ По формуле Коши—Адамара находим радиус сходимости ряда:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Следовательно, при $|x| < \frac{1}{e}$ ряд сходится абсолютно. При $x = \frac{1}{e}$ получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n}$. Покажем, что общий член этого ряда к нулю не стремится. Действительно, имеем

$$a_n = \exp\left\{-n + n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right\} = \exp\left\{-n + n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right\} \to e^{-\frac{1}{2}}, \ n \to \infty.$$

Таким образом, в точке $x = \frac{1}{e}$ степенной ряд расходится. По той же причине он расходится и в точке $x = -\frac{1}{e}$. ►

149. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n$, $a > 1$.

◄ Находим радиус сходимости ряда по формуле (2), п.5.1. Имеем

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n! a^{(n+1)^2}}{a^{n^2}(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{2n+1}}{n+1} = +\infty,$$

следовательно, данный степенной ряд сходится по всей числовой прямой. ►

150. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\right)^{p}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n}.$

◀ По формуле (2), п.5.1, находим

$$R=\lim_{n\to\infty}2\left(\frac{(2n-1)!!(2n+2)!!}{(2n)!!(2n+1)!!}\right)^{n}=2\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{p}=2.$$

Следовательно, при $-1<x<3$ ряд сходится абсолютно.

При исследовании характера сходимости ряда в точках $x=-1$ и $x=3$ пользуемся соответственно примером 79 и признаком Гаусса. Имеем

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{p}=1+\frac{p}{2n+1}+\frac{p(p-1)}{2(2n+1)^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),\ n\to\infty,$$

где $a_n=\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^{p}$. Отсюда, учитывая упомянутые признаки, заключаем, что в точке $x=-1$ ряд сходится при $p>0$, а при $p>2$ он сходится абсолютно. Следовательно, в точке $x=-1$ он сходится условно при $0<p\leqslant 2$. В точке $x=3$ ряд сходится абсолютно при $p>2$ и расходится при $p\leqslant 2$. ▶

151. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{2^{n}(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^{p}x^{n}.$

◀ По формуле (2), п.5.1, получаем

$$R=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n}(n!)^2}{(2n+1)!}\,\frac{(2n+3)!}{2^{n+1}((n+1)!)^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{p}=2^{p}.$$

Поэтому ряд сходится абсолютно при $|x|<2^{p}$.

Рассмотрим поведение степенного ряда в граничных точках интервала сходимости. Для этого образуем отношение

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(1+\frac{1}{2n+2}\right)^{p}=1+\frac{p}{2n}+o\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right),\ \varepsilon>0,\ n\to\infty,$$

где $a_n=\left(\frac{2^{n}(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^{p}2^{pn}$. Пользуясь признаком Гаусса, из этого отношения находим, что в точке $x=-2^{p}$ ряд сходится абсолютно при $p>2$, а при $p\leqslant 2$ ряд расходится. На основании же примера 79 устанавливаем, что в точке $x=2^{p}$ ряд сходится при $p>0$; абсолютно сходится при $p>2$ (по признаку Гаусса). Следовательно, в этой точке он сходится условно, если $0<p\leqslant 2$. ▶

152. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^{n}.$

◀ Для удобства исследования представим ряд в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(n-1-m)(n-2-m)\dots(1-m)m}{n!}x^{n}.$$

Очевидно, ряд сходится абсолютно, если $m\in\mathbb{Z}_0$, а x — любое; поэтому далее будем считать, что $m\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_0$.

Для нахождения радиуса сходимости применяем формулу (2), п.1.5. Имеем

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n-m}\right|=1,$$

где

$$a_n=\frac{(n-1-m)(n-2-m)\dots(1-m)m}{n!}.$$

Пусть $x = -1$. Тогда, составляя для числового ряда отношение

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{m+1}{n} + \frac{m(m+1)}{n(n-m)} \tag{1}$$

и пользуясь признаком Гаусса, находим, что в этой точке степенной ряд сходится абсолютно, если $m > 0$, и расходится, если $m < 0$.

Пусть $x = 1$. Тогда из (1), на основании примера 79, заключаем, что степенной ряд сходится, если $m > -1$. Следовательно, при $-1 < m < 0$ ряд сходится условно. ►

153. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n x^n$.

◄ Применяя формулу (2), п.1.5, получаем

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 1.$$

Следовательно, при $|x| < 1$ степенной ряд сходится абсолютно.

Пусть $x = 1$. Тогда, имея в виду утверждение примера 79 для ряда $\sum(-1)^n b_n$, где $b_n = \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!}$, составим отношение

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = e\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \exp\left\{1 + n\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right\} =$$
$$= \exp\left\{1 + n\left(-\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right\} = 1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n\to\infty. \tag{1}$$

Теперь видим, что по указанному утверждению ряд сходится.

Пусть $x = -1$. Тогда, воспользовавшись признаком Гаусса, из соотношения (1) получим, что степенной ряд расходится (здесь $\mu = 1$). Отсюда следует, что в точке $x = 1$ имеет место условная сходимость. ►

154. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) x^n$.

◄ Поскольку $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \varepsilon_n$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n + C + \varepsilon_n} = 1.$$

Таким образом, по формуле Коши—Адамара, ряд сходится при $|x| < 1$. В точках $x = 1$ и $x = -1$ ряд расходится, так как общий член ряда, на основании указанного выше примера, не стремится к нулю при $n \to \infty$. ►

155. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3+(-1)^n)^n}{n} x^n$.

◄ Применяя формулу Коши—Адамара, получаем

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{3+(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} = \lim_{k\to\infty} \frac{4}{\sqrt[2k]{2k}} = 4.$$

Отсюда следует, что при $|x| < \frac{1}{4}$ ряд сходится абсолютно.

Поскольку для подпоследовательности (S_{2n}) последовательности частичных сумм числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3+(-1)^n)^n}{n4^n}$ выполняется неравенство $S_{2n} \geqslant \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, то в точке $x = +\frac{1}{4}$ ряд расходится. Аналогично в точке $x = -\frac{1}{4}$ имеем

$$S_{2n} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{2^{2n-1}(2n-1)} + \frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{2k-1}(2k-1)}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = +\infty$, поэтому и в этой точке ряд расходится. ▶

156. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} x^n$ (ряд Прингсхейма).

◀ Согласно формуле Коши—Адамара, находим

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1.$$

Таким образом, степенной ряд сходится абсолютно при $|x| < 1$.

В точке $x = 1$ получаем числовой ряд, сходимость которого доказана в примере 77.

В точке $x = -1$ получаем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+[\sqrt{n}]}}{n} = \sum_{\substack{n=1 \\ (n\neq 4,\, 9,\, 16,\, \ldots)}}^{\infty} \frac{(-1)^{n+[\sqrt{n}]}}{n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \tag{1}$$

Поскольку первый ряд, находящийся справа в равенстве (1), лейбницева типа, то он сходится. Второй ряд также сходится. Так как, кроме этого, ряд, находящийся слева в равенстве (1), абсолютно расходится (как гармонический), то мы приходим к выводу, что в точке $x = -1$ данный степенной ряд сходится условно. ▶

157. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10^{\nu(n)}}{n}(1-x)^n$, где $\nu(n)$ — количество цифр числа n.

◀ По формуле Коши—Адамара получаем

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{10^{[\lg n]+1}}{n}} = 1$$

(см. пример 45), т.е. при $0 < x < 2$ степенной ряд сходится абсолютно.

В силу неравенства $n = 10^{\lg n} < 10^{[\lg n]+1} \leqslant 10^{\lg n + 1} = 10n$, заключаем, что в точках $x = 0$ и $x = 2$ ряд расходится, так как при этом общий член ряда не стремится к нулю. ▶

158. Определить интервал сходимости разложения в степенной ряд функции $f : x \mapsto \frac{x}{x^2 - 5x + 6}$: а) по степеням x; б) по степеням бинома $(x-5)$, не производя самого разложения.

◀ Преобразовывая функцию f для случаев а) и б) к виду

$$\text{a) } f(x) = \frac{x}{(x-2)(x-3)}; \quad \text{b) } f(t+5) = \varphi(t) = \frac{t+5}{(t+3)(t+2)}, \ t = x - 5,$$

и принимая во внимание то, что радиус сходимости степенного ряда определяется расстоянием от центра разложения до первой особой точки аналитической функции или какой-нибудь ее производной, находим:

а) $x = 2$ — точка бесконечного разрыва функции f; $x = 0$ — центр разложения ее в степенной ряд (по условию), а поэтому $R = 2$ и интервал сходимости определяется неравенством $|x| < 2$.

б) $t = -2$ — точка бесконечного разрыва функции φ, а $t = 0$ — центр разложения ее в степенной ряд (по условию функция φ разлагается по степеням $t = x - 5$). Следовательно, $R = 2$, интервал сходимости ряда $]-2, 2[$ или $3 < x < 7$. ▶

159. Можно ли утверждать, что $\varphi_N(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \rightrightarrows \sin x$ на $]-\infty, +\infty[$ при $N \to \infty$?

◀ Поскольку $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sin x$, $x \in]-\infty, +\infty[$, а

$$\sup_{-\infty<x<+\infty} \left| \sin x - \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \right| = +\infty,$$

то, согласно примеру 103, последовательность $(\varphi_N(x))$ сходится неравномерно на $]-\infty, +\infty[$. ►

Пользуясь разложениями п.5.4, написать разложения в степенной ряд относительно x следующих функций:

160. $x \mapsto \sin^3 x$

◄ Преобразовав $\sin^3 x$ к виду $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$ и воспользовавшись разложением функции синус, найдем

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(3x)^{2n-1}}{(2n-1)!} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3-3^{2n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}.$$

По формуле (2), п.1.5, легко найти, что этот ряд сходится абсолютно при всех x. ►

161. $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

◄ Поскольку $\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$, то, дифференцируя почленно разложение для $(1-x)^{-1}$, получаем $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, $|x| < 1$. ►

162. $x \mapsto \dfrac{x}{(1-x)(1-x^2)}$.

◄ Разлагая данную дробь на простейшие $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)} = -\frac{1}{4(1+x)} - \frac{1}{4(1-x)} + \frac{1}{2(1-x)^2}$ и используя разложение IV, п.5.4, а также результат предыдущего примера, можем написать

$$\frac{x}{(1-x)(1-x^2)} = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1+(-1)^{n+1})x^n.$$

По формуле Коши—Адамара находим интервал абсолютной сходимости полученного степенного ряда: $|x| < 1$. ►

163. $x \mapsto \dfrac{1}{1+x+x^2}$.

◄ Представляя данную дробь в виде

$$f(x) = \frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1}{1-(t+\bar{t})x+x^2} = \frac{1}{(x-t)(x-\bar{t})} =$$
$$= \frac{1}{t-\bar{t}}\left(\frac{1}{x-t} - \frac{1}{x-\bar{t}}\right) = \frac{1}{t-\bar{t}}\left(\frac{t}{1-xt} - \frac{\bar{t}}{1-x\bar{t}}\right),$$

где $t = e^{i\varphi}$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, и используя разложение IV, п.5.4, а также формулу Эйлера $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$, получаем

$$f(x) = \frac{1}{t-\bar{t}}\left(t\sum_{n=0}^{\infty}(xt)^n - \bar{t}\sum_{n=0}^{\infty}(x\bar{t})^n\right) = \frac{1}{t-\bar{t}}\sum_{n=0}^{\infty}x^n(t^{n+1} - \bar{t}^{n+1}) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}x^n \sin(n+1)\varphi.$$

По формуле Коши—Адамара находим радиус и интервал сходимости этого ряда:

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\sin(n+1)\varphi|} = 1,\ R = 1,\ |x| < 1. ►$$

164. $x \mapsto \dfrac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$.

◄ Полагая $\sin\alpha = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, $\cos\alpha = \frac{z+\bar{z}}{2i}$, где $z = e^{i\alpha}$, и разлагая данную дробь на простейшие, получаем

$$\frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-xz} - \frac{1}{1-x\bar{z}}\right).$$

Применяя к правой части этого соотношения разложение IV, п.5.4, можем написать

$$\frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2} = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}x^n(z^n - \bar{z}^n) = \sum_{n=0}^{\infty}x^n\sin n\alpha.$$

Очевидно, полученный ряд сходится абсолютно при $|x| < 1$. ►

165. $x \mapsto \ln(1 + x + x^2 + x^3)$.

◄ Преобразовывая данную функцию к виду

$$\ln(1 + x + x^2 + x^3) = \ln(1 + x) + \ln(1 + x^2), \ x > -1,$$

и используя разложение V, п.5.4, получаем

$$\ln(1 + x + x^2 + x^3) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}, \ -1 < x \leqslant 1.$$

Складывая полученные ряды в общей области их сходимости, окончательно имеем

$$\ln(1 + x + x^2 + x^3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left((-1)^{n-1} + 2\sin(n-1)\frac{\pi}{2}\right) x^n, \ -1 < x \leqslant 1.$$

Нетрудно видеть, что при $|x| < 1$ этот ряд сходится абсолютно, а в точке $x = 1$ сходится лишь условно (по признаку Дирихле). ►

166. $x \mapsto e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$

◄ Рассматривая данную функцию как

$$\operatorname{Re}\left(e^{x\cos\alpha + ix\sin\alpha}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{xe^{i\alpha}}\right)$$

и применяя разложение I, п.5.4, можем написать

$$e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha) = \operatorname{Re}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n e^{in\alpha}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n\cos n\alpha}{n!}.$$

Поскольку $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{|x^n\cos n\alpha|}{n!} \leqslant \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^n}{n!}$ и второй степенной ряд в этом неравенстве сходится при всех $x \in]\infty, +\infty[$, то полученное разложение справедливо при $|x| < \infty$. ►

Разложить в степенной ряд следующие функции:

167. $f : x \mapsto \arcsin x$.

◄ С помощью формулы IV, п.5.4, имеем

$$f'(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^{2n} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}x^{2n}, \quad |x| < 1.$$

Интегрируя этот ряд почленно (что возможно внутри интервала сходимости), находим

$$f(x) = C + x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Так как $f(0) = 0$, то $C = 0$. Следовательно,

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!(2n+1)}x^{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

Для исследования сходимости ряда в концевых точках применяем признак Раабе. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{4n^2 + 10n + 6}{4n^2 + 4n + 1} - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{6n^2 + 5n}{4n^2 + 4n + 1} = \frac{3}{2} > 1,$$

поэтому при $x = \pm 1$ ряд сходится абсолютно.

Таким образом, полученное разложение, в силу теоремы Абеля, справедливо при $|x| \leqslant 1$, т.е. во всей области существования $\arcsin x$. ►

168. $f : x \mapsto \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

◀ Разлагая производную данной функции $f'(x) = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ при $|x| < 1$ в степенной ряд

$$f'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n},$$

интегрированием последнего получаем

$$f(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!x^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)} + C, \quad |x| < 1.$$

Поскольку $f(0) = 0$, то $C = 0$

Как и в предыдущем примере, находим, что полученное разложение сходится абсолютно при $|x| \leqslant 1$, и в концевых точках сумма ряда равна, по теореме Абеля, значению функции f в этих точках. Таким образом, написанное разложение справедливо при $|x| \leqslant 1$. ▶

169. $f : x \mapsto \operatorname{arctg} \dfrac{2-2x}{1+4x}$.

◀ Представляя функцию f в виде

$$f : x \mapsto \operatorname{arctg} \frac{2-2x}{1+4x} = \operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 2x - \pi\varepsilon(x),$$

где

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x > -\frac{1}{4}, \\ 1, & \text{если} \quad x < -\frac{1}{4}, \end{cases}$$

и разлагая в ряд функцию $x \mapsto \operatorname{arctg} 2x$ с помощью почленного интегрирования ряда для ее производной, находим

$$\operatorname{arctg} \frac{2-2x}{1+4x} = \operatorname{arctg} 2 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1} - \pi\varepsilon(x).$$

Поскольку полученный ряд сходится при $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ (абсолютная сходимость его при $|x| < \frac{1}{2}$ устанавливается с помощью признака д'Аламбера, а в концевых точках — с помощью признака Лейбница), то в данном случае

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad -\frac{1}{4} < x \leqslant \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{если} \quad -\frac{1}{2} \leqslant x < -\frac{1}{4}. \end{cases} \text{▶}$$

170. $f : x \mapsto \operatorname{arctg} \dfrac{2x}{2-x^2}$, $|x| < \sqrt{2}$.

◀ Представляя производную функции f в виде

$$f'(x) = \frac{1}{1+t^4} + \frac{t^2}{1+t^4},$$

где $t = \frac{x}{\sqrt{2}}$, и пользуясь формулой IV, п.5.4, находим

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{4n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{4n+2}.$$

Очевидно, при $|t| < 1$ оба ряда справа абсолютно сходятся, поэтому при $|t| < 1$ их можно сложить. Имеем

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{x^{2n}}{2^n}, \ |x| < \sqrt{2},$$

откуда интегрированием получаем

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{x^{2n+1}}{2^n(2n+1)}, \quad |x|<\sqrt{2}.$$

Поскольку интервал абсолютной сходимости ряда после интегрирования не меняется, то полученный ряд сходится абсолютно при $|x|<\sqrt{2}$. В точках $|x|=\pm\sqrt{2}$ ряд сходится, но только условно. Действительно, последовательность $\left(\frac{1}{2n+1}\right)\downarrow 0$ при $n\to\infty$, а $\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}\right|\leqslant 2$; поэтому, согласно признаку Дирихле, ряд сходится. Абсолютная расходимость ряда в этих точках следует из расходимости гармонического ряда. Но так как функция f в точках $x=\pm\sqrt{2}$ не определена, то полученное разложение справедливо только при $|x|<\sqrt{2}$. Этот пример показывает, что сумма ряда может существовать на множестве большем, чем то, на котором задана функция. ▶

171. $f: x\mapsto \arccos(1-2x^2)$.

◀ Дифференцируя функцию f, получаем

$$f'(x)=\frac{2\operatorname{sgn}x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad 0<|x|<1.$$

Пользуясь разложением IV, п.5.4, находим

$$f'(x)=2\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}\right)\operatorname{sgn}x, \; 0<|x|<1.$$

Интегрируя почленно полученный ряд, имеем

$$f(x)=2\left(|x|+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}\right).$$

Этот ряд, согласно признаку Раабе, сходится абсолютно при $|x|\leqslant 1$, т.е. во всей области существования функции f. ▶

172. Функцию $f: x\mapsto \ln x$ разложить в степенной ряд по целым положительным степеням дроби $\dfrac{x-1}{x+1}$.

◀ Положив $\frac{x-1}{x+1}=t$, получим $f\left(\frac{t+1}{1-t}\right)\equiv F(t)=\ln\frac{t+1}{1-t}$. Поскольку $x>0$, то $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|=|t|<1$ (заметим, что справедливо и обратное утверждение). Следовательно, использовав формулу V, п.5.4, можем написать

$$\ln\frac{t+1}{1-t}=\ln(1+t)-\ln(1-t)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n-1}}{2n-1}=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n-1}\cdot\frac{1}{2n-1}. \;▶$$

173. Пусть $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$. Доказать непосредственно, что $f(x)\,f(y)=f(x+y)$.

◀ Перемножая ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{y^k}{k!}$, получаем

$$f(x)f(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{x^{n-j}y^j}{(n-j)!j!}\right).$$

Но так как $(x+y)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k x^{n-k}y^k$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{n-k}y^k}{(n-k)!k!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}=f(x+y),$$

что и требовалось доказать. ▶

174. Пусть, по определению,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{и} \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Доказать, что $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$.

◀ Записывая данные разложения в виде

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n!} x^n, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n!} x^n \tag{1}$$

и пользуясь правилом умножения рядов Коши, имеем

$$\sin x \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin \frac{k\pi}{2} \cos \frac{(n-k)\pi}{2}}{k!(n-k)!}. \tag{2}$$

Так как $\sin \frac{k\pi}{2} \cos \frac{(n-k)\pi}{2} = \frac{1}{2}\sin \frac{n\pi}{2} + (-1)^{k+1}\frac{1}{2}\sin\frac{n\pi}{2}$ и $\frac{2^n}{n!} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(n-k)!}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} = 0$, что вытекает из элементарной формулы

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n! x^{n-k} y^k}{k!(n-k)!}$$

при $x = y = 1$ и $x = -y = 1$ соответственно, то

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin \frac{k\pi}{2} \cos \frac{(n-k)\pi}{2}}{k!(n-k)!} = \frac{2^{n-1}}{n!} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

А тогда, согласно (1) и (2),

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \sin \frac{n\pi}{2}}{n!} x^n = \frac{1}{2}\sin 2x,$$

что и требовалось доказать. ▶

175. Написать несколько членов разложения в степенной ряд функции

$$f : x \mapsto \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}\right)^{-1}.$$

◀ Следует подобрать коэффициенты α_n так, чтобы выполнялось тождество по x:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \equiv 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n = f(x).$$

Это дает бесконечную систему уравнений относительно α_n:

$$\alpha_0 = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{n-i+1} = -\frac{1}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

из которой последовательно находим $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$, $\alpha_2 = -\frac{1}{12}$, $\alpha_3 = -\frac{1}{24}$, ... ▶

Производя соответствующие действия со степенными рядами, получить разложения в степенные ряды следующих функций:

176. $f : x \mapsto (1-x)^2 \operatorname{ch}\sqrt{x}$.

◄ Разлагая функцию $x \mapsto \operatorname{ch}\sqrt{x}$ в ряд по степеням $\sqrt{x}$, получаем

$$f(x) = (1-2x+x^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!} - 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(2n)!} =$$

$$= 1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!} - 2x - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(2n)!} =$$

$$= 1 - \frac{3}{2}x - \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n)!} - \frac{2}{(2n-2)!} + \frac{1}{(2n-4)!}\right)x^n.$$

Очевидно, это разложение справедливо при всех x. ►

177. $f : x \mapsto \ln^2(1-x)$.

◄ Возводя в квадрат ряд $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = \ln(1-x)$, получаем $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n x^{n+1}$, где

$$c_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+1-k)k} = \frac{2}{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right).$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n} = 1$, то разложение справедливо при $|x| < 1$. ►

178. $f : x \mapsto e^x \cos x$.

◄ Разлагая функцию $\bar{f} : x \mapsto e^{x(1+i)}$ в степенной ряд

$$\bar{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n(\sqrt{2})^n e^{in\frac{\pi}{4}}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\sqrt{2})^n}{n!}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

и замечая, что $f(x) = \operatorname{Re}\bar{f}(x)$, получаем

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\sqrt{2})^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{4}.$$

Поскольку $\left|\frac{(x\sqrt{2})^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{4}\right| \leqslant \frac{(\sqrt{2}|x|)^n}{n!}$ и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2}|x|)^n}{n!}$ сходится при $|x| < \infty$, то полученное разложение возможно также при $|x| < \infty$. ►

179.

$$f : x \mapsto \begin{cases} \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2 & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 1 & \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$$

◄ Принимая во внимание результат примера 167, находим

$$f(x) = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!x^{2n}}{(2n)!!(2n+1)}\right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!x^{2n}}{(2n)!!(2n+1)}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{2n},$$

где

$$c_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(2n-2k-1)!!}{(2n-2k)!!}\,\frac{(2k-1)!!((2k)!!)^{-1}}{(2n-2k+1)(2k+1)}, \quad (-1)!! = 1.$$

По индукции доказываем, что

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{(2n-2i-1)!!(2i-1)!!}{(2n-2i)!!(2i)!!(2n-2i+1)(2i+1)} = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!}.$$

Поэтому

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!}x^{2n}. \tag{1}$$

Легко установить, что этот ряд сходится при $|x|<1$. Для выяснения вопроса о сходимости ряда (1) в концевых точках $x=\pm1$ воспользуемся признаком Раабе:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)n=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{3}{2n}-\frac{2n+3}{2n(n+1)^2}\right)=\frac{3}{2}>1.$$

Видим, что ряд (1) сходится абсолютно также и в концевых точках интервала сходимости $|x|<1$. Следовательно, разложение (1), в силу непрерывности функции f на отрезке $[-1, 1]$ и теоремы Абеля, справедливо на указанном отрезке. ►

180. Пусть $S=(I-A)^{-1}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}A^n=0$, где A — квадратная матрица, I — единичная матрица. *Разложить матрицу S в матричный ряд по степеням A.*

◄ По условию имеем

$$(I-A)S=I,$$

откуда

$$S=I+AS,\quad S=I+A(I+AS)=I+A+A^2S,\ \dots\ S=I+A+A^2+\dots+A^nS.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}A^n=0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}A^nS=0$. Следовательно,

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}A^n. ►$$

181. Пусть $S=(2I-3A+A^2)^{-1}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}A^n=0$, где A — квадратная матрица. Разложить матрицу S в матричный ряд по степеням A.

◄ Представим матрицу S в виде

$$S=((2I-A)(I-A))^{-1}=(I-A)^{-1}(2I-A)^{-1}=\alpha(I-A)^{-1}+\beta(2I-A)^{-1},$$

где α, β — некоторые числовые коэффициенты. Для их определения умножим S слева на $I-A$, а справа — на $2I-A$. В результате получим тождество

$$I=\alpha(2I-A)+\beta(I-A),$$

из которого находим $\alpha=1$, $\beta=-1$.

Таким образом,

$$S=(I-A)^{-1}-\frac{1}{2}\left(I-\frac{A}{2}\right)^{-1}.$$

Используя разложения из предыдущего примера, окончательно получаем

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}A^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{2^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)A^n. ►$$

182. Доказать, что если: 1) $a_n\geqslant0$; 2) существует $\lim\limits_{x\to R-0}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S$, то $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n=S$.

◄ В силу условия 2), имеем

$$\lim_{x\to R-0}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{N}a_nR^n+\lim_{x\to R-0}\sum_{n=N+1}^{\infty}a_nx^n=S,$$

откуда

$$S-\sum_{n=0}^{N}a_nR^n=\alpha_N, \tag{1}$$

где

$$\alpha_N = \lim_{x \to R-0} \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n.$$

Поскольку далее $a_n \geqslant 0$, то $\alpha_N \geqslant 0$. Поэтому из (1) следует, что $0 \leqslant \sum\limits_{n=0}^{N} a_n R^n \leqslant S$. Последнее означает, что последовательность $\left(\sum\limits_{n=0}^{N} a_n R^n\right)$ ограничена. Но так как она еще и монотонна, то, в силу известной теоремы, сходится, т.е. сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$. А тогда, по теореме Абеля, будем иметь

$$\lim_{x \to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Отсюда, приняв во внимание условие 2), найдем

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S. \blacktriangleright$$

Разложить в степенной ряд функции:

183. $f : x \mapsto \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt.$

◀ Разлагая функцию $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$, $t \neq 0$, в степенной ряд $\frac{\sin t}{t} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!}$, $|t| > 0$, и интегрируя последний, получаем

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}, \quad |x| < \infty. \blacktriangleright$$

184. $f : x \mapsto \int\limits_0^x \frac{t\, dt}{\ln(1+t)}.$

◀ Коэффициенты a_n степенного ряда подынтегральной функции найдем из тождества $1 \equiv \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n+1} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, которое дает систему алгебраических уравнений относительно a_k:

$$a_0 = 1, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k (-1)^{k+1}}{n-k+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Из этой системы уравнений последовательно получаем $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{12}$, $a_3 = \frac{1}{24}$, и т. д. Таким образом, имеем

$$f(x) = \int_0^x \frac{t\, dt}{\ln(1+t)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{36} + \frac{x^4}{96} + \ldots .$$

Поскольку функция $\varphi : t \mapsto \frac{t}{\ln(1+t)}$, $\varphi(0) = 1$, аналитична всюду, за исключением точки $t = -1$, то радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ равен единице. Следовательно, такой же радиус сходимости имеет и полученное после интегрирования разложение. ▶

Применяя почленное дифференцирование, вычислить суммы следующих рядов:

185. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$.

◀ Данный ряд, согласно формуле Коши—Адамара, имеет радиус сходимости, равный единице. Согласно п.5.5, степенной ряд можно почленно дифференцировать внутри интервала сходимости. Имеем $1 - x^2 + x^4 - \ldots = \frac{1}{1+x^2}$, $|x| < 1$. Отсюда интегрированием получаем $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots = \operatorname{arctg} x + C$. Полагая здесь $x = 0$, находим, что постоянная $C = 0$. Окончательно имеем

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots = \operatorname{arctg} x.$$

Заметим, что в концевых точках интервала сходимости этот ряд сходится. Поэтому, согласно *теореме Абеля, сумма ряда есть непрерывная функция на отрезке* $[-1, 1]$. Поскольку функция $x \mapsto \operatorname{arctg} x$ также непрерывна на этом отрезке, то последнее равенство справедливо при всех $x \in [-1, 1]$. ▶

186. $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$.

◀ Очевидно, этот ряд сходится на всей числовой прямой. Обозначая через $S(x)$ сумму данного ряда, почленным дифференцированием его получаем уравнения

$$S(x) + S'(x) = e^x, \quad S(x) - S'(x) = e^{-x}.$$

Отсюда

$$S(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x, \quad |x| < \infty. \blacktriangleright$$

187. $\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \ldots$.

◀ Дифференцируя почленно ряд внутри интервала сходимости, получаем $\frac{1}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} + \ldots = S(x)$, $|x| < 1$. Умножая обе части этого равенства на x^2, $x \neq 0$, и пользуясь формулой V, п.5.4, находим

$$S(x) = -\frac{1}{x} - \frac{\ln(1-x)}{x^2}. \tag{1}$$

При $x = 0$ полагаем $S(0) = \frac{1}{2}$ ($x = 0$ — устранимая точка разрыва функции S). Интегрируя (1), имеем

$$\int S(x)\,dx = \frac{1-x}{x}\ln(1-x) + C. \tag{2}$$

Так как $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \ldots\right) = 0$, то из (2) находим $C = -\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-x}{x}\ln(1-x) = 1$. Следовательно,

$$\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \ldots = \begin{cases} 1 + \frac{1-x}{x}\ln(1-x), & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0. \end{cases} \tag{3}$$

При $|x| < 1$ это равенство гарантировано теоремами о возможности почленного дифференцирования и интегрирования степенного ряда внутри интервала сходимости. Покажем, что и в концевых точках интервала $x = \pm 1$ это равенство при некотором условии справедливо. Действительно, поскольку рассматриваемый степенной ряд в точках $x = \pm 1$ сходится, то, на основании теоремы Абеля, его сумма является непрерывной функцией на отрезке $[-1, 1]$. Если значение функции в равенстве (3) справа в точке $x = 1$ положить равным единице, то, как легко видеть, эта функция на сегменте $[-1, 1]$ также будет непрерывной. Поэтому окончательно можем записать

$$\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \ldots = \begin{cases} 1 + \frac{1-x}{x}\ln(1-x), & \text{если} \quad -1 \leqslant x < 0,\ 0 < x < 1, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0, \\ 1, & \text{если} \quad x = 1. \blacktriangleright \end{cases}$$

188. $1 + \frac{x}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \ldots$.

◀ Нетрудно проверить, что радиус сходимости ряда $R = 1$. Умножая производную $S'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}2x + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}3x^2 + \ldots$, $|x| < 1$, суммы данного ряда на $1 - x$, $x \neq 1$, получаем уравнение $(1-x)S'(x) = \frac{1}{2}S(x)$. Общее решение этого уравнения есть $S(x) = \frac{C}{\sqrt{1-x}}$, $C =$ const. Полагая здесь $x = 0$ и учитывая, что $S(0) = 1$, находим $C = 1$. Следовательно, $S(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, $|x| < 1$.

Сходимость рассматриваемого ряда в концевой точке $x = -1$ легко установить, если воспользоваться примером 79; расходимость ряда в точке $x = 1$ следует из признака Гаусса. Таким образом, сумма ряда, по теореме Абеля, есть непрерывная функция на $[-1, 1[$. Поскольку функция $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ также непрерывна на $[-1, 1]$, то окончательно имеем

$$1 + \frac{x}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \ldots = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad \text{при} \quad -1 \leqslant x < 1. \blacktriangleright$$

Применяя почленное интегрирование, вычислить суммы рядов:

189. $x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \ldots$.

◀ Общий член этого ряда имеет вид $a_n(x) = (-1)^{n-1}n^2x^n$. Поэтому легко можно найти, что радиус сходимости ряда $R = 1$. Разделив на x, $x \neq 0$, сумму $S(x)$ данного ряда, а затем почленно его интегрируя в интервале $]-1, 1[$, получаем

$$\int \frac{S(x)}{x}\,dx = x - 2x^2 + 3x^3 - 4x^4 + \ldots + C =$$

$$= (x^2 - x^3 + x^4 - \ldots)' - x + x^2 - x^3 + \ldots + C = \frac{x}{(1+x)^2} + C.$$

Дифференцируя полученное равенство, находим $S(x) = \frac{x(1-x)}{(1+x)^3}$, $|x| < 1$, $x \neq 0$. Нетрудно видеть, что ограничение $x \neq 0$ здесь можно снять. ▶

190. $1\cdot 2x + 2\cdot 3x^2 + 3\cdot 4x^3 + \ldots$.

◀ Общий член ряда имеет вид $a_n(x) = n(n+1)x^n$, поэтому

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n(n+1)}} = 1.$$

Таким образом, степенной ряд сходится к своей сумме при $|x| < 1$.

Почленно интегрируя рассматриваемый ряд в интервале $]-1, 1[$ дважды, получаем

$$\int \frac{dx}{x^2}\left(\int S(x)\,dx\right) = x + x^2 + x^3 + \ldots - \frac{C_1}{x} + C_2 = \frac{x}{1-x} - \frac{C_1}{x} + C_2, \qquad (1)$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования, $x \neq 0$.

Дифференцируя равенство (1) дважды и учитывая, что $S(0) = 0$, окончательно находим $S(x) = \frac{2x}{(1-x)^3}$, $|x| < 1$. ▶

Пользуясь соответствующими разложениями, вычислить с указанной степенью точности следующие значения функций:

191. $\sin 18^\circ$ с точностью до 10^{-5}.

◀ Пользуясь разложением функции синус в степенной ряд, можем написать

$$\sin 18^\circ = \sin\frac{\pi}{10} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\,\frac{\pi^{2n-1}}{10^{2n-1}}.$$

Так как этот ряд лейбницева типа, то остаток ряда не превышает по абсолютной величине первого из отброшенных членов. Поэтому, как следует из неравенств $\frac{\pi^7}{7!10^7} < 10^{-5} < \frac{\pi^5}{5!10^5}$, для получения результата с требуемой точностью достаточно взять три члена разложения. Имеем

$$\sin\frac{\pi}{10} \approx \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{3!10^3} + \frac{\pi^5}{5!10^5} = \frac{\pi}{10}\left(1 - \frac{\pi^2}{600} + \frac{\pi^4}{12}10^{-5}\right) = 0{,}309017\ldots . \blacktriangleright$$

192. $\operatorname{tg} 9°$ с точностью до 10^{-3}.

◀ В силу оценки $R_3 = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^4 < 0{,}0005$ $(f(x) = \operatorname{tg} x)$, для получения приближенного значения $\operatorname{tg}\frac{\pi}{20}$ с указанной точностью достаточно взять два члена разложения функции тангенса в степенной ряд. Имеем

$$\operatorname{tg} 9° = \operatorname{tg}\frac{\pi}{20} \approx \frac{\pi}{20} + \frac{\pi^3}{3\cdot 20^3} = \frac{\pi}{20}\left(1 + \frac{\pi^2}{1200}\right) = 0{,}158\ldots . \blacktriangleright$$

193. Исходя из равенства $\frac{\pi}{6} = \arcsin\frac{1}{2}$, найти число π с точностью до 10^{-4}.

◀ Пользуемся разложением функции $x \mapsto \arcsin x$ в степенной ряд (см. пример 167). Имеем

$$\arcsin\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^{3n+1}n!(2n+1)}.$$

Поскольку для остатка данного ряда справедлива оценка

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{2^{3k+1}k!(2k+1)} \leqslant \frac{(2n+1)!!}{3\cdot 2^{3n+2}(n+1)!(2n+3)}$$

и неравенство $6\frac{(2n+1)!!}{3\cdot 2^{3n+2}(n+1)!(2n+3)} < 10^{-4}$ *выполняется при* $n \geqslant 4$, *то для получения приближенного* значения числа $\frac{\pi}{6}$ с требуемой точностью достаточно взять пять членов указанного разложения:

$$\frac{\pi}{6} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{48} + \frac{3}{1280} + \frac{5}{14336} + \frac{35}{72\cdot 8192} = 0{,}52359\ldots,$$

откуда $\pi = 3{,}1415\ldots . \blacktriangleright$

194. Пользуясь формулой $\ln(n+1) = \ln n + 2\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \ldots\right)$, найти $\ln 2$ и $\ln 3$ с точностью до 10^{-5}.

◀ Покажем сначала, как получена эта формула. Разлагая функции $x \mapsto \ln(1+x)$ и $x \mapsto \ln\frac{1}{1-x}$ в степенные ряды по степеням x, затем складывая их в общей области сходимости $|x| < 1$, находим

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right). \qquad (1)$$

Полагая здесь $x = \frac{1}{2n+1}$, получаем указанную формулу.

Найдем теперь соответствующие числа k членов ряда (1) для вычисления приближенных значений $\ln 2$ и $\ln 3$. С этой целью оценим остаток R_k этого ряда. Имеем

$$R_k = 2\left(\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \frac{x^{2k+3}}{2k+3} + \ldots\right) \leqslant \frac{2x^{2k+1}}{(2k+1)(1-x^2)}.$$

Отсюда следует, что если $x = \frac{1}{3}$ $(n = 1)$, то $R_k \leqslant 10^{-5}$, начиная с $k = 5$, а если $x = \frac{1}{5}$ $(n = 2)$, то $R_k \leqslant 10^{-5}$, начиная с $k = 3$. Таким образом,

$$\ln 2 \approx 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{81} + \frac{1}{1215} + \frac{1}{15309} + \frac{1}{177147}\right) = 0{,}69314\ldots,$$

$$\ln 3 \approx 0{,}69314 + 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{375} + \frac{1}{15625}\right) = 1{,}09860\ldots . \blacktriangleright$$

195. С помощью разложений подынтегральных функций в ряды вычислить с точностью до 0,001 следующие интегралы:

$$\text{а) } \int_0^1 e^{-x^2}\,dx; \quad \text{б) } \int_2^4 e^{\frac{1}{x}}\,dx; \quad \text{в) } \int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}; \quad \text{г) } \int_0^1 x^x\,dx.$$

◀ а) Пользуясь разложением I, п.5.4, находим

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}, \quad |x| < \infty,$$

откуда

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}.$$

Полученный ряд лейбницева типа, поэтому если для нахождения приближенного значения даниого интеграла взять k членов ряда, то погрешность не превзойдет $(k+1)$–го члена ряда. Из этого условия находим нужиое число k. Имеем $\frac{1}{(k+1)!(2k+3)} \leqslant 0{,}001$, откуда $k \geqslant 4$. Следовательно,

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} = 0{,}747\ldots.$$

б) Пользуясь формулой I, п.5.4, и разлагая подынтегральную функцию по степеням $\frac{1}{x}$, получаем $e^{\frac{1}{x}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!x^n}$, $|x| > 0$. Интегрируя этот ряд почленно, имеем

$$\int_2^4 e^{\frac{1}{x}}\,dx = 2 + \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \frac{1}{n(n+1)!2^n}.$$

Ограничиваясь k членами ряда, находим

$$\int_2^4 e^{\frac{1}{x}}\,dx \approx 2 + \ln 2 + \sum_{n=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \frac{1}{n(n+1)!2^n}.$$

Из оценки остатка ряда

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)!2^n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}(n+1)}\left(1 + \frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{2^2(n+2)(n+3)} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}(n+1)}\left(1 + \frac{1}{2n+4} + \frac{1}{(2n+4)^2} + \ldots\right) \leqslant 0{,}001$$

следует, что для получения результата с указанной точностью нужно взять $k \geqslant 3$. Таким образом,

$$\int_2^4 e^{\frac{1}{x}}\,dx \approx 2 + 0{,}6931 + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{7}{6608} = 2{,}834\ldots$$

(или 2,835 с избытком).

в) Здесь $x \geqslant 2$, поэтому подынтегральную функцию разлагаем по степеням $\frac{1}{x}$. Имеем

$$(1+x^3)^{-1} = \frac{1}{x^3}\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^{3(n+1)}}, \quad |x|>1,$$

откуда

$$\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n+2)2^{3n+2}}.$$

Поскольку ряд лейбницева типа, то для получения результата с указанной точностью достаточно взять число k членов ряда, удовлетворяющее неравенству $\frac{1}{(3k+5)2^{3k+5}} \leqslant 0{,}001$; решая его, находим $k \geqslant 1$. Следовательно,

$$\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{8} - \frac{1}{160} + \ldots = 0{,}118\ldots$$

(или 0,119 с избытком).

г) Представляя подынтегральную функцию в виде $x^x = e^{x\ln x}$ и разлагая ее в степенной ряд по степеням $x\ln x$, $x>0$, можем написать $x^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n\ln^n x}{n!}$. Интегрируя этот ряд почленно, получаем

$$\int\limits_0^1 x^x\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\limits_0^1 x^n\ln^n x\,dx.$$

Интегрируя по частям, имеем

$$I_{mn} = \int\limits_0^1 x^m\ln^n x\,dx = -\frac{m}{n+1}\int\limits_0^1 x^m\ln^{n-1}x\,dx = -\frac{n}{m+1}I_{mn-1}.$$

Полагая в полученной рекуррентной формуле последовательно $n=1,2,\ldots$, находим

$$I_{m1} = -\frac{1}{m+1}I_{m0}, \quad I_{m2} = \frac{2!}{(m+1)^2}I_{m0}, \ \ldots, \ I_{mn} = (-1)^n\frac{n!}{(m+1)^n}I_{m0}.$$

Так как $I_{m0} = \int\limits_0^1 x^m\,dx = \frac{1}{m+1}$, то $I_{mn} = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$, откуда $I_{nn} = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$.

Таким образом, $\int\limits_0^1 x^x\,dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$.

Как следует из оценки остатка ряда

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}\right| \leqslant \frac{1}{(n+2)^{n+2}} \leqslant 0{,}001,$$

для вычисления данного интеграла с точностью до 0,001 достаточно взять четыре первых члена этого ряда. Тогда получим

$$\int\limits_0^1 x^x\,dx \approx 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{256} = 0{,}783\ldots. \ ►$$

196. Найти с точностью до 0,01 длину дуги одной полуволны синусоиды $y=\sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

◀ Длина s указанной дуги выражается интегралом

$$s = \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx. \tag{1}$$

Преобразовывая подынтегральную функцию к виду

$$\sqrt{1+\cos^2 x} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{1}{3}\cos 2x\right)^{\frac{1}{2}}$$

и замечая, что $\frac{1}{3}|\cos 2x| \leqslant \frac{1}{3}$, разлагаем ее в степенной ряд по стереням $\frac{1}{3}\cos 2x$, используя формулу IV, п.5.4:

$$\sqrt{1+\cos^2 x} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!! 3^n} \cos^n 2x\right). \tag{2}$$

Интегрируя этот ряд почленно, получаем

$$\int_0^\pi \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\pi + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!! 3^n} I_n\right), \tag{3}$$

где

$$I_n = \int_0^\pi \cos^n 2x\, dx. \tag{4}$$

Почленное интегрирование ряда здесь возможно, так как ряд (2), по признаку Вейерштрасса, сходится равномерно по x, а функции $x \mapsto \cos^n 2x$ непрерывны. Интегрируя в (4) по частям, находим

$$I_n = \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos^{n-1} 2x\, d(\sin 2x) = (n-1)(I_{n-2} - I_n),$$

откуда $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Поскольку $I_0 = \pi$, а $I_1 = 0$, то из полученной рекуррентной формулы находим

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi, \quad I_{2n-1} = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Используя этот результат, из (3) и (1) окончательно имеем

$$s = \pi \sqrt{\frac{3}{2}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n-1)!!(2n-1)!!}{(4n)!! 3^{2n} (2n)!!}\right).$$

Оценивая остаток последнего ряда:

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(4n-1)!!(2n-1)!!}{(4n)!! 3^{2n} (2n)!!} < \frac{(4k+3)!!(2k+1)!!}{3^{2k+2}(2k+2)!!(4k+4)!!} \left(1 + \frac{(4k+7)(2k+3)}{9(4k+8)(2k+4)} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{1}{6 \cdot 3^{2k+2}} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \ldots\right) = \frac{5}{3 \cdot 9^{k+2}}$$

и учитывая, что абсолютная погрешность при вычислении данного интеграла не должна превышать 0,01, число первых членов ряда находим из неравенства $\pi \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{5}{3 \cdot 9^{k+2}} \leqslant 10^{-2}$. Его решения $k \geqslant 1$.

Следовательно, $s \approx \pi \sqrt{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{1}{48}\right) = 3{,}92 \ldots$ ▶

Упражнения для самостоятельной работы

Найти радиусы сходимости следующих степенных рядов:

103. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n \operatorname{tg}\frac{1}{n}\right)^{n^2}(z-i)^n$. **104.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(in \arcsin\frac{1}{n}\right)^{n^2}z^n$. **105.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+3)(n+6)\ldots 4n}{3^n}z^n$.

106. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}\sin\frac{2}{n}\ldots\sin 1\cdot(z-1)^n$. **107.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(z-3+i)^n$.

108. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}C_{2n}^{2k+1}((2k-1)!!)^2((2n-2k+3)!!)^2\frac{x^n}{(n!)^2}$.

109. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(\operatorname{tg}x)^{(n)}\big|_{x=0}}{n!}x^n$. **110.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(\operatorname{arctg}(2\sin x))^{(n)}\big|_{x=0}}{n!}x^n$.

Разложить в степенные ряды по степеням x функции:

111. $x\mapsto\sin^4 x$. **112.** $x\mapsto\frac{x}{x^4+x^2+1}$. **113.** $x\mapsto e^{-x^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{4^n}$.

114. $x\mapsto\int\limits_0^1\ln(1+xt)\,dt$. **115.** $x\mapsto\int\limits_0^1\operatorname{arctg}(xt)\,dt$. **116.** $x\mapsto\int\limits_0^1 e^{-x^2t^2}\,dt$.

117. Показать справедливость формулы

$$\frac{d}{dt}(e^{tA})=Ae^{tA},$$

где A — постоянная квадратная матрица.

118. Пусть A — квадратная матрица. Положим, по определению,

$$\sin A=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{A^{2n-1}}{(2n-1)!},\quad \cos A=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{A^{2n}}{(2n)!}$$

Показать, что матричные ряды сходятся для произвольных A.

119. Пусть A — квадратная матрица. Положим, по определению,

$$\ln(I+A)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}A^n. \tag{1}$$

Показать, что если $\sum\limits_{n,\,k=1}^{\infty}a_{nk}^2<1$, где a_{nk} — элементы матрицы A, то ряд (1) сходится.

§ 6. Ряды Фурье

6.1. Основные определения.

Определение 1. *Система функций*

$$\frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{\pi x}{l},\ \ldots\ \cos\frac{k\pi x}{l},\ \sin\frac{k\pi x}{l},\ \ldots,\quad x\in[-l,\,l],$$

называется основной тригонометрической системой. Эта система ортогональна на отрезке $[-l,\,l]$.

Определение 2. *Пусть* $f\in R[-l,\,l]$. *Числа*

$$a_0=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\,dx,\ a_k=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx,\ b_k=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx,\quad k\in\mathbb{N},$$

называются коэффициентами Фурье функции f *по основной тригонометрической системе.*

Определение 3. *Тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)$$

называется рядом Фурье функции f. В частности, если функция f четная, то ее ряд Фурье имеет вид

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi x}{l};$$

ряд Фурье нечетной функции имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Определение 4. *Функция $f:[-l,l]\to\mathbb{R}$ называется кусочно-непрерывной на $[-l,l]$, если она непрерывна в каждой точке $x\in[-l,l]$, за исключением, быть может, конечного числа точек, где она имеет разрывы первого рода.*

Определение 5. *Функция $f:[-l,l]\to\mathbb{R}$ называется кусочно-гладкой на $[-l,l]$, если эта функция кусочно-непрерывна и имеет непрерывную производную на этом отрезке, за исключением, быть может, конечного числа точек, в каждой из которых производная имеет конечные односторонние предельные значения.*

6.2. Теоремы о разложении в ряд Фурье.

Теорема 1 (основная). *Пусть кусочно-гладкая на отрезке $[-l,l]$ функция f периодически с периодом $2l$ продолжена на всю числовую прямую. Тогда тригонометрический ряд Фурье функции f сходится в каждой точке $x\in]-\infty,+\infty[$ к значению $\frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0))$.*

Теорема 2. *Если для непрерывной и кусочно-гладкой на отрезке $[-l,l]$ функции f выполняется равенство $f(-l)=f(l)$, то ее тригонометрический ряд Фурье сходится равномерно на этом отрезке и сумма его равна значению функции f $\forall x\in[-l,l]$.*

6.3. О дифференцировании и интегрировании рядов Фурье.

Пусть $f\in C^m[-l,l]$ и $f(-l)=f(l)$, $f'(-l)=f'(l)$, $\dots$, $f^{(m)}(-l)=f^{(m)}(l)$. Пусть, кроме того, функция f имеет на отрезке $[-l,l]$ кусочно-непрерывную производную порядка $m+1$.

Тогда: 1) сходится числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^m(|a_k|+|b_k|);$$

2) ряд Фурье такой функции можно m раз почленно дифференцировать на указанном отрезке.

Ряд Фурье интегрируемой по Риману на отрезке $[-l,l]$ функции f можно интегрировать почленно на этом отрезке.

6.4. Разложение в ряд Фурье по другим ортогональным системам. Ортогональные полиномы.

1) Полиномы Чебышева $T_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos x)$ ортогональны на интервале $]-1,1[$ с весовой функцией $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, т.е.

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\frac{\pi}{2^{2n-1}}\,\delta_{mn},$$

где

$$\delta_{mn}=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ 1, & m=n.\end{cases}$$

2) Полиномы Лежандра $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}$ ортогональны на отрезке $[-1, 1]$, т.е.

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}\, \delta_{mn}.$$

3) Полиномы Абеля—Лагерра $L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n (x^n e^{-x})}{dx^n}$ обладают свойством ортогональности на интервале $]0, +\infty[$ с весовой функцией $x \mapsto e^x$. Таким образом, имеем

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x)\, dx = \delta_{mn}.$$

4) Полиномы Чебышева—Эрмита $H_n(x) = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{n!} \frac{d^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^n}$ определены на всей числовой прямой и для них справедлива формула

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_m(x) H_n(x)\, dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{n!}\, \delta_{mn}.$$

Разложить в ряд Фурье в указанных интервалах следующие функции:

197. $f : x \mapsto \begin{cases} A, & \text{если } 0 < x < l, \\ 0, & \text{если } l < x < 2l, \end{cases}$ где A — постоянная, в интервале $]0, 2l[$.

◄ Как видим, данная функция кусочно-гладкая, причем точка $x = l$ — точка разрыва первого рода. Поэтому, согласно теореме 1 о разложении, функция f может быть представлена рядом Фурье.

Периодически (с периодом $2l$) продолжая функцию f на всю числовую прямую, построим функцию

$$f^* : x \mapsto \begin{cases} A, & \text{если } 2kl < x < (2k+1)l, \\ \frac{1}{2}A, & \text{если } x = kl, \\ 0, & \text{если } (2k-1)l < x < 2kl, \end{cases}$$

где $k \in \mathbb{Z}$.

Согласно указанной теореме, функция f^* совпадает в каждой точке x числовой прямой с ее сходящимся рядом Фурье:

$$f^*(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

где

$$a_0 = A, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f^*(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx = \frac{1}{l} \int_{0}^{2l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx = \frac{A}{l} \int_{0}^{l} \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-1}^{1} f^*(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx = \frac{A}{l} \int_{0}^{1} \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx = \frac{A}{n\pi}((-1)^{n+1} + 1).$$

Следовательно, $f^*(x) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{2n-1}{l} \pi x$ при всех $x \in]-\infty, +\infty[$, а

$$f(x) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{2n-1}{l} \pi x$$

только при $0 < x < l$ и $l < x < 2l$. ►

198. $f: x \mapsto |x|$ в интервале $]-\pi, \pi[$.

◄ Эта функция непрерывна на $]-\pi, \pi[$ и имеет кусочно-непрерывную производную всюду, за исключением точки $x = 0$. Периодически (с периодом 2π) продолжив функцию f на всю числовую прямую, построим функцию $f^*: x \mapsto |x - 2k\pi|$, если $|x - 2k\pi| \leqslant \pi$, где $k \in \mathbb{Z}$. Построенная функция удовлетворяет требованиям теоремы о разложимости в сходящийся к ней ряд Фурье.

Поскольку функция f^* четная, то $b_n = 0$;

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1), \quad a_0 = \pi.$$

Следовательно,

$$f^*(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}, \quad -\pi < x < \pi. ►$$

199. $f: x \mapsto \sin ax$ в интервале $]-\pi, \pi[$, $a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

◄ По данной функции построим функцию $f^*: x \mapsto \sin(a(x - 2k\pi))$, если $|x - 2k\pi| < \pi$, $f^*((2k+1)\pi) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$. Эта функция является кусочно-гладкой при $|x - 2k\pi| < \pi$. Кроме того, $\frac{1}{2}(f^*(x_k - 0) + f^*(x_k + 0)) = f^*(x_k)$, где $x_k = (2k+1)\pi$ — точки разрыва первого рода функции f^*. Поэтому функцию f^* можно разложить в ряд Фурье, сходящийся к ней в каждой точке числовой прямой.

В силу нечетности функции f^* коэффициенты $a_n = 0$;

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin ax\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2 - a^2}\sin a\pi, \quad |a| \neq n.$$

Таким образом, имеем

$$f^*(x) = \frac{2\sin\pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\sin nx}{n^2 - a^2}, \quad |x| < \infty,$$

$$f(x) = \frac{2\sin\pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\sin nx}{n^2 - a^2}, \quad |x| < \pi. ►$$

200. $f: x \mapsto x$ в интервале $]a, a + 2l[$.

◄ Функция

$$f^*: x \mapsto \begin{cases} x - 2lk, & \text{если} \quad 2lk + a < x < a + 2l(k+l), \\ a + l, & \text{если} \quad x = 2lk, \end{cases}$$

$k \in \mathbb{Z}$, построенная на основании данной функции и совпадающая с ней на интервале $]a, a + 2l[$, является $2l$-периодической, кусочно-гладкой. Кроме того, в точках разрыва $x = 2lk$ выполняется равенство

$$f^*(x_k) = \frac{1}{2}\left(f^*(x_k - 0) + f^*(x_k + 0)\right) = a + l.$$

Поэтому функция f^* разложима в сходящийся к ней в каждой точке $x \in]-\infty, +\infty[$ ряд Фурье.

Далее, имеем

$$a_0 = 2(a+l),$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^*(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{l}\int_{a}^{a+2l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{l}\int_{a}^{a+2l} x\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{2l}{k\pi}\sin\frac{k\pi a}{l},$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^*(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{l}\int_{a}^{a+2l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = -\frac{2l}{k\pi}\cos\frac{k\pi a}{l}, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Таким образом,

$$f^*(x) = a + l + \frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{l}(a-x), \quad |x|<\infty,$$

$$f(x) = a + l + \frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{l}(a-x), \quad a<x<a+2l. \blacktriangleright$$

Разложить в ряд следующие периодические функции:

201. $f : x \mapsto \operatorname{sgn}(\cos x)$.

◄ Данная функция кусочно-непрерывна (точки разрыва x_k первого рода удовлетворяют уравнению $\cos x_k = 0$) и имеет кусочно-непрерывную производную $f'(x) = 0$ при $x \ne x_k$. Кроме того, функция f периодическая с периодом 2π и $f(x_k) = \frac{1}{2}(f(x_k-0)+f(x_k+0))$. Следовательно, она может быть разложена в ряд Фурье, сходящийся в каждой точке x числовой прямой.

Учитывая четность рассматриваемой функции, получаем

$$b_n = 0, \quad a_0 = 0,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sgn}(\cos x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx - \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos nx\,dx = \frac{4}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}, \ n\in\mathbb{N}.$$

Таким образом, имеем

$$\operatorname{sgn}(\cos x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{2}\cos nx = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cos(2k+1)x, \quad -\infty<x<+\infty. \blacktriangleright$$

202. $f : x \mapsto \arcsin(\cos x)$.

◄ Нетрудно проверить, что эта функция непрерывна на всей числовой прямой и имеет кусочно-непрерывную производную (она не дифференцируема только в точках $x = k\pi$, где $k\in\mathbb{Z}$). Кроме того, она 2π-периодическая. Следовательно, ее ряд Фурье сходится к ней в каждой точке $x \in]-\infty, +\infty[$.

Принимая во внимание четность данной функции, находим

$$b_n = 0, \quad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx = 0, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos nx\,dx = -\frac{2}{\pi}\frac{((-1)^n-1)}{n^2}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Итак,

$$\arcsin(\cos x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((-1)^n-1)}{n^2}\cos nx = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}, \quad -\infty<x<+\infty. \blacktriangleright$$

203. $f : x \mapsto (x)$ — расстояние x до ближайшего целого числа.

◀ Функция f — четная, имеющая период $T = 1$; в остальном ее свойства аналогичны свойствам функции $x \mapsto \arcsin(\cos x)$, рассмотренной в предыдущем примере. Поэтому

$$b_n = 0, \quad a_0 = 4\int_0^{\frac{1}{2}} x\,dx = \frac{1}{2}, \quad a_n = 4\int_0^{\frac{1}{2}} x\cos 2\pi n x\,dx = \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, имеем

$$(x) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(4n-2)\pi x}{(2n-1)^2}, \ |x| < \infty. \blacktriangleright$$

204. $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha^n \dfrac{\sin nx}{\sin x}, \ |\alpha| < 1.$

◀ Поскольку

$$\left|\alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x}\right| \leqslant \frac{n|\alpha|^n|x|}{|\sin x|}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n|\alpha|^n|x|}{|\sin x|} < \infty,$$

то, согласно признаку Вейерштрасса, данный ряд сходится равномерно на каждом отрезке, не содержащем точек $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Так как, кроме того, функция $x \mapsto \frac{\sin nx}{\sin x}$ непрерывна при $x \neq k\pi$, то, согласно п.4.4, функция f непрерывна при $x \neq k\pi$.

Аналогично можно показать, что функция

$$f' : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{n\cos nx \sin x - \cos x \sin nx}{\sin^2 x}$$

также непрерывна при $x \neq k\pi$. Как следует из равенств

$$\lim_{x\to k\pi} f(x) = \lim_{x\to k\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x} = \lim_{x\to k\pi} \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha^n \sin nx}{\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to k\pi} \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\alpha^n \cos nx}{\cos x} = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^n (-1)^{(n+1)k} \equiv \beta_k,$$

$x = k\pi$ — точки устранимого разрыва функции f.

Таким образом, периодическая функция

$$f^* : x \mapsto \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad x \neq k\pi, \\ \beta_k, & \text{если} \quad x = k\pi, \end{cases}$$

разлагается в сходящийся к ней всюду ряд Фурье. Имеем

$$f^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sin x}(\sin(n-2)x\cos 2x + \cos(n-2)x\sin 2x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin(n-2)x}{\sin x} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \cos(n-1)x = -\alpha + \alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \cos(n-1)x.$$

Отсюда находим

$$f^*(x) = \frac{\alpha}{\alpha^2 - 1} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{1-\alpha^2} \cos(n-1)x = \frac{\alpha}{1-\alpha^2} + 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{1-\alpha^2} \cos nx. \blacktriangleright$$

205. Функцию $f : x \mapsto x^2$ разложить в ряд Фурье: а) по косинусам кратных дуг; б) по синусам кратных дуг; в) в интервале $]0, 2\pi[$. Пользуясь этими разложениями, найти суммы рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

◀ В случае а) функцию f, рассматриваемую в силу условия примера только на отрезке $[-\pi, \pi]$, периодически (с периодом 2π) продолжим на всю числовую прямую. Тогда получим непрерывную и кусочно-гладкую функцию f^*, совпадающую с функцией f при $|x| \leqslant \pi$ и разлагающуюся в ряд Фурье только по косинусам. Для коэффициентов a_n, b_n имеем

$$b_n = 0, \ a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2\, dx = \frac{2\pi^2}{3}, \ a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx\, dx = (-1)^n \frac{4}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поэтому

$$f^*(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2} \text{ при всех } x \in]-\infty, +\infty[;$$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2} \text{ только при } |x| \leqslant \pi.$$

Для получения разложения в случае б) функцию $x \mapsto x^2$, рассматриваемую на интервале $]0, \pi[$, продолжим на $]-\pi, 0]$ нечетным образом, а затем так построенную функцию периодически (с периодом 2π) продолжим на всю числовую прямую. В результате получим функцию

$$f^* : x \mapsto \begin{cases} |x - 2k\pi|(x - 2k\pi), & \text{если} \quad |x - 2k\pi| < \pi, \\ 0, & \text{если} \quad x = (2l+1)\pi, \end{cases}$$

$k, l \in \mathbb{Z}$, определенную всюду на числовой прямой и удовлетворяющую всем условиям теоремы 1, п.6.2. Вычислив коэффициенты

$$a_n = 0. \ b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin nx\, dx = \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^3}((-1)^n - 1),$$

можем написать

$$f^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^3}((-1)^n - 1) \right) \sin nx, \ |x| < \infty,$$

$$x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^3}((-1)^n - 1) \right) \sin nx, \ 0 \leqslant x < \pi.$$

Наконец, в случае в) по функции $f : x \mapsto x^2$, $0 < x < 2\pi$, строим 2π-периодическую функцию f^*, совпадающую с функцией $f : x \mapsto x^2$ только на интервале $]0, 2\pi[$ и в точках разрыва $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, равную $2\pi^2$. Тогда для коэффициентов a_n и b_n функции f^* имеем

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^*(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2\, dx = \frac{8\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(x) \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^*(x) \cos nx\, dx = \frac{4}{n^2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x^2\sin nx\,dx = -\frac{4\pi}{n},\ n\in\mathbb{N}.$$

Следовательно,

$$f^*(x) = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},\ |x|<\infty,$$

$$x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},\ 0<x<2\pi.$$

Полагая в случае а) $x=\pi$ и $x=0$, получаем соответственно $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$. Складывая почленно эти два сходящихся ряда, находим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. ►$$

Пользуясь формулами $\cos x = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $\sin x = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$, где $z=e^{ix}$, $\bar{z}=e^{-ix}$, получить разложения в ряд Фурье следующих функций:

206. $x\mapsto \cos^{2m}x$, $n\in\mathbb{N}$.

◄ Пользуясь указанными формулами, а также формулой бинома Ньютона, можем написать

$$\cos^{2m}x = \frac{1}{4^m}(z+\bar{z})^{2m} = \frac{1}{4^m}\sum_{k=0}^{2m}C_{2m}^k z^{2(m-k)} = \frac{1}{4^m}\sum_{k=0}^{2m}(\cos 2(m-k)x + i\sin 2(m-k)x) =$$

$$= \frac{1}{4^m}\sum_{k=0}^{2m}C_{2m}^k\cos 2(m-k)x = \frac{C_{2m}^m}{4^m} + \frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{k=0}^{m}C_{2m}^{m-k}\cos 2kx.$$

Здесь мы воспользовались тождеством $C_{2m}^k = C_{2m}^{2m-k}$, а также четностью функции $x\mapsto\cos 2kx$ и нечетностью функции $x\mapsto\sin 2(m-k)x$. ►

207. $x\mapsto \dfrac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}$, $|q|<1$.

◄ Применяя указанные в предыдущем примере формулы и разлагая данную дробь на простейшие, получаем

$$\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2} = \frac{1}{2i(1-qz)} - \frac{1}{2i(1-q\bar{z})}.$$

Поскольку $|qz|=|q\bar{z}|=|q|<1$, то справедливы разложения в степенные ряды функций $qz\mapsto(1-qz)^{-1}$ и $q\bar{z}\mapsto(1-q\bar{z})^{-1}$ по степеням qz и $q\bar{z}$ соответственно. Имеем

$$\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2} = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}q^n(z^n-\bar{z}^n) = \sum_{n=0}^{\infty}q^n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i} = \sum_{n=1}^{\infty}q^n\sin nx. ►$$

208. $x\mapsto\ln(1-2q\cos x+q^2)$, $|q|<1$.

◄ Дифференцируя данную функцию по x и пользуясь предыдущим разложением, получаем

$$(\ln(1-2q\cos x+q^2))'_x = 2\sum_{n=1}^{\infty}q^n\sin nx,$$

откуда

$$\ln(1 - 2q\cos x + q^2) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \cos nx + C.$$

Полагая здесь $x = \pi$, находим

$$\ln(1 + q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n}(-1)^{n+1} + C.$$

Отсюда, в силу формулы V, § 5, следует, что $C = 0$. Итак, окончательно получаем

$$\ln(1 - 2q\cos x + q^2) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \cos nx. \blacktriangleright$$

209. Разложить в ряд Фурье неограниченную периодическую функцию $f : x \mapsto \ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|$.

◀ Пусть $0 < \varepsilon \leqslant x - 2k\pi \leqslant 2\pi - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ и $k \in \mathbb{Z}$. Тогда степенной ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \tag{1}$$

где $z = e^{ix}$, сходится при всех указанных x.

Далее, покажем, что

$$\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \operatorname{Re}\left(\ln\frac{1-z}{2}\right), \quad \ln 1 = 0. \tag{2}$$

Действительно, пользуясь известным равенством

$$\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

и представлением $w = |w|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где w — некоторое комплексное число, φ — его аргумент, $\operatorname{Re}\ln w = \ln|w|$, получаем (положив $w = \frac{1}{2}(1-z)$)

$$\operatorname{Re}\left(\ln\frac{1-z}{2}\right) = \ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = \ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, используя формуяу (2) и разложение функции $z \mapsto -\ln(1-z)$ в ряд (1), имеем

$$\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| = -\ln 2 - \operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}.$$

Так как число ε можно взять как угодно малым, то отсюда следует, что полученное разложение справедливо при всех $x \neq 2k\pi$. ▶

210. Разложить в ряд Фурье функцию $f : x \mapsto \int\limits_0^x \ln\sqrt{\left|\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right|}\,dt$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

◀ Производная функции f, равная

$$f' : x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right| = \frac{1}{2}\left(\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| - \ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|\right),$$

является 2π–периодической функцией и на интервалах $0 < |x| < 2\pi$ может быть представлена рядом Фурье. Действительно, на основании предыдущего примера имеем

$$\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| = -\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}, \quad x \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| = -\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n}, \quad x \neq (2k+1)\pi.$$

Поэтому, если $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, то

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\cos nx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}.$$

Интегрируя полученный ряд почленно, находим

$$f(x) = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)t}{2n-1}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}. \blacktriangleright$$

211. Как следует продолжить заданную в интервале $]0, \frac{\pi}{2}[$ непрерывную функцию f в интервал $]-\pi, \pi[$, чтобы ее разложение в ряд Фурье имело вид $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\cos(2n-1)x$, $-\pi < x < \pi$?

◀ Поскольку $b_n = 0$, то функция f — четная, т.е. ее следует продолжить в интервал $]-\pi, 0[$ четным образом. Далее, замечая, что в данном разложении отсутствуют члены $a_{2n}\cos 2nx$, заключаем, что

$$a_{2n} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos 2nx\,dx = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_0.$$

Разбивая этот интеграл на два интеграла:

$$\int_0^{\pi} f(x)\cos 2nx\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos 2nx\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos 2nx\,dx$$

и производя замену: в первом интеграле $x = \frac{1}{2}(\pi - y)$, а во втором $x = \frac{1}{2}(\pi + y)$, получаем

$$\int_0^{\pi} f(x)\cos 2nx\,dx = \frac{(-1)^n}{2}\int_0^{\pi}\left(f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}+\frac{y}{2}\right)\right)\cos ny\,dy = 0,$$

или

$$\int_0^{\pi} f(x)\cos 2nx\,dx = \frac{(-1)^n}{2}\int_{-\pi}^{0}\left(f\left(\frac{\pi}{2}+\frac{y}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2}\right)\right)\cos ny\,dy = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(f\left(\frac{\pi}{2}+\frac{y}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2}\right)\right)\cos ny\,dy = 0,$$

т.е. функция $\Phi : y \mapsto f\left(\frac{\pi}{2}+\frac{y}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2}\right)$ является нечетной. Однако функция Φ очевидно, четная, поэтому $\Phi(y) = 0$.

Итак, должно быть $f\left(\frac{\pi+y}{2}\right)=-f\left(\frac{\pi-y}{2}\right)$, $|y|<\pi$ или, если вернуться к переменной x по формуле $x=\frac{\pi-y}{2}$, $f(\pi-x)=-f(x)$. Следовательно, график так построенной функции должен быть симметричным относительно прямой $x=0$, а точки $x=\pm\frac{\pi}{2}$ должны быть центрами симметрии его на интервалах $]0,\pi[$ и $]-\pi,0[$ соответственно. ►

212. Функцию $f: x\mapsto x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ разложить в интервале $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$: а) по косинусам нечетных дуг; б) по синусам нечетных дуг.

◄ а) Рассмотрим 2π-периодическую функцию f^*, которая в интервале $]-\pi,\pi[$ определяется следующим образом:

$$f^*: x\mapsto\begin{cases} f(x), & \text{если}\quad 0<x<\frac{\pi}{2},\\ f(-x), & \text{если}\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 0,\\ (x-\pi)\left(x-\frac{\pi}{2}\right), & \text{если}\quad \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi,\\ (x+\pi)\left(x+\frac{\pi}{2}\right), & \text{если}\quad -\pi\leqslant x\leqslant-\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Очевидно, построенная функция непрерывна в каждой точке x числовой прямой и имеет кусочно-непрерывную производную. Кроме того, она четна и ее коэффициенты Фурье a_{2n}, $n\in\mathbb{Z}_0$, равны нулю, так как

$$a_{2n}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^*(x)\cos 2nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}f^*(x)\cos 2nx\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos 2nx\,dx+\frac{2}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x-\pi)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos 2nx\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}(-1)^n\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}y\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\cos 2ny\,dy+\frac{2}{\pi}(-1)^n\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(y-\frac{\pi}{2}\right)y\cos 2ny\,dy=0$$

(здесь использовались подстановки: $x=\frac{\pi}{2}-y$ и $x=\frac{\pi}{2}+y$).

Таким образом, функция f^*, совпадающая в интервале $]0,\frac{\pi}{2}[$ с функцией f, может быть разложена в ряд Фурье только по косинусам нечетных дуг. Имеем

$$b_n=0,\quad a_{2n-1}=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}f^*(x)\cos(2n-1)x\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos(2n-1)x\,dx+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x-\pi)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos(2n-1)x\,dx\right)=$$

$$=-\frac{2}{(2n-1)^2}\left(1+\frac{4}{\pi}\,\frac{(-1)^n}{(2n-1)}\right),\quad n\in\mathbb{N}.$$

Разложения функций f^* и f имеют вид

$$f^*(x)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\left(1+\frac{4}{\pi}\,\frac{(-1)^n}{(2n-1)}\right)\cos(2n-1)x,\quad |x|<\infty,$$

$$f(x)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\left(1+\frac{4(-1)^n}{\pi(2n-1)}\right)\cos(2n-1)x,\quad 0<x<\frac{\pi}{2}.$$

б) Поскольку в разложении Фурье должны отсутствовать косинусы, то функция f^*, совпадающая в интервале $]0, \frac{\pi}{2}[$ с функцией f, нечетна. Кроме того, по условию, должно быть

$$b_{2n} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f^*(x)\sin 2nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f^*(x)\sin 2nx\,dx + \frac{2}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f^*(x)\sin\ 2nx\,dx = 0.$$

Произведя во втором интеграле замену $x = \frac{1}{2}(\pi - y)$, а в третьем $x = \frac{1}{2}(\pi + y)$, получим

$$b_{2n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(f^*\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2}\right) - f^*\left(\frac{\pi}{2} + \frac{y}{2}\right)\right)\sin ny\,dy = 0,$$

или

$$b_{2n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}\left(f^*\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2}\right) - f^*\left(\frac{\pi}{2} + \frac{y}{2}\right)\right)\sin ny\,dy = 0.$$

Из двух последних равенств находим

$$b_{2n} = \frac{4}{\pi}(-1)^{n+1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f^*\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2}\right) - f^*\left(\frac{\pi}{2} + \frac{y}{2}\right)\right)\sin ny\,dy = 0,$$

откуда следует, что функция $y \mapsto f^*\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2}\right) - f^*\left(\frac{\pi}{2} + \frac{y}{2}\right)$ четная. Но так как она еще и нечетна (что очевидно), то $f^*\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2}\right) = f^*\left(\frac{\pi}{2} + \frac{y}{2}\right)$, или, возвращаясь к переменной x, можем записать $f^*(x) = f^*(\pi - x)$. Геометрически это равенство означает, что график функции f^* в интервале $]0, \pi[$ симметричен относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$.

Таким образом, для построения графика функции f^* с указанными свойствами следует, во-первых, график функции f зеркально отобразить относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$ в интервал $]0, \pi[$; во-вторых, так полученный в интервале $]0, \pi[$ график функции f^* отобразить нечетным образом относительно точки $x = 0$ как центра симметрии всего графика в интервал $]-\pi, 0[$. Тогда для коэффициентов Фурье получим

$$a_0 = a_n = 0, \quad b_{2n} = 0,$$

$$b_{2n-1} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f^*(x)\sin(2n-1)x\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin(2n-1)x\,dx + \frac{2}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(x-\pi)\sin(2n-1)x\,dx =$$

$$= \frac{2(-1)^n}{(2n-1)^2}\left(1 + \frac{4(-1)^n}{\pi(2n-1)}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, разложение функции f^* имеет вид

$$f^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^n}{(2n-1)^2} + \frac{8}{\pi(2n-1)^3}\right)\sin(2n-1)x. \blacktriangleright$$

213. Функция f антипериодическая с периодом π, т.е. $f(x+\pi) = -f(x)$. Какой особенностью обладает ряд Фурье этой функции в интервале $]-\pi, \pi[$?

◄ Предполагая, что данная функция разложима в ряд Фурье, с учетом ее антипериодичности, получаем

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\pi)\,dx = -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\,dx = -a_0,$$

откуда следует, что $a_0 = 0$.

Далее, находим

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\pi)\cos nx\,dx = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = (-1)^{n+1}a_n$$

(здесь мы использовали равенство $f(x+2\pi) = f(x)$). Следовательно, $a_{2n} = 0$. Аналогично устанавливаем, что $b_{2n} = 0$, $n \in \mathbb{N}$. ►

214. Зная коэффициенты Фурье a_n, b_n интегрируемой функции f, имеющей период 2π, вычислить коэффициенты Фурье $\bar{a}_n$, $\bar{b}_n$, $n \in \mathbb{Z}_0$, "смещенной" функции $x \mapsto f(x+h)$, $h = \text{const}$.

◄ Учитывая 2π-периодичность и интегрируемость функции $x \mapsto f(x+h)$, имеем

$$\bar{a}_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)(\cos nt\cos nh + \sin nt\sin nh)\,dt = a_n\cos nh + b_n\sin nh,$$

$$\bar{b}_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)(\sin nt\cos nh - \cos nt\sin nh)\,dt = b_n\cos nh - a_n\sin nh,$$

$n \in \mathbb{N}$, $\bar{a}_0 = a_0$. ►

215. Зная коэффициенты Фурье a_n, b_n, $n \in \mathbb{Z}_0$, интегрируемой функции f с периодом 2π, вычислить коэффициенты Фурье A_n, B_n, $n \in \mathbb{Z}_0$, функции Стеклова

$$f_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(\xi)\,d\xi.$$

◄ Ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx \sim f(x)$$

2π-периодической интегрируемой функции f, согласно п.6.3, можно почленно интегрировать. Поэтому, интегрируя его почленно по ξ в пределах от $x-h$ до $x+h$, получаем

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{nh}\sin nh\cos nx + \frac{b_n}{nh}\sin nh\sin nx\right) = f_h(x).$$

Отсюда находим $A_0 = a_0$, $A_n = \frac{a_n}{nh}\sin nh$, $B_n = \frac{b_n}{nh}\sin nh$. ►

Разложить в ряд Фурье по полиномам Чебышева:

216. $f : x \mapsto x^3$, $x \in]-1,\, 1[$.

◄ Исходим из общего представления функции рядом Фурье:

$$x^3 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x), \tag{1}$$

где a_n — коэффициенты Фурье, подлежащие определению. Для их вычисления воспользуемся свойствами ортогональности полиномов Чебышева в интервале $]-1, 1[$ с весом $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Умножив обе части равенства (1) на весовую функцию и проинтегрировав по $x \in]-1, 1[$, в силу указанного свойства и нечетности функции $x \mapsto x^3$, получим $a_0 = 0$. Далее, умножив обе части равенства (1) на $\frac{T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, $m \in \mathbb{N}$, и проинтегрировав по $x \in]-1, 1[$, найдем

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3 T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi a_m}{2^{2m-1}}.$$

Для вычисления интеграла воспользуемся явным выражением полиномов Чебышева и произведем подстановку $\arccos x = t$. Тогда получим

$$a_m = \frac{2^m}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^3 t \cos(mt)\,dt = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad m \neq 1,\ m \neq 3, \\ \frac{3}{4}, & \text{если} \quad m = 1, \\ 1, & \text{если} \quad m = 3. \end{cases}$$

Таким образом, $x^3 = \frac{3}{4}T_1(x) + T_3(x)\ \forall x \in]-1, 1[$. ►

217. $f : x \mapsto |x|,\ x \in]-1, 1[$.

◄ Как и в предыдущем примере, представляем данную функцию в виде $f : x \mapsto a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n T_n(x)$. Последовательно умножая обе части этого равенства на $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и интегрируя по $x \in]-1, 1[$, а также умножая на $\frac{T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ и интегрируя по $x \in]-1, 1[$, получаем (пользуясь при этом свойством ортогональности полиномов):

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{|x|\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\pi},$$

$$a_m = \frac{2^m}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{|x| \cos(m \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{2^m}{\pi} \int_0^{\pi} |\cos t| \cos(mt)\,dt =$$

$$= \frac{2^m}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos(mt)\,dt - \frac{2^m}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos t \cos(mt)\,dt = \begin{cases} 0, & m = 1, \\ \frac{2^{m+1}}{\pi} \frac{\cos \frac{m\pi}{2}}{1-m^2}, & m \neq 1. \end{cases}$$

Итак, при $|x| < 1$ имеем

$$|x| = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k (-1)^{k+1}}{4k^2 - 1} T_{2k}(x). \ ►$$

Разложить в ряд Фурье по полиномам Лежандра функции:

218.

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{если} \quad -1 < x < 0, \\ 1, & \text{если} \quad 0 < x < 1. \end{cases}$$

◄ Имеем $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x)$. Поэтому

$$a_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_k(x)\,dx = \frac{2k+1}{2} \int_0^1 P_k(x)\,dx =$$

$$= \frac{2k+1}{2}\int_0^1 \frac{1}{2^k k!}\frac{d^k(x^2-1)^k}{dx^k}\,dx = \frac{2k+1}{2^{k+1}k!}\left.\frac{d^{k-1}(x^2-1)^k}{dx^{k-1}}\right|_0^1,$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 f(x)P_0(x)\,dx = \frac{1}{2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Остается вычислить $\left.\frac{d^{k-1}(x^2-1)^k}{dx^{k-1}}\right|_0^1$. Очевидно, при любом $k \geqslant 1$ в точке $x = 1$ это выражение равно нулю. Для вычисления значения его в точке $x = 0$ воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$((x^2-1)^k)^{(k-1)} = \left(\sum_{l=0}^k C_k^l(-1)^l x^{2(k-l)}\right)^{(k-1)} =$$

$$= \sum_{l=0}^{l\leqslant\frac{k+1}{2}} C_k^l(-1)^l(2k-2l)(2k-2l-1)\ldots(-2l+k+2)x^{k-2l+1}. \qquad (1)$$

Из этого соотношения следует, что если k — число четное, то при $x = 0$ сумма (1) равна нулю; если $k = 2m+1$ — число нечетное, то в точке $x = 0$ сумма (1) равна

$$C_{2m+1}^{m+1}(-1)^{m+1}2m(2m-1)\ldots 3\cdot 2.$$

Таким образом

$$a_{2m} = 0, \quad a_{2m+1} = \frac{(4m+3)(-1)^m(2m)!}{2^{2m+2}m!(m+1)!}, \quad m \in \mathbb{Z}_0.$$

Следовательно,

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m(4m+3)(2m)!}{2^{2m+2}m!(m+1)!}P_{2m+1}(x). \blacktriangleright$$

219. $f : x \mapsto |x|$ при $|x| < 1$.

◀ Как и в предыдущем примере, запишем

$$f(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k P_k(x), \quad a_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^1 |x|P_k(x)\,dx.$$

При $k = 2m+1$ имеем $a_{2m+1} = 0$, так как в этом случае подынтегральная функция нечетная. При $k = 2m$ подынтегральная функция четна, поэтому

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_{2m} = \frac{4m+1}{2^{2m}(2m)!}\int_0^1 x\frac{d^{2m}(x^2-1)^{2m}}{dx^{2m}}\,dx =$$

$$= \frac{4m+1}{2^{2m}(2m)!}\left(x\left.\frac{d^{2m-1}(x^2-1)^{2m}}{dx^{2m-1}}\right|_0^1 - \left.\frac{d^{2m-2}(x^2-1)^{2m}}{dx^{2m-2}}\right|_0^1\right) =$$

$$= \frac{4m+1}{2^{2m}(2m)!}\left.((x^2-1)^{2m})^{(2m-2)}\right|_{x=0}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Аналогично проделанному в примере 218 можем записать

$$((x^2-1)^{2m})^{(2m-2)}|_{x=0} = (-1)^{m+1}C_{2m}^{m+1}(2m-2)!.$$

Итак, окончательно имеем

$$f(x) = \frac{1}{2} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (4m+1)(2m-2)!}{2^{2m}(m-1)!(m+1)!} P_{2m}(x). \blacktriangleright$$

Разложить в ряд Фурье по полиномам Лагерра $L_n(x)$ при $x > 0$ следующие функции:

220. $f : x \mapsto e^{-ax}$.

◀ Представим функцию f в виде $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n L_n(x)$ и используем ортогональность полиномов Лагерра на $x > 0$ с весом e^{-x}. При $n \geqslant 1$ получим

$$a_n = \int_0^{+\infty} e^{-x(1+a)} L_n(x)\, dx = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n} dx =$$

$$= \frac{1}{n!} \left(e^{-ax} \left. \frac{d^{n-1}(x^n e^{-x})}{dx^{n-1}} \right|_0^{+\infty} + a \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{d^{n-1}(x^n e^{-x})}{dx^{n-1}}\, dx \right).$$

Продолжая интегрирование по частям, находим

$$a_n = \frac{a^n}{n!} \int_0^{+\infty} x^n e^{-(1+a)x}\, dx.$$

Применяя к последнему интегралу также метод интегрирования по частям, после n-го шага получаем

$$a_n = \frac{a^n}{(1+a)^n} \int_0^{+\infty} e^{-(1+a)x}\, dx = \frac{a^n}{(1+a)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Принимая во внимание еще, что $a_0 = \frac{1}{1+a}$, окончательно имеем

$$f(x) = \frac{1}{1+a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{(1+a)^n} L_n(x). \blacktriangleright$$

221. $f : x \mapsto x^n$, $n \geqslant 1$.

◀ Имеем

$$a_0 = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx = n!,$$

$$a_k = \frac{1}{k!} \int_0^{+\infty} x^n \frac{d^k(x^k e^{-x})}{dx^k} dx = \frac{1}{k!} \left(x^n \left. \frac{d^{k-1}(x^k e^{-x})}{dx^{k-1}} \right|_0^{+\infty} - n \int_0^{+\infty} x^{n-1} \frac{d^{k-1}(x^k e^{-x})}{dx^{k-1}}\, dx \right) =$$

$$= \frac{(-1)^k}{k!} n(n-1)\ldots(n-k+1) \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx = \frac{n!}{k!}(-1)^k n(n-1)\ldots(n-k+1), \ 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Если же $k > n$, то $a_k = 0$. Таким образом,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(n!)^2}{k!(n-k)!} L_k(x). \blacktriangleright$$

Разложить в ряд Фурье по полиномам Чебышева—Эрмита следующие функции:

222. $f : x \mapsto \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$

◀ Напишем искомое разложение в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k H_k(x),$$

где

$$a_k = \frac{k!}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} f(x) H_k(x)\, dx = \frac{-k!}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x)\, dx + \frac{k!}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x)\, dx,$$

$$a_0 = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Пользуясь явным выражением полиномов $H_k(x)$ и производя в первом интеграле замену x на $-x$, получаем

$$a_k = \frac{1 + (-1)^{k+1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} \frac{d^k\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)}{dx^k}\, dx = -\frac{(1 + (-1)^{k+1})}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)^{(k-1)}\Bigg|_{x=0}$$

Для вычисления выражения $\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(k-1)}\Bigg|_{x=0}$ рассмотрим функцию $u : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$. Взяв производную, замечаем, что эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению $u'(x) + xu(x) = 0$. Применяя к этому равенству формулу Лейбница, получаем

$$u^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^{(k)} (u(x))^{(n-1-k)} = 0.$$

Полагая здесь $x = 0$, имеем рекуррентную формулу $u^{(n)}(0) = -(n-1)u^{(n-2)}(0)$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$. Поскольку $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$, то отсюда нетрудно получить $u^{(2l)}(0) = (-1)^l(2l-1)!!$, $l \in \mathbb{N}$, $u^{(2l+1)}(0) = 0$.

Таким образом, если $k = 2l + 1$, то $a_{2l+1} = (-1)^{l+1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(2l-1)!!$, $l \in \mathbb{N}$, $a_1 = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}$; если же $k = 2l$, то $a_{2l} = 0$.

Следовательно, окончательно можем написать

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}(2l)!}{2^{l-1}\sqrt{2\pi}\, l!} H_{2l+1}(x). \blacktriangleright$$

223. $f : x \mapsto |x|$.

◀ Как и в предыдущем примере, имеем

$$a_k = \frac{1 + (-1)^k}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} x \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(k)} dx = \frac{1 + (-1)^k}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(k-2)}\Bigg|_{x=0}, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

$$a_{2l-1} = 0, \quad a_{2l} = \frac{(-1)^{l-1}(2l-2)!}{2^{l-2}(l-1)!\sqrt{2\pi}}, \quad l \in \mathbb{N},$$

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x| e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}.$$

Поэтому разложение представляется в виде

$$|x| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}(2l-2)!}{2^{l-2}(l-1)!\sqrt{2\pi}} H_{2l}(x). \blacktriangleright$$

224. $f : x \mapsto e^{-ax}$.

◀ Вычислим коэффициенты разложения

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax} \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(k)} dx, \quad k \in \mathbb{Z}_0.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-ax} \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(k-1)} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} + a \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax} \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(k-1)} dx \right),$$

или $a_k = a a_{k-1}$. Полагая в этой рекуррентной формуле $k = 1, 2, \ldots$ и принимая во внимание, что

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+a)^2+\frac{a^2}{2}} dx = \frac{e^{\frac{a^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = e^{\frac{a^2}{2}},$$

получаем

$$a_k = e^{\frac{a^2}{2}} a^k, \; k \in \mathbb{Z}_0.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$e^{-ax} = e^{\frac{a^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} a^k H_k(x). \blacktriangleright$$

Упражнения для самостоятельной работы

Разложить в тригонометрический ряд Фурье следующие функции:

120. $f : x \mapsto 2x + 5$, $x \in]-1, 5[$. **121.** $f : x \mapsto \sin \pi^2 x$, $x \in]-1, 1[$.

122. $f : x \mapsto \operatorname{sgn} \sin 2x$, $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$. **123.** $f : x \mapsto \cos x$, $x \in]0, 1[$.

124. $f : x \mapsto \cos x$, $x \in [2, 3]$. **125.** $f : x \mapsto \arcsin(\sin 2x)$, $x \in \mathbb{R}$.

126. $f : x \mapsto e^{-\cos x}(\cos(2x - \sin x) + 2\cos x \cos(\sin x)) - \cos x$.

127. $f : x \mapsto e^{-\cos x}(\sin(2x - \sin x) - 2\cos x \sin(\sin x)) + \sin x$.

128. $f : x \mapsto \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a(n+x)^2}$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$. **129.** $f : x \mapsto \sin x \ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)$.

130. $f : x \mapsto \cos x \ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)$. **131.** $f : x \mapsto \int\limits_0^x e^{-t^2} dt$, $x \in]-\pi, \pi[$.

132. $f : x \mapsto \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t} dt$, $x \in]-1, 1[$.

§ 7. Суммирование рядов. Вычисление определенных интегралов с помощью рядов

7.1. Непосредственное суммирование.

Пусть требуется просуммировать сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n \in \mathcal{L}. \tag{1}$$

Представляем u_n в виде $u_n = v_{n+1} - v_n$, где $v_{n+1} = S_n + v_1$, (S_n) — последовательность частичных сумм данного ряда. Тогда, если $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v_\infty$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n = v_\infty - v_1.$$

В том случае, когда общий член ряда имеет вид

$$u_n = \frac{1}{a_n a_{n+1} \ldots a_{n+m}}, \quad u_n \in \mathbb{R}(\mathbb{C}),$$

где $a_{n+k} = a_n + kd$, $k = \overline{0, m}$, $d = \mathrm{const}$, то

$$v_n = -\frac{1}{md} \cdot \frac{1}{a_n a_{n+1} \ldots a_{n+m-1}}.$$

7.2. Метод суммирования рядов, основанный на теореме Абеля.

Пусть ряд (1), п.7.1, сходится. Тогда его сумму можно найти по формуле

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n.$$

7.3. Суммирование тригонометрических рядов.

Если сумма степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n, \quad z = e^{ix},$$

известна и равна $C(x) + iS(x)$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \cos nx = C(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin nx = S(x).$$

Часто бывает полезным ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \ln \frac{1}{1-z}, \quad \ln 1 = 0,$$

сходящийся при $|z| \leqslant 1$, за исключением точки $z = 1$.

Найти суммы рядов:

225. $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots$.

◄ Нетрудно видеть, что общий член этого ряда u_n равен $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, где числа n, $n+1$, $n+2$ образуют арифметическую прогрессию с разностью 1. Поэтому, согласно п.7.1, получаем

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to\infty} v_n - v_1,$$

где $v_n = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{n(n+1)}$, $m = 2$, $a_n = n$. Но так как $v_1 = -\frac{1}{4}$, а $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$, то $S = \frac{1}{4}$. ►

226. $\dfrac{1}{1\cdot 2} - \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} - \dfrac{1}{4\cdot 5} + \ldots$.

◄ Общий член данного ряда $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$. Следовательно, по признаку сравнения, ряд абсолютно сходится, ибо $|u_n| \sim \frac{1}{n^2}$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим степенной ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}.$$

Этот ряд абсолютно сходится при $|x| \leqslant 1$ и, как любой степенной ряд внутри интервала сходимости, имеет производную

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \ln \frac{1}{1-x}.$$

Интегрируя обе части полученного равенства, находим

$$f(x) = (1-x)\ln(1-x) + x + C.$$

Поскольку $f(0) = 0$, то отсюда следует, что $C = 0$. Итак,

$$f(x) = (1-x)\ln(1-x) + x.$$

Как видим, здесь вполне применим метод суммирования рядов Абеля (см. п.7.2). Поэтому имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} = \lim_{x\to -1+0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \lim_{x\to -1+0}((1-x)\ln(1-x)+x) = 2\ln 2 - 1. \blacktriangleright$$

227. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

◀ Представляя данный сходящийся ряд с помощью метода неопределенных коэффициентов в виде разности двух сходящихся рядов:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)},$$

применяем метод непосредственного суммирования. Для каждого из двух последних рядов имеем

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \lim_{N\to\infty} \left(\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{N+2} - \frac{1}{N+3}\right)\right) = \frac{1}{3},$$

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \lim_{N\to\infty} \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}\right)\right) = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $S = \frac{1}{4}$. ▶

228. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)}$, $m \in \mathbb{N}$.

◀ Преобразовывая частичную сумму S_n ряда к виду

$$S_n = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+m}\right) = \frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+m}\right) = \frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{n+m}\frac{1}{k}\right),$$

получаем

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{m}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m}\right). \blacktriangleright$$

229. $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 6\cdot 7} + \ldots$.

◀ Приводя данный ряд к виду

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3}\right) + \left(\frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{4\cdot 5}\right) + \ldots\right) = \frac{1}{2}S,$$

где S — сумма ряда, рассмотренного в примере 226, получаем

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7} + \ldots = \ln 2 - \frac{1}{2}. \blacktriangleright$$

230. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$.

◄ Преобразовывая ряд к виду

$$S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$$

и используя результат примера 228, находим, что $S = \frac{3}{4}$. ►

231. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2(n+1)^2}$.

◄ Разлагая общий член ряда на простые дроби, находим

$$\frac{2n-1}{n^2(n+1)^2} = 4\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n^2} - \frac{3}{(n+1)^2}.$$

Поскольку

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2(n+1)^2} = 7 - \frac{2}{3}\pi^2. \ ►$$

232. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$.

◄ Представляя частичную сумму S_n ряда в виде

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{2k+1}\right) = 2\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \left(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k}\right)\right) = 2\left(1 - \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k}\right)$$

и пользуясь формулой $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \varepsilon_n$, $\varepsilon_n \to 0$, $n \to \infty$, находим $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 2(1 - \ln 2)$. ►

233. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}$.

◄ Дифференцируя степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{n+1}}{n!} = 2xe^{2x}$$

почленно, получаем

$$(2xe^{2x})' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)2^{n+1}x^n}{n!},$$

откуда, полагая $x = 1$, находим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!} = 3e^2. \ ►$$

234. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}$.

◀ Общий член ряда разлагаем на простые дроби:

$$\frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2} = -\frac{3}{4n} + \frac{3}{4(n+2)} + \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \\ + \frac{1}{4(n+2)^2} = \frac{-3}{2n(n+2)} + \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{4(n+2)^2}.$$

Суммируя ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1 - \frac{1}{4},$$

окончательно находим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{39}{16}. \blacktriangleright$$

235. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$.

◀ Замечая, что значение степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1} n}{(2n+1)!} = \frac{1}{2} x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2}(x \cos x - \sin x), \quad |x| < \infty,$$

при $x = 1$ совпадает с данным числовым рядом, имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} = \frac{1}{2}(\cos 1 - \sin 1). \blacktriangleright$$

236. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n-2}$.

◀ Разлагая дробь $\frac{1}{n^2+n-2}$ на простые, можем написать, что

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n^2+n-2} = \frac{1}{3} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n-1} - \frac{1}{3x^3} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+2}}{n+2} = \\ = \frac{1}{3} \ln(1+x) - \frac{1}{3x^3} \left(-\ln(1+x) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right), \quad 0 < |x| < 1.$$

Отсюда, применяя теорему Абеля, находим

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n-2} = \lim_{x \to 1-0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n^2+n-2} = \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{5}{18}. \blacktriangleright$$

237. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n^2+1)}{(2n)!} x^{2n}$.

◀ Представляя данный ряд в виде суммы двух сходящихся рядов:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n-1)!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad |x| < \infty,$$

и замечая, что сумма второго ряда равна $\cos x$, вычисляем сумму первого ряда. Имеем

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^{2n}}{(2n-1)!} = x\varphi(x),$$

где

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Интегрируя почленно этот ряд, находим

$$\int_0^x \varphi(t)\,dt = -\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = -\frac{x}{2}\sin x,$$

откуда $\varphi(x) = -\frac{1}{2}\sin x - \frac{x}{2}\cos x$. Следовательно, $f(x) = -\frac{x}{2}(\sin x + x\cos x)$, а

$$S(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\cos x - \frac{x}{2}\sin x,\ |x| < \infty. \blacktriangleright$$

238. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(2n+1)!}$.

◀ Пусть $x > 0$. Полагая $x = y^2$, имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(2n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 y^{2n}}{(2n+1)!} = yS_1(y),$$

где $S_1(y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 y^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Интегрируя этот ряд почленно, получаем

$$\int_0^y S_1(t)\,dt = \frac{y}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n y^{2n-1}}{(2n+1)!} = \frac{y}{2}S_2(y), \tag{1}$$

где

$$S_2(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n y^{2n-1}}{(2n+1)!}.$$

Аналогично находим

$$\int_0^y S_2(t)\,dt = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2y}(\operatorname{sh} y - y). \tag{2}$$

Дифференцируя обе части равенства (2) по y, находим функцию S_2. Точно так же находим функцию S_1 из уравнения (1). Окончательно имеем

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2 x^n}{(2n+1)!} = \frac{1}{4}\left((x+1)\frac{\operatorname{sh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \operatorname{ch}\sqrt{x}\right),\ x > 0,\ S(0) = 0$$

(заметим, что в точке $x = 0$ правая часть этой формулы, на основании теоремы Абеля, равна ее предельному значению при $x \to +0$).

При $x \leqslant 0$ выполняем аналогичные выкладки. В результате приходим к такому ответу:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2 x^n}{(2n+1)!} = \frac{1}{4}\left((x+1)\frac{\sin\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}} - \cos\sqrt{-x}\right),\ x < 0, \quad S(0) = 0. \blacktriangleright$$

С помощью почленного дифференцирования найти сумму рядов:

239. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}$.

◀ Дифференцируя данный ряд почленно дважды (в интервале сходимости степенной ряд можно почленно дифференцировать любое число раз), находим

$$f''(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2(n-1)} = \frac{2}{1+x^2}, \quad |x| < 1.$$

Отсюда последовательным интегрированием по x дважды получаем

$$f'(x) = 2\operatorname{arctg} x + C_1, \quad f(x) = 2x\operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2) + C_1x + C_2.$$

Поскольку $f(0) = f'(0) = 0$, то $C_1 = C_2 = 0$. Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)} = 2x\operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2).$$

Поскольку данный степенной ряд сходится на концах интервала сходимости $x = \pm 1$, то, согласно теореме Абеля и непрерывности правой части, можем утверждать, что последнее соотношение справедливо при $|x| \leqslant 1$. ▶

240. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$.

◀ Обозначая сумму этого ряда через $S(x)$, $|x| < \infty$, и интегрируя ряд почленно, получаем

$$\int S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!} + C = xe^{x^2} + C.$$

Дифференцируя по x обе части этого равенства, находим

$$S(x) = (1+2x^2)e^{x^2}, \quad |x| < \infty. \blacktriangleright$$

Используя метод Абеля, найти суммы следующих рядов:

241. $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \ldots$.

◀ Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{3n+1}}{3n+1} = S(x).$$

Легко найти, что он сходится абсолютно при $|x| < 1$. Далее видим, что в точке $x = 1$ степенной ряд совпадает со сходящимся (в силу признака Лейбница) данным числовым рядом. Следовательно, по теореме Абеля, будем иметь

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \ldots = \lim_{x\to 1-0} S(x).$$

Остается найти $S(x)$. Дифференцируя ряд почленно, получаем

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n} = \frac{1}{1+x^3}, \quad |x| < 1,$$

откуда

$$S(x) = \int\frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3}\ln\frac{1+x}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Поскольку $S(0) = 0$, то $C = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$. Следоватеьно,

$$S(x) = \frac{1}{3}\ln\frac{1+x}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

Поэтому окончательно находим $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \ldots = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. ▶

242. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \ldots$.

◀ Поскольку при $|x| < 1$ справедливо разложение (см. формулу IV, § 5)

$$(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$$

и данный числовой ряд, в силу признака Лейбница, сходится, то, по теореме Абеля, получаем

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \ldots = \lim_{x \to 1-0} (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \ ▶$$

243. $1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \ldots$.

◀ Сходимость этого ряда показана в примере 167. Там же мы получили разложение

$$x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} = \arcsin x, \quad |x| \leqslant 1,$$

из которого следует, что $1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \ldots = \frac{\pi}{2}$. ▶

Найти суммы следующих тригонометрических рядов:

244. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$.

◀ Рассматриваем этот ряд как мнимую часть степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \ln\left(\frac{1}{1-z}\right), \quad z = e^{ix}, \quad 0 < |x| < \pi,$$

где под $\ln z$ понимаем ту его ветвь, для которой $\ln 1 = 0$. Тогда будем иметь

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \operatorname{Im} \ln\left(\frac{1}{1-z}\right) = \operatorname{arctg} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) - \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2}, & \text{если} \quad 0 < x < \pi, \\ \frac{-\pi - x}{2}, & \text{если} \quad -\pi < x < 0. \end{cases}$$

Поскольку функция S 2π–периодическая и $S(k\pi) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$, то, используя последний результат, можем написать, что

$$S(x) = \begin{cases} \frac{(2k+1)\pi - x}{2}, & \text{если} \quad 2k\pi < x < 2(k+1)\pi, \\ 0, & \text{если} \quad x = 2k\pi. \end{cases} ▶$$

245. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2 - 1}$.

◀ Рассматривая ряд как действительную часть ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n^2 - 1}, \quad z = e^{ix}, \quad -\pi < x \leqslant \pi,$$

можем записать

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2 - 1} = \operatorname{Re} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n^2 - 1}.$$

При условии, что $z \neq -1$, последний ряд представляем в виде суммы двух сходящихся рядов:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z)^{n+1}}{n} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-z)^{n-1}}{n} = \frac{1}{2}\left(z\ln(1+z) + 1 - \frac{z}{2} - \frac{\ln(1+z)}{z}\right).$$

Следовательно,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2-1} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(z\ln(1+z) + 1 - \frac{z}{2} - \frac{\ln(1+z)}{z}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\cos x - \sin x\right), \quad e^{ix} \neq -1.$$

Заметим, что ограничение $e^{ix} \neq -1$ здесь можно снять. Действительно, если $e^{ix} = -1$, то $\cos nx = (-1)^n$. При этом получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$, равный $\frac{3}{4}$ (см. пример 230). Кроме того, если $\cos nx = (-1)^n$, то $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\cos x - x\sin x\right) = \frac{3}{4}$. Итак,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2-1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\cos x - x\sin x\right)$$

$\forall x \in [-\pi, \pi]$. Далее, в силу 2π-периодичности суммы этого ряда, значения повторяются. ►

246. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n!}$.

◄ Легко находим, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!} = \operatorname{Re}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \operatorname{Re} e^z = \operatorname{Re} e^{\cos x + i\sin x} = e^{\cos x}\cos(\sin x), \quad |x| < \infty. ►$$

Найти суммы следующих рядов:

247. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{((n-1)!)^2}{(2n)!}(2x)^{2n}$.

◄ Дифференцируя этот ряд по x дважды (в интервале сходимости $|x| < 1$) и умножая вторую производную его на $1 - x^2$, после некоторых преобразований рядов получаем дифференциальное уравнение относительно искомой суммы $S(x)$ ряда:

$$(1 - x^2)S''(x) - xS'(x) - 4 = 0.$$

Производя в нем замену независимого переменного x по формуле $t = \arcsin x$, приходим к уравнению $S''(t) = 4$, из которого находим

$$S(t) = 2t^2 + C_1 t + C_2, \quad C_1, C_2 = \text{const}.$$

Так как $S(0) = S'(0) = 0$, то отсюда получаем

$$S(x) = 2(\arcsin x)^2, \quad |x| < 1.$$

Нетрудно найти, что числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n-1)!)^2}{(2n)!}4^n,$$

являющийся значением данного степенного ряда при $x = \pm 1$, в силу признака Гаусса, сходится. А тогда, по теореме Абеля и на основании непрерывности функции $x \to 2(\arcsin x)^2$ на сегменте $[-1, 1]$, можем утверждать, что $S(x) = 2(\arcsin x)^2$ при $|x| \leqslant 1$. ►

248. $\dfrac{1!}{x+1} + \dfrac{2!}{(x+1)(x+2)} + \dfrac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \ldots$.

◄ Прежде всего устанавливаем область сходимости. Для этого, замечая, что общий член ряда $a_n = \frac{n!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}$, $x \neq -k$, $k \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого достаточно большого номера имеет определенный знак, применяем признак Гаусса. Имеем $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{x}{n} - \frac{x}{n(n+1)}$. Отсюда, в силу приведенного признака, следует, что ряд сходится только при $x > 1$.

Найдем теперь сумму $S(x)$ данного ряда. С этой целью представим общий член ряда в виде

$$a_n = \frac{1}{x-1}\left(\frac{n!}{(1+x)(2+x)\ldots(n-1+x)} - \frac{(n+1)!}{(1+x)(2+x)\ldots(n+x)}\right), \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

и вычислим частичную сумму $S_n(x)$ рассматриваемого ряда:

$$S_n(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\left(\left(\frac{2!}{1+x} - \frac{3!}{(1+x)(2+x)}\right) + \right.$$

$$+\left(\frac{3!}{(1+x)(2+x)} - \frac{4!}{(1+x)(2+x)(3+x)}\right) +$$

$$\left. + \ldots + \left(\frac{n!}{(1+x)(2+x)\ldots(n-1+x)} - \frac{(n+1)!}{(1+x)(2+x)\ldots(n+x)}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{x-1} - \frac{(n+1)!}{(x-1)(1+x)(2+x)\ldots(n+x)} = \frac{1}{x-1} - \frac{(n+1)a_n}{x-1}.$$

Поскольку ряд сходится, а члены ряда положительны и монотонно убывают, то, в силу примера 13, справедливо соотношение $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)a_n = 0$. Принимая его во внимание, получаем

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{1}{x-1}, \quad x > 1. ►$$

249. $\frac{a_1}{a_2+x} + \frac{a_1}{a_2+x}\frac{a_2}{a_3+x} + \ldots$ при условии, что $x > 0$, $a_n > 0$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ — расходящийся.

◄ Представляя общий член $b_n(x)$ ряда в виде

$$b_n(x) = \frac{a_1a_2\ldots a_n}{(a_2+x)(a_3+x)\ldots(a_{n+1}+x)} =$$

$$= \frac{1}{x}\left(\frac{a_1a_2\ldots a_n}{(a_2+x)(a_3+x)\ldots(a_n+x)} - \frac{a_1a_2\ldots a_{n+1}}{(a_2+x)\ldots(a_{n+1}+x)}\right), \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

находим частичную сумму $S_n(x)$ данного ряда:

$$S_n(x) = \frac{a_1}{a_2+x} + \frac{1}{x}\left(\left(\frac{a_1a_2}{a_2+x} - \frac{a_1a_2a_3}{(a_2+x)(a_3+x)}\right) + \right.$$

$$+\left(\frac{a_1a_2a_3}{(a_2+x)(a_3+x)} - \frac{a_1a_2a_3a_4}{(a_2+x)(a_3+x)(a_4+x)}\right) + \ldots +$$

$$\left. + \left(\frac{a_1a_2a_3\ldots a_n}{(a_2+x)(a_3+x)\ldots(a_n+x)} - \frac{a_1a_2\ldots a_{n+1}}{(a_2+x)\ldots(a_{n+1}+x)}\right)\right) =$$

$$= \frac{a_1}{a_2+x} + \frac{1}{x}\left(\frac{a_1a_2}{a_2+x} - \frac{a_1a_2\ldots a_{n+1}}{(a_2+x)(a_3+x)\ldots(a_{n+1}+x)}\right), \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Так как

$$0 < \frac{a_2a_3\ldots a_{n+1}}{(a_2+x)(a_3+x)\ldots(a_{n+1}+x)} = \frac{1}{\left(1+\frac{x}{a_2}\right)\left(1+\frac{x}{a_3}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{a_{n+1}}\right)} \leqslant \frac{1}{1+x\sum\limits_{q=2}^{n}\frac{1}{a_q}}$$

и ряд с положительными членами может расходиться только к бесконечности, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 a_2 \ldots a_{n+1}}{(a_2+x)(a_3+x)\ldots(a_{n+1}+x)} = 0.$$

Следовательно, $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{a_1}{x}$. ►

250. $\dfrac{x}{1-x^2} + \dfrac{x^2}{1-x^4} + \dfrac{x^4}{1-x^8} + \ldots$.

◄ Представляя частичную сумму ряда в виде

$$S_n(x) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right) + \left(\frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{1-x^{2^n}} - \frac{1}{1+x^{2^n}}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \left(\frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{1+x}\right) + \left(\frac{1}{1-x^4} - \frac{1}{1+x^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \ldots + \left(\frac{1}{1-x^{2^n}} - \frac{1}{1+x^{2^{n-1}}}\right) - \frac{1}{1+x^{2^n}}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \ldots + \frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}} - \frac{1}{1+x^{2^n}}\right),$$

получаем

$$S_n(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + S_n(x) - \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} - \frac{1}{1+x^{2^n}}\right),$$

откуда

$$S_n(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x^{2^n}} - \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}.$$

Поэтому, если $|x| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{x}{1-x}$. Если же $|x| > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{1}{1-x}$. Следовательно, сумма ряда

$$S(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x}, & \text{если} \quad |x| < 1, \\ \frac{1}{1-x}, & \text{если} \quad |x| > 1. \end{cases}$$ ►

251. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$.

◄ Рассматривая частичную сумму $S_n(x)$ ряда

$$S_n(x) = \frac{x^2}{(1-x)^2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{x}{(1+x)(x^2+x+1)} + \right.$$
$$\left. + \frac{x^2}{(x^2+x+1)(x^3+x^2+x+1)} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(1+x+\ldots+x^{n-1})(1+x+\ldots+x^n)}\right)$$

и замечая, что

$$\frac{x^{n-1}}{(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})(1+x+\ldots+x^n)} = \frac{1+x+\ldots+x^{n-1}}{1+x+\ldots+x^n} - \frac{1+x+\ldots+x^{n-2}}{1+x+\ldots+x^{n-1}},$$
$$n \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

получаем

$$S_n(x) = \frac{x^2}{(1-x)^2}\,\frac{1+x+\ldots+x^{n-1}}{1+x+\ldots+x^n} = \frac{x^2}{(1-x)^2}\,\frac{1-x^n}{1-x^{n+1}}.$$

Отсюда следует, что если $|x| < 1$, то $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{x^2}{(1-x)^2}$. Если же $|x| > 1$, то $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$, где $S(x)$ — сумма ряда. ►

С помощью разложения подынтегральной функции в ряд вычислить следующие интегралы:

252. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x}\,dx.$

◀ При $|x| \leqslant 1$ справедливо разложение

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!\,x^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}$$

(см. пример 168). Разделив почленно этот ряд на x, $x \neq 0$, и проинтегрировав его в пределах от 0 до 1, получим

$$\int_0^1 \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x}\,dx = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)^2}. \ ▶$$

253. $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}\ln(1-x^q)\,dx,\ p>0,\ q>0.$

◀ Данный интеграл, вообще говоря, является несобственным, поэтому

$$\int_0^1 x^{p-1}\ln(1-x^q)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1\to+0\\ \varepsilon_2\to+0}} \int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} x^{p-1}\ln(1-x^q)\,dx.$$

Поскольку при $0<x<1$ справедливо разложение $\ln(1-x^q) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{qn}}{n}$, то

$$\int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} x^{p-1}\ln(1-x^q)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_1^{qn+p} - (1-\varepsilon_2)^{qn+p}}{n(qn+p)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_1^{qn+p}}{n(qn+p)} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\varepsilon_2)^{qn+p}}{n(qn+p)} =$$

$$= \varepsilon_1^p \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_1^{qn}}{n(qn+p)} - (1-\varepsilon_2)^p \sum_{n=1}^{\infty}\frac{((1-\varepsilon_2)^q)^n}{n(qn+p)}.$$

Замечая, что оба степенных ряда сходятся при $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$, на основании теоремы Абеля, имеем

$$\int_0^1 x^{p-1}\ln(1-x^q)\,dx = \lim_{\varepsilon_1\to+0}\varepsilon_1^p \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\varepsilon_1^q)^n}{n(qn+p)} - \lim_{\varepsilon_2\to+0}(1-\varepsilon_2)^p \sum_{n=1}^{\infty}\frac{((1-\varepsilon_2)^q)^n}{n(qn+p)} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(qn+p)}. \ ▶$$

254. $\displaystyle\int_0^1 \ln x\cdot\ln(1-x)\,dx.$

◀ С помощью однократного применения метода интегрирования по частям приводим данный интеграл к виду

$$\int_0^1 \ln x\cdot\ln(1-x)\,dx = -\int_0^1 \ln(1-x)\,dx - \int_0^1 \ln x\,dx + \int_0^1 \frac{\ln x\,dx}{1-x}. \qquad (1)$$

Считая, что $0 < \varepsilon_1 \leqslant x \leqslant 1 - \varepsilon_2$, записываем соответствующие разложения в степенные ряды:

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad \ln x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{n}, \quad \frac{\ln(1-x)}{1-x} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^{n-1}}{n}.$$

Поскольку

$$\int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to +0 \\ \varepsilon_2 \to +0}} \int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \ln x \cdot \ln(1-x)\,dx,$$

то из (1) почленным интегрированием степенных рядов, на основании теоремы Абеля, получаем

$$\int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to +0 \\ \varepsilon_2 \to +0}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\varepsilon_2)^{n+1} - \varepsilon_1^{n+1}}{n(n+1)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\varepsilon_1)^{n+1} - \varepsilon_2^{n+1}}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_2^n - (1-\varepsilon_1)^n}{n^2} \right) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2 - \frac{\pi^2}{6}. \blacktriangleright$$

255. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{e^{2\pi x} - 1}$.

◀ Полагая $t = e^{-2\pi x}$, получаем один из интегралов, вычисленных нами в предыдущем примере:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{e^{2\pi x} - 1} = -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^1 \frac{\ln t\,dt}{1-t}.$$

Поэтому имеем

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{e^{2\pi x} - 1} = \frac{1}{24}. \blacktriangleright$$

256. Разложить по целым положительным степеням модуля k, $0 \leqslant k < 1$, полный эллиптический интеграл первого рода

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

◀ Поскольку $k^2 \sin^2 \varphi \leqslant k^2 < 1$, то возможно разложение (см. формулу IV, §5):

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \sin^{2n} \varphi. \qquad (1)$$

В силу оценки $k^{2n} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sin^{2n} \varphi \leqslant \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \leqslant k^{2n}$ и сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k^{2n}$, ряд (1) сходится равномерно (по признаку Вейерштрасса) по φ. Кроме того, члены ряда (1) являются непрерывными функциями, поэтому, по одному из свойств функциональных рядов, рассматриваемый функциональный ряд можно почленно интегрировать. Имеем

$$F(k) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi\,d\varphi.$$

Отсюда, пользуясь равенством $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, окончательно находим

$$F(k) = \frac{\pi}{2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 k^{2n}\right). \blacktriangleright$$

Доказать равенства:

257. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$.

◄ Поскольку

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \int_0^1 e^{-\varphi(x)}\,dx,$$

где

$$\varphi(x) = \begin{cases} x\ln x, & \text{если} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & \text{si} \quad x = 0, \end{cases}$$

то

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}(\varphi(x))^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 \varphi^n(x)\,dx,$$

откуда, на основании примера 195, г), получаем нужную формулу. ►

258.

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(\sin x)\cos nx\,dx = \begin{cases} \frac{\pi}{n!}, & \text{если} \quad n \in \mathbb{N}, \\ 2\pi, & \text{если} \quad n = 0. \end{cases}$$

◄ Разлагая функцию $x \mapsto e^{\cos x}\cos(\sin x)$ в ряд, находим

$$e^{\cos x}\cos(\sin x) = \operatorname{Re}\left(e^z\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos kx}{k!},$$

где $z = e^{ix} = \cos x + i\sin x$.

Полученный ряд, в силу признака Вейерштрасса, сходится равномерно на всей числовой прямой и функции $x \mapsto \cos kx$ непрерывны, поэтому ряд можно почленно интегрировать вместе с функцией $x \mapsto \cos nx$. Имеем

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(\sin x)\cos nx\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int_0^{2\pi}\cos kx\cos nx\,dx = \frac{\pi}{n!}, \quad \text{если } n \in \mathbb{N}, \text{ и}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(\sin x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int_0^{2\pi}\cos kx\,dx = 2\pi. \blacktriangleright$$

Вычислить интегралы:

259. $\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2}\,dx$.

◀ Пусть $|\alpha| < 1$. Пользуясь примером 164, находим

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2}\, dx = \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} x \sin nx\, dx.$$

Поскольку функции $x \mapsto x \sin nx$ непрерывны на $[0, \pi]$ и функциональный ряд справа, в силу мажорантного признака Вейерштрасса, равномерно сходится (здесь $|\alpha^{n-1} x \sin nx| \leqslant \pi|\alpha|^{n-1}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha|^{n-1}$ сходится), то рассматриваемый ряд можно почленно интегрировать. Имеем

$$I = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \alpha^{n-1} = \begin{cases} \frac{\pi}{\alpha} \ln(1+\alpha), & \text{если} \quad \alpha \neq 0, \\ \pi, & \text{если} \quad \alpha = 0. \end{cases}$$

Пусть $|\alpha| > 1$. Тогда, преобразовывая подынтегральную функцию к виду

$$\frac{x \sin x}{\alpha^2(\alpha^{-2} - 2\alpha^{-1} \cos x + 1)}$$

и пользуясь полученным выше результатом, можем записать

$$I = \frac{\pi}{\alpha} \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right), \quad |\alpha| > 1.$$

Пусть $\alpha = 1$. Тогда исходный интеграл имеет вид

$$I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t\, dt}{\operatorname{tg} t}.$$

Функция

$$f : t \mapsto \begin{cases} 1, & \text{если} \quad t = 0, \\ \frac{t}{\operatorname{tg} t}, & \text{если} \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{если} \quad t = \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

непрерывна на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Следовательно, она интегрируема, т.е. последний интеграл имеет смысл.

Кроме того, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ в силу признака Лейбница, сходится. Поэтому по теореме Абеля

$$I|_{\alpha=1} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \pi \ln 2.$$

Пусть $\alpha = -1$. Тогда интеграл

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x \operatorname{tg} \frac{x}{2}\, dx$$

расходится, так как $x \operatorname{tg} \frac{x}{2} \sim \frac{2\pi}{\pi - x}$ при $x \to \pi$.

Таким образом, окончательно получаем

$$I = \begin{cases} \frac{\pi}{\alpha} \ln(1+\alpha), & \text{если} \quad -1 < \alpha < 0, \text{ или } 0 < \alpha \leqslant 1, \\ \pi, & \text{если} \quad \alpha = 0, \\ \frac{\pi}{\alpha} \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right), & \text{если} \quad |\alpha| > 1. \end{cases}$$ ▶

260. $\int\limits_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2)\, dx.$

◀ Пусть $|\alpha| < 1$. Тогда, пользуясь результатом примера 208, получаем

$$I = \int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\,dx = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n} \int_0^\pi \cos nx\,dx = 0. \tag{1}$$

Пусть $|\alpha| > 1$. В этом случае, преобразовывая значение подынтегральной функции к виду $\ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2) = 2\ln|\alpha| + \ln\left(1 - \frac{2}{\alpha}\cos x + \frac{1}{\alpha^2}\right)$ и пользуясь равенством (1), находим

$$I = 2\pi\ln|\alpha|.$$

Пусть $\alpha = 1$. Тогда, по теореме Абеля, можем написать

$$\ln(2(1-\cos x)) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}, \quad x \neq 2k\pi.$$

Следовательно,

$$I|_{\alpha=1} = \int_0^\pi \ln(2(1-\cos x))\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_\varepsilon^\pi \ln(2(1-\cos x))\,dx = -2\lim_{\varepsilon\to+0} \int_\varepsilon^\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}\,dx.$$

Замечая, что, по признаку Дирихле, ряд, стоящий под знаком последнего интеграла, равномерно сходится, а функции $x \mapsto \cos nx$ непрерывны, выполняем почленно интегрирование:

$$I|_{\alpha=1} = 2\lim_{\varepsilon\to+0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varepsilon}{n^2}.$$

Так как $\frac{|\sin n\varepsilon|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$ и ряд $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ сходится, то, по мажорантному признаку Вейерштрасса, ряд $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\sin n\varepsilon}{n^2}$ равномерно (по параметру ε) сходится. Кроме того, $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \sin n\varepsilon = 0$. Следовательно, по одному из свойств равномерно сходящихся рядов, получаем

$$I|_{\alpha=1} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{\sin n\varepsilon}{n^2} = 0.$$

Аналогично устанавливаем, что $I|_{\alpha=-1} = 0$.

Окончательно имеем

$$I = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad |\alpha| \leqslant 1, \\ 2\pi\ln|\alpha|, & \text{если} \quad |\alpha| > 1. \end{cases}$$ ▶

Найти суммы следующих матричных рядов:

261. $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A^n}{3^n} - \frac{A^{2n}}{8^n}\right)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

◀ Поскольку $\sum\limits_{n=0}^{\infty} B^n = (I - B)^{-1}$ при $\| B \| < 1$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{3}\right)^n = \left(I - \frac{A}{3}\right)^{-1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n}}{8^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A^2}{8}\right)^n = \left(I - \frac{A^2}{8}\right)^{-1}.$$

Заметим, что в случае первого ряда $B = \frac{1}{3}A$ и $\| B \| = \frac{1}{3} \| A \| = \frac{1}{3}\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{7}}{3} < 1$, а в случае второго $-B = \frac{A^2}{8}$ и $\| B \| = \frac{1}{8} \| A^2 \| = \frac{1}{8}\sqrt{1^2 + 4^2 + 2^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{2}}{8} < 1$.

Таким образом,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A^n}{3^n} - \frac{A^{2n}}{8^n}\right) = \left(I - \frac{A}{3}\right)^{-1} - \left(I - \frac{A^2}{8}\right)^{-1}. \tag{1}$$

Вычисляя обратные матрицы

$$\left(I-\frac{A}{3}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix},\quad \left(I-\frac{A^2}{8}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{9}{8} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{9}{8}\end{pmatrix}^{-1}=\frac{32}{89}\begin{pmatrix}\frac{9}{4} & 1\\ -\frac{1}{2} & \frac{9}{4}\end{pmatrix}$$

и подставляя их значение в равенство (1), получаем

$$S=\frac{1}{89}\begin{pmatrix}17 & 57\\ -\frac{57}{2} & 17\end{pmatrix}. ▶$$

262. $S=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)A^n$, где $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$.

◀ Поскольку

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)A^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}A^n\right)^2=((I-A)^{-1})^2,$$

то

$$S=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}^{-2}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}^2\left(\frac{72}{35}\right)^2=\frac{432}{245}\begin{pmatrix}\frac{13}{12} & -1\\ 1 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}. ▶$$

Упражнения для самостоятельной работы

Найти суммы следующих рядов:

133. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+2)(n+5)}$. **134.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3-3n+2}$. **135.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n+2}{(n^2-1)^2}$.

136. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$. **137.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2e^{-nx}$, $x>0$. **138.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2(n+1)}$.

139. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{n(n-1)}$. **140.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{(n-1)n(n+1)}$. **141.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\sin(2n+1)x$.

С помощью разложения подынтегральной функции в ряд вычислить следующие интегралы (в примерах 145—148 A — постоянная матрица):

142. $\int\limits_0^1\operatorname{erf}(x)\,dx$, где $\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt$ — интеграл вероятностей.

143. $\int\limits_0^1\operatorname{si}(x)\,dx$, где $\operatorname{si}(x)=-\int\limits_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$ — интегральный синус.

144. $\int\limits_0^{\pi}\sin(\sin x)\,dx$. **145.** $\int\limits_0^1 e^{Ax^2}\,dx$, $A^2=-A$.

146. $\int\limits_0^{\pi}\sin(A\sqrt{x})\,dx$, $A^2=A$. **147.** $\int\limits_0^{\pi}\cos(A\sqrt{x})\,dx$, $A^2=I$.

148. $\int\limits_0^1 x\ln(I+Ax)\,dx$, $A=\begin{pmatrix}\sin\varphi & -\cos\varphi\\ -\cos\varphi & -\sin\varphi\end{pmatrix}$.

Глава 2

Дифференциальное исчисление функций векторного аргумента

§ 1. Предел функции. Непрерывность

1.1. Предел функции.

Пусть числовая функция f определена в области $E \setminus \{x_0\}$, где $E \subset \mathbb{R}^m$, а $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ — внутренняя или предельная точка области E.

Определение 1 (Гейне). *Функция f имеет предел (предельное значение) при $x \to x_0$ (в точке x_0), если существует число $A \in \mathbb{R}$ такое, что для произвольной последовательности (x_n) значений $x_n \in E \setminus \{x_0\}$, сходящейся к точке x_0, соответствующая последовательность $(f(x_n))$ значений функции f сходится к A.*

При этом число A называется *пределом функции* f при $x \to x_0$, что записывается

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A, \quad \text{или} \quad f(x) \to A \quad \text{при} \quad x \to x_0,$$

или

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ \ldots \\ x_m \to x_m^0}} f(x_1, \ldots, x_m) = A,$$

или

$$f(x_1, \ldots, x_m) \to A \quad \text{при} \quad x_1 \to x_1^0, \ldots, x_m \to x_m^0.$$

Определение 2 (Коши). *Функция f имеет предел при $x \to x_0$, если существует такое число A, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ такое, что $\forall x \in E$, удовлетворяющих условию $0 < \|x - x_0\| < \delta$, где*

$$\|x - x_0\| = \rho(x, x_0) = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \ldots + (x_m - x_m^0)^2},$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Оба определения предела (Гейне и Коши) эквивалентны.

1.2. Непрерывность.

Пусть $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$, а $x_0 \in D$.

Определение. *Функция f называется непрерывной в точке $x_0 \in D$, если выполняется любое из эквивалентных условий:*

1) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ *такое, что* $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, *как только* $\|x - x_0\| < \delta$;

2) *для произвольной последовательности (x_n) значений $x_n \in D$, сходящейся к точке x_0, соответствующая последовательность $(f(x_n))$ значений функции f сходится при $n \to \infty$ к $f(x_0)$;*

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ *или* $f(x) - f(x_0) \to 0$ *при* $x - x_0 \to 0$;

4) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ *такое, что*

$$f(S(x_0, \delta)) \subset]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[,$$

или, что то же самое,

$$f : S(x_0, \delta) \to]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[,$$

где $S(x_0, \delta)$ — открытый шар в пространстве $\mathbb{R}^m$ с центром в точке x_0 и радиусом δ.

Функция f непрерывна в области D, если она непрерывна в каждой точке области D.

1.3. Равномерная непрерывность.

Определение. *Функция* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \in \mathbb{R}^m$, *называется равномерно-непрерывной в области* D, *если* $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0$ *такое, что* $\forall x \in D \wedge \forall y \in D$, *удовлетворяющих условию* $\|x - y\| < \delta$, *выполняется неравенство* $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Теорема (Кантора). *Если функция* $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$, $\overline{D} \subset \mathbb{R}^m$, *непрерывна в замкнутой ограниченной области* $\overline{D}$, *то она равномерно-непрерывна в этой области.*

1. Показать, что для функции $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$

$$\lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} f(x, y) \right) = 1, \quad \lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} f(x, y) \right) = -1,$$

в то время как $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$ не существует.

◀ Имеем

$$\lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} \frac{x - y}{x + y} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1, \quad \lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} \frac{x - y}{x + y} \right) = \lim_{y \to 0} \frac{-y}{y} = -1.$$

Поскольку последовательности $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $(x_n', y_n') = \left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right)$ сходятся к точке $(0, 0)$ при $n \to \infty$, а соответствующие последовательности значений функций сходятся к различным пределам

$$f(x_n, y_n) = 0 \to 0, \quad f(x_n', y_n') = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{3}{n}} \to \frac{1}{3}$$

при $n \to \infty$, то предел $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$ не существует. ▶

2. Показать, что для функции $f(x, y) = \dfrac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$

$$\lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} f(x, y) \right) = 0,$$

тем не менее $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$ не существует.

◀ Равенство повторных пределов следует из того, что $\lim\limits_{y \to 0} f(x, y) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x, y) = 0$. То, что двойной предел не существует, следует из того, что последовательности $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $(x_n', y_n') = \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right)$ сходятся к точке $(0, 0)$, а соответствующие последовательности значений функции сходятся при $n \to \infty$ к различным предельным значениям:

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}} \to 1, \quad f(x_n', y_n') = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4} + \frac{4}{n^2}} \to 0. ▶$$

3. Показать, что для функции $f(x, y) = (x + y) \sin \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{1}{y}$ оба повторных предела $\lim\limits_{x \to 0} \left(\lim\limits_{y \to 0} f(x, y) \right)$ и $\lim\limits_{y \to 0} \left(\lim\limits_{x \to 0} f(x, y) \right)$ не существуют, но, тем не менее, существует $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = 0$.

◀ Пусть $y \neq \frac{1}{n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$, тогда $y \sin \frac{1}{y} \neq 0$. Очевидно, последовательности $(x_n) = \left(\frac{1}{n\pi}\right)$, $(x_n') = \left(\frac{2}{(4n+1)\pi}\right)$ сходятся к нулю при $n \to \infty$. При этом соответствующие последовательности значений функции $(f(x_n, y)) = (0)$, $(f(x_n', y)) = \left(y \sin \frac{1}{y}\right)$ при $n \to \infty$ сходятся к различным предельным значениям. Следовательно, $\lim\limits_{x \to 0} f(x, y)$ не существует. Аналогично устанавливается, что $\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)$ также не существует. Из этого вытекает, что оба повторных предела не существуют. Однако из неравенства $0 \leqslant \left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right| \leqslant |x+y| \leqslant |x|+|y|$, справедливого при любых $x \neq 0$, $y \neq 0$, следует, что

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left((x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right) = 0. \blacktriangleright$$

4. Существует ли предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$?

◀ Этот предел не существует, так как последовательности $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $(x_n', y_n') = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$ сходятся к точке $(0, 0)$ при $n \to \infty$, в то время как соответствующие последовательности значений функции сходятся к различным предельным значениям:

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} \to 1, \quad f(x_n', y_n') = \frac{\frac{2}{n^3}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}} \to 0$$

при $n \to \infty$. ▶

5. Чему равен предел функции $f(x, y) = x^2 e^{-(x^2-y)}$ вдоль любого луча $x = t\cos\alpha$, $y = t\sin\alpha$, $0 \leqslant t < +\infty$, при $t \to +\infty$? Можно ли эту функцию назвать бесконечно малой при $x \to \infty$ и $y \to \infty$?

◀ Обозначим $F(t, \alpha) = f(t\cos\alpha, t\sin\alpha)$, тогда

$$F(t, \alpha) = t^2\cos^2\alpha\, e^{-t^2\cos^2\alpha + t\sin\alpha}, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi.$$

Если $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$, то $F\left(t, \pm\frac{\pi}{2}\right) = 0$ и, следовательно, $F\left(t, \pm\frac{\pi}{2}\right) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Если же $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{2}$, то $\cos^2\alpha \neq 0$ и $t^2\cos^2\alpha - t\sin\alpha \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Тогда, по правилу Лопиталя, получаем

$$\lim_{t\to+\infty} F(t, \alpha) = \cos^2\alpha \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2}{e^{t^2\cos^2\alpha - t\sin\alpha}} = \cos^2\alpha \lim_{t\to+\infty} \frac{2t}{(2t\cos^2\alpha - \sin\alpha)e^{t^2\cos^2\alpha - t\sin\alpha}} =$$

$$= \cos^2\alpha \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\left(\cos^2\alpha - \frac{\sin\alpha}{2t}\right)e^{t^2\cos^2\alpha - t\sin\alpha}} = 0.$$

Поэтому $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t, \alpha) = 0$ при любых α.

Функция f не является бесконечно малой при $x \to \infty$ и $y \to \infty$, поскольку при $x_n = n \to +\infty$, $y_n = n^2 \to +\infty$ получаем равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 e^{-(n^2-n^2)} = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$, противоречащее определению бесконечно малой величины. ▶

6. Найти $\lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{y\to b} f(x, y)\right)$ и $\lim\limits_{y\to b}\left(\lim\limits_{x\to a} f(x, y)\right)$, если:

а) $f(x, y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$, $a = \infty$, $b = \infty$; б) $f(x, y) = \dfrac{x^y}{1+x^y}$, $a = +\infty$, $b = +0$;

в) $f(x, y) = \sin\dfrac{\pi x}{2x+y}$, $a = \infty$, $b = \infty$; г) $f(x, y) = \dfrac{1}{xy}\operatorname{tg}\dfrac{xy}{1+xy}$, $a = 0$, $b = \infty$;

д) $f(x, y) = \log_x(x+y)$, $a = 1$, $b = 0$.

◀ а) При $x \neq 0$, $y \neq 0$ имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\lim_{y\to\infty} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\lim_{y\to\infty} \frac{\frac{x^2}{y^2}+1}{\frac{x^2}{y^2}+y^2}\right) = 0, \quad \lim_{y\to\infty}\left(\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}\right) = \lim_{y\to\infty} 1 = 1.$$

б) Функция $y \mapsto x^y$ непрерывна при $y > 0$ (x считаем постоянным), поэтому $\lim\limits_{y \to +0} x^y = 1$; при постоянном значении $y > 0$ функция $x \mapsto x^y$ непрерывна при всех $x > 0$, поэтому $\lim\limits_{x \to +\infty} x^y = +\infty$.

Пользуясь полученными равенствами, находим

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\lim_{y \to +0} \frac{x^y}{1 + x^y} \right) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{y \to +0} \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{x^y}{1 + x^y} \right) = 1.$$

в) При каждом фиксированном x функция непрерывна по y, если $|y| > 2|x|$, а при всяком фиксированном y — непрерывна по x, как только $|x| > \frac{|y|}{2}$. Поэтому

$$\lim_{y \to \infty} \sin \frac{\pi x}{2x + y} = 0, \quad \lim_{x \to \infty} \sin \frac{\pi x}{2x + y} = \lim_{x \to \infty} \sin \frac{\pi}{2 + \frac{y}{x}} = 1.$$

Следовательно,

$$\lim_{x \to \infty} \left(\lim_{y \to \infty} \sin \frac{\pi x}{2x + y} \right) = 0, \quad \lim_{y \to \infty} \left(\lim_{x \to \infty} \sin \frac{\pi x}{2x + y} \right) = 1.$$

г) При фиксированном $x \neq 0$ $\lim\limits_{y \to \infty} \frac{xy}{1 + xy} = 1$, поэтому, в силу непрерывности тангенса, получаем $\lim\limits_{y \to \infty} \frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1 + xy} = 0$.

Пусть теперь y фиксированное. Тогда, пользуясь тем, что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} = 1$, имеем

$$\lim_{x \to 0} f(x, y) = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} \frac{xy}{1+xy}}{\frac{xy}{1+xy}} (1 + xy)^{-1} = 1.$$

На основании этих равенств находим

$$\lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to \infty} \frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1 + xy} \right) = 0, \quad \lim_{y \to \infty} \left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1 + xy} \right) = 1.$$

д) Имеем $f(x, y) = \log_x (x + y) = \frac{\ln(x+y)}{\ln x}$, $x > 0$, $x + y > 0$, $x \neq 1$. Из непрерывности логарифмической функции следует, что

$$\lim_{y \to 0} f(x, y) = \lim_{y \to 0} \frac{\ln(x + y)}{\ln x} = \frac{\ln x}{\ln x} = 1.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x \to 1} \left(\lim\limits_{y \to 0} f(x, y) \right) = 1$.

Поскольку

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{\ln(x + y)}{\ln x} = \begin{cases} +\infty, & \text{если } -1 < y < 0, \\ -\infty, & \text{если } 0 < y < +\infty, \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{\ln(x + y)}{\ln x} = \begin{cases} -\infty, & \text{если } -1 < y < 0, \\ +\infty, & \text{если } 0 < y < +\infty, \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x + y)}{\ln x} = 1, \quad \text{если } y = 0,$$

то $\lim\limits_{x \to 1} f(x, y)$, а вместе с ним и $\lim\limits_{y \to 0} \left(\lim\limits_{x \to 1} f(x, y) \right)$ не существуют. ►

Найти следующие двойные пределы:

7. $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \dfrac{x + y}{x^2 - xy + y^2}$.

◀ Пользуясь очевидным неравенством $x^2 - xy + y^2 \geqslant xy$, получаем (при $x \neq 0$, $y \neq 0$)

$$0 \leqslant \left|\frac{x+y}{x^2 - xy + y^2}\right| \leqslant \left|\frac{x+y}{xy}\right| \leqslant \frac{1}{|y|} + \frac{1}{|x|}.$$

Отсюда следует, что

$$0 \leqslant \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \left|\frac{x+y}{x^2 - xy + y^2}\right| \leqslant \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|}\right) = 0.$$

Таким образом, $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = 0$. ▶

8. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

◀ Пусть $x \neq 0$, $y \neq 0$, тогда

$$0 < \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = \frac{x^2}{x^4+y^4} + \frac{y^2}{x^4+y^4} \leqslant \frac{x^2}{x^4} + \frac{y^2}{y^4} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}. \qquad (1)$$

Поскольку $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) = 0$, то, пользуясь неравенством (1), заключаем, что

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = 0. \ ▶$$

9. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}} \dfrac{\sin xy}{x}$.

◀ Имеем $\frac{\sin xy}{x} = \frac{\sin xy}{xy}\cdot y$, $y \neq 0$. Так как $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}} \frac{\sin xy}{xy} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ ($xy = t$, $a \neq \infty$), то $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}} \frac{\sin xy}{x} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} \lim\limits_{y\to a} y = a$. ▶

10. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$.

◀ Пользуясь элементарным неравенством

$$(x^2+y^2)e^{-(x+y)} = \frac{x^2}{e^{x+y}} + \frac{y^2}{e^{x+y}} < \frac{x^2}{e^x} + \frac{y^2}{e^y},$$

справедливым при $x > 0$, $y > 0$, получаем

$$0 \leqslant \lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)} \leqslant \lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \left(\frac{x^2}{e^x} + \frac{y^2}{e^y}\right) = 0.$$

Отсюда $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)} = 0$. ▶

11. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

◀ Из очевидного неравенства $x^2+y^2 \geqslant 2xy$ следует, что $\frac{xy}{x^2+y^2} \leqslant \frac{1}{2}$. Поэтому $0 < \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} \to 0$ при $x\to+\infty$. Отсюда вытекает, что $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} = 0$. ▶

12. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

◄ Из неравенств $x^2y^2 \leqslant \frac{1}{4}(x^2+y^2)^2$, $1 \geqslant (x^2+y^2)^{x^2y^2} \geqslant (x^2+y^2)^{\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2}$, справедливых при $0 < x^2+y^2 < 1$, и из того, что

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)^{\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2} = \lim_{t\to +0} t^{\frac{1}{4}t^2} = \lim_{t\to +0} e^{\frac{t^2}{4}\ln t} = 1,$$

вытекает равенство $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)^{x^2y^2} = 1$. ►

13. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

◄ В силу непрерывности показательной и логарифмической функций, имеем

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} = \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} \exp\left\{\frac{1}{1+\frac{y}{x}} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right\} = e. ►$$

14. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

◄ Пользуясь непрерывностью логарифмической функции и тем, что $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \sqrt{x^2+y^2} = 1 \neq 0$, получаем

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\ln 2}{1} = \ln 2. ►$$

15. По каким направлениям φ существует конечный предел:

а) $\lim\limits_{\rho\to +0} e^{\frac{x}{x^2+y^2}}$; б) $\lim\limits_{\rho\to +\infty} e^{x^2-y^2} \sin 2xy$, если $x = \rho\cos\varphi$ и $y = \rho\sin\varphi$.

◄ а) Конечный предел

$$\lim_{\rho\to +0} e^{\frac{x}{x^2+y^2}} = \lim_{\rho\to +0} e^{\frac{\cos\varphi}{\rho}}$$

существует тогда, когда $\cos\varphi \leqslant 0$, т. е. если $\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{2}$.

б) Имеем

$$\lim_{\rho\to +\infty} e^{x^2-y^2} \sin 2xy = \lim_{\rho\to +\infty} e^{\rho^2\cos 2\varphi} \sin(\rho^2 \sin 2\varphi).$$

Поскольку $\rho^2 \to +\infty$, а $\rho \mapsto \sin(\rho^2\sin 2\varphi)$ — ограниченная функция, то предел будет конечным, если $\cos 2\varphi < 0$ или $\sin 2\varphi = 0$. В первом случае $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4} < \varphi < \frac{7\pi}{4}$, во втором $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$. ►

Найти точки разрыва следующих функций:

16. $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

◄ Функция $(x, y) \mapsto x^2+y^2$ непрерывна при всех x и y как многочлен от x и y. По известной теореме о непрерывности суперпозиции непрерывных функций, $(x, y) \mapsto (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$ — также непрерывная функция при всех x и y, кроме точки $(0,0)$, где знаменатель $(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ обращается в нуль. Следовательно, $(0,0)$ — точка бесконечного разрыва. ►

17. $u = \dfrac{x+y}{x^3+y^3}$.

◄ Поскольку числитель и знаменатель — непрерывные функции, то данная функция может иметь разрыв лишь в точках, где знаменатель x^3+y^3 обращается в нуль. Решая уравнение $x^3 + y^3 = 0$ относительно y, находим $y = -x$. Следовательно, функция имеет разрывы на прямой $y = -x$.

Пусть $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$ и $x_0 + y_0 = 0$. Тогда

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{x+y}{x^3+y^3} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{1}{x^2 - xy + y^2} = \frac{1}{x_0^2 - x_0 y_0 + y_0^2}.$$

Значит, точки прямой $y = -x$ $(x \neq 0)$ — точки устранимого разрыва функции u. Из соотношения

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x+y}{x^3+y^3} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{1}{x^2 - xy + y^2} = +\infty$$

следует, что $(0, 0)$ — точка бесконечного разрыва. ►

18. Показать, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{если} \quad x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

непрерывна по каждой из переменных x и y в отдельности (при фиксированном значении другой переменной), но не является непрерывной по совокупности этих переменных.

◄ Пусть $y \neq 0$ и x_0 — любые фиксированные числа. Тогда

$$\lim_{x \to x_0} f(x, y) = \lim_{x \to x_0} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2x_0 y}{x_0^2 + y^2} = f(x_0, y).$$

Если же $y = 0$, то при любом $x_0 \neq 0$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, 0) = 0 = f(x_0, 0)$. Наконец, если $y = 0$ и $x_0 = 0$, то $\lim\limits_{x \to 0} f(x, 0) = 0 = f(0, 0)$.

Таким образом, при каждом фиксированном y функция f непрерывна по переменной x. Ввиду симметрии функции относительно x и y при любом фиксированном x функция f непрерывна по переменной y.

Однако функция f не является непрерывной по совокупности переменных в точке $(0, 0)$. Действительно, обе последовательности $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ и $\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right)$ сходятся при $n \to \infty$ к точке $(0, 0)$, а соответствующие им последовательности значений функции сходятся при $n \to \infty$ к различным предельным значениям:

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} \to 1, \quad f\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{4}{n^2}}{\frac{4}{n^2} + \frac{1}{n^2}} \to \frac{4}{5}. \; ►$$

19. Показать, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}, & \text{если} \quad x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

в точке $(0, 0)$ непрерывна вдоль каждого луча $x = t\cos\alpha$, $y = t\sin\alpha$, $0 \leqslant t \leqslant +\infty$, проходящего через эту точку, т. е. существует $\lim\limits_{t \to 0} f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = f(0, 0)$, однако эта функция не является непрерывной в точке $(0, 0)$.

◄ Имеем

$$\lim_{t \to 0} f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = \lim_{t \to 0} \frac{t\cos^2\alpha \sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha + \sin^2\alpha}.$$

Поскольку $f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) \equiv 0$ при $\alpha = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}_0$, то при этих значениях α

$$\lim_{t \to 0} f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = 0 = f(0, 0).$$

Если $0 < \alpha < 2\pi$, $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{N}$, то $t^2\cos^4\alpha + \sin^2\alpha > 0$ и $t^2\cos^4\alpha + \sin^2\alpha \to \sin^2\alpha > 0$ при $t \to 0$. Следовательно, $\lim\limits_{t\to 0} f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = 0 = f(0, 0)$. Таким образом, вдоль любого луча, проходящего через точку $(0, 0)$, функция f непрерывна в этой точке.

То, что функция f имеет разрыв в точке $(0,0)$, следует из того, что последовательность $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$ сходится к точке $(0,0)$ при $n \to \infty$, а

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2} \neq f(0, 0). \blacktriangleright$$

20. Исследовать на равномерную непрерывность линейную функцию $f(x, y) = 2x - 3y + 5$ в бесконечной плоскости $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : |x| < +\infty, |y| < +\infty\}$.

◀ Для любых точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) бесконечной плоскости $\mathbb{R}^2$ имеем

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| = |2(x_1 - x_2) - 3(y_1 - y_2)| \leqslant 2|x_1 - x_2| + 3|y_1 - y_2|.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно заданное число. Тогда при условии, что $|x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{6} = \delta$, $|y_1 - y_2| < \frac{\varepsilon}{6} = \delta$, справедливо неравенство $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, из которого, по определению, следует равномерная непрерывность функции f на $\mathbb{R}^2$. ▶

21. Исследовать на равномерную непрерывность в плоскости $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : |x| < +\infty, |y| < +\infty\}$ функцию $u = \sqrt{x^2 + y^2}$.

◀ Для произвольного $\varepsilon > 0$ и любых $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ имеем

$$|u(x_1, y_1) - u(x_2, y_2)| = \left|\sqrt{x_1^2 + y_1^2} - \sqrt{x_2^2 + y_2^2}\right| =$$

$$= \frac{|(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + (y_1 - y_2)(y_1 + y_2)|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \leqslant \frac{|x_1 - x_2||x_1 + x_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} + \frac{|y_1 - y_2||y_1 + y_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \leqslant$$

$$\leqslant |x_1 - x_2| \frac{|x_1| + |x_2|}{\sqrt{x_1^2} + \sqrt{x_2^2}} + |y_1 - y_2| \frac{|y_1| + |y_2|}{\sqrt{y_1^2} + \sqrt{y_2^2}} = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

как только $|x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{2} = \delta$, $|y_1 - y_2| < \frac{\varepsilon}{2} = \delta$.

Следовательно, по определению, функция u равномерно-непрерывна в плоскости $\mathbb{R}^2$. ▶

22. Будет ли функция $f(x, y) = \sin\dfrac{\pi}{1 - x^2 - y^2}$ в области $x^2 + y^2 < 1$ равномерно-непрерывной?

◀ Функция $x \mapsto (1 - x^2 - y^2)$ непрерывна при всех значениях x и y как многочлен от x и y. По теореме о суперпозиции непрерывных функций, данная функция также непрерывна при всех значениях x и y, удовлетворяющих неравенству $x^2 + y^2 < 1$.

Покажем, что в этой области данная функция неравномерно-непрерывна. С этой целью возьмем две последовательности

$$M_n = (x_n, y_n) = \left(\sqrt{1 - \frac{1}{2n}}\cos\alpha, \sqrt{1 - \frac{1}{2n}}\sin\alpha\right),$$

$$M_n' = (x_n', y_n') = \left(\sqrt{1 - \frac{2}{1 + 4n}}\cos\alpha, \sqrt{1 - \frac{2}{1 + 4n}}\sin\alpha\right),$$

$n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \alpha < 2\pi$, принадлежащие области определения функции. Поскольку $\rho(M_n, M_n') = \sqrt{(x_n - x_n')^2 + (y_n - y_n')^2} = \left|\sqrt{1 - \frac{1}{2n}} - \sqrt{1 - \frac{2}{1+4n}}\right| \to 0$ при $n \to \infty$, а $|f(M_n) - f(M_n')| = \left|\sin 2n\pi - \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right| = 1$ при всех n, то для $\varepsilon \in]0, 1[$ не существует числа δ, участвующего в определении равномерной непрерывности. ▶

23. Дана функция $u(x, y) = \arcsin\frac{x}{y}$. Является ли эта функция непрерывной в своей области определения E? Будет ли функция u равномерно-непрерывной в области E?

◀ Область определения E определяется неравенствами $|x| \leqslant |y|$, $y \neq 0$. В этой области функция u непрерывна как суперпозиция непрерывных функций.

Однако данная функция не является равномерно-непрерывной, так как для последовательностей $(M_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $(M'_n) = \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right)$ справедливо соотношение

$$\rho(M_n, M'_n) = \sqrt{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{2}{n} \to 0$$

при $n \to \infty$, а расстояние между значениями функции в соответствующих точках $|u(M_n) - u(M'_n)| = |\arcsin 1 - \arcsin(-1)| = 2\arcsin 1 = \pi$ не может быть меньше числа π. ▶

24. Показать, что множество точек разрыва функции $f(x, y) = x\sin\frac{1}{y}$, если $y \neq 0$, и $f(x, 0) = 0$, не является замкнутым.

◀ Пусть $y_n = \frac{2}{\pi(1+4n)}$, $x_n = \frac{nx_0}{n+1}$, где x_0 — произвольное фиксированное число. Тогда последовательность (x_n, y_n) при $n \to \infty$ сходится к точке $(x_0, 0)$. Из соотношения

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx_0}{1+n} \sin\frac{\pi(1+4n)}{2} = x_0 \neq f(x_0, 0) = 0, \ x_0 \neq 0,$$

следует, что $(x_0, 0)$, $x_0 \neq 0$ — точка разрыва функции f. А из неравенства $|f(x, y)| = |x\sin\frac{1}{y}| < |x|$ следует непрерывность функции f в точке $(0, 0)$.

Таким образом, множество точек разрыва функции f заполняет сплошь ось Ox, за исключением точки $(0, 0)$, которая является предельной точкой этого множества. Следовательно, множество точек разрыва функции f не содержит всех своих предельных точек, а поэтому не является замкнутым. ▶

25. Показать, что если функция f в некоторой области G непрерывна по переменной x и равномерно-непрерывна относительно x по переменной y, то эта функция непрерывна в рассматриваемой области.

◀ Для произвольных точек (x_0, y_0) и $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ из области определения функции f имеем

$$|\Delta f(x_0, y_0)| = |f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)| + |f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)|. \quad (1)$$

Согласно равномерной непрерывности функции f относительно x по переменной y, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon, y_0)$ такое, что, если $|\Delta y| < \delta_1$, неравенство

$$|f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2)$$

справедливо для любых $x_0 + \Delta x$ из области определения функции f.

Далее, в силу непрерывности функции f по переменной x, для указанного ранее $\varepsilon > 0$ $\exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon, x_0, y_0)$ такое, что

$$|f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (3)$$

если $|\Delta x| < \delta_2$. Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда при $|\Delta x| < \delta$, $|\Delta y| < \delta$ неравенства (2) и (3) будут выполнены. Поэтому при $|\Delta x| < \delta$, $|\Delta y| < \delta$ из неравенств (2), (3) и (1) следует, что $|\Delta f(x_0, y_0)| < \varepsilon$, а это и означает непрерывность функции f в точке (x_0, y_0). ▶

26. Доказать, что если в некоторой области G функция f непрерывна по переменной x и удовлетворяет условию Липшица по переменной y, т. е.

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|,$$

где $(x, y_1) \in G$, $(x, y_2) \in G$ и L — постоянная, то эта функция непрерывна в данной области.

◀ Поскольку функция f удовлетворяет условию Липшица по переменной y, то для произвольного $\varepsilon > 0$ и любых точек (x_0, y_0) и (x, y) из G имеем

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leqslant |f(x, y) - f(x, y_0)| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| \leqslant \\ \leqslant L|y - y_0| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)|. \qquad (1)$$

В силу непрерывности функции $x \mapsto f(x, y_0)$ в точке x_0, можно указать такое $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon, x_0, y_0)$, что при $|x - x_0| < \delta_1$ имеет место неравенство

$$|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) при условии, что $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$, где $\delta = \min\left(\delta_1, \frac{\varepsilon}{2L}\right)$, получаем неравенство

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < L\frac{\varepsilon}{2L} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

которое доказывает непрерывность функции f в любой точке $(x_0, y_0) \in G$. ▶

27. Пусть функция f непрерывна в области $G = \{(x, y) : a \leqslant x \leqslant A, b \leqslant y \leqslant B\}$, а последовательность функций $n \mapsto \varphi_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, сходится равномерно на $[a, A]$ и удовлетворяет условию $b \leqslant \varphi_n(x) \leqslant B$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что последовательность функций $F_n(x) = f(x, \varphi_n(x))$, $n \in \mathbb{N}$, также сходится равномерно на $[a, A]$.

◀ Поскольку функция f непрерывна в замкнутой области G, то она равномерно-непрерывна в этой области. Следовательно, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что неравенство

$$|f(x, y') - f(x, y'')| < \varepsilon \qquad (1)$$

справедливо для всех $x \in [a, A]$ и $y', y'' \in [b, B]$, которые удовлетворяют неравенству $|y' - y''| < \delta$. В силу равномерной сходимости на сегменте $[a, A]$ последовательности $(\varphi_n(x))$, $\forall \delta > 0$ (в том числе и для δ, указанного выше) $\exists N = N(\delta)$ такое, что $|\varphi_{n+p}(x) - \varphi_n(x)| < \delta$ $\forall n > N$, $\forall p > 0$ и $\forall x \in [a, A]$. Полагая в неравенстве (1) $y' = \varphi_{n+p}(x)$, $y'' = \varphi_n(x)$ $(\varphi_{n+p}(x), \varphi_n(x) \in [b, B])$, получаем неравенство

$$|f(x, \varphi_{n+p}(x)) - f(x, \varphi_n(x))| < \varepsilon,$$

справедливое $\forall n > N$, $\forall p > 0$ и $\forall x \in [a, A]$.

Таким образом, последовательность $F_n(x) = f(x, \varphi_n(x))$, $n \in \mathbb{N}$, сходится равномерно на сегменте $[a, A]$. ▶

28. Пусть: 1) функция f непрерывна в области $R = \{(x, y) : a < x < A, b < y < B\}$; 2) функция φ непрерывна в интервале $]a, A[$ и имеет значения, принадлежащие интервалу $]b, B[$. Доказать, что функция $F(x) = f(x, \varphi(x))$ непрерывна в интервале $]a, A[$.

◀ Пусть (x_0, y_0) — произвольная точка из области R. Из непрерывности функции f в области R вытекает, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon, x_0, y_0)$ такое, что

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon, \qquad (1)$$

если $|x - x_0| < \delta_1$, $|y - y_0| < \delta_1$.

Обозначим $y = \varphi(x)$, $y_0 = \varphi(x_0)$. Из непрерывности функции $y = \varphi(x)$ на интервале $]a, A[$ вытекает, что для указанного выше δ_1 $\exists \delta_2 = \delta_2(\delta_1)$ такое, что

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| = |y - y_0| < \delta_1, \qquad (2)$$

если $|x - x_0| < \delta_2$. Следовательно, из неравенств (1) и (2) и из того, что $y = \varphi(x)$, $y \in]b, B[$, если $x \in]a, A[$, вытекает неравенство

$$|f(x, \varphi(x)) - f(x_0, \varphi(x_0))| < \varepsilon,$$

справедливое при $|x - x_0| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ и доказывающее непрерывность функции $F(x) = f(x, \varphi(x))$ на интервале $]a, A[$. ▶

29. Пусть: 1) функция f непрерывна в области $R = \{(x, y) : a < x < A, b < y < B\}$; 2) функции $x = \varphi(u, v)$ и $y = \psi(u, v)$ непрерывны в области $R' = \{(u, v) : a' < u < A', b' < v < B'\}$ и имеют значения, принадлежащие соответственно интервалам $]a, A[$ и $]b, B[$. Доказать, что функция $F(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ непрерывна в области R'.

◀ Пусть (u_0, v_0) — произвольная фиксированная точка из R', а $x_0 = \varphi(u_0, v_0)$, $y_0 = \psi(u_0, v_0)$. Из условия 1) вытекает, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \sigma = \sigma(\varepsilon, x_0, y_0)$ такое, что

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon, \tag{1}$$

если $|x - x_0| < \sigma$, $|y - y_0| < \sigma$. Из условия 2) следует, что для указанного выше σ $\exists \delta = \delta_1(\sigma) = \delta(\varepsilon, u_0, v_0)$ такое, что при $|u - u_0| < \delta$ и $|v - v_0| < \delta$ справедливы неравенства

$$|\varphi(u, v) - \varphi(u_0, v_0)| < \sigma, \quad |\psi(u, v) - \psi(u_0, v_0)| < \sigma. \tag{2}$$

Из неравенств (1) и (2) непосредственно следует, что

$$|f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) - f(\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0))| = |F(u, v) - F(u_0, v_0)| < \varepsilon$$

при $|u - u_0| < \delta$, $|v - v_0| < \delta$, т. е. что функция F непрерывна в точке (u_0, v_0). Поскольку (u_0, v_0) — произвольная точка из R', заключаем, что функция F непрерывна в области R'. ▶

Упражнения для самостоятельной работы

1. Доказать, что функция $(x, y) \mapsto Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, имеет в точке $(0, 0)$, по меньшей мере, тот же порядок малости, что и $\rho = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$.

2. Показать, что для последовательности $a_{nm} = \frac{1}{n-m+0{,}5}$, $n, m \in \mathbb{N}$, имеем

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} a_{nm}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} a_{nm}\right),$$

тем не менее $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} a_{nm}$ не существует.

3. Доказать, что для последовательности $a_{nm} = \frac{\sin n}{m}$, $n, m \in \mathbb{N}$, двойной предел $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} a_{nm}$ существует, в то время как

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} a_{nm}\right) \ne \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} a_{nm}\right).$$

Выяснить, существуют ли следующие двойные пределы:

4. $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} \frac{\ln^2 n - \ln^2 m}{\ln(n^2) + \ln^2 m}$. **5.** $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} \frac{\operatorname{tg} n + \operatorname{tg} m}{1 - \operatorname{tg} n \operatorname{tg} m}$. **6.** $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} \frac{1}{m^2}\sum\limits_{k=1}^{n} \cos\frac{k}{m}$.

7. Показать, что функции $f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{(x^2 + y^4)^3}$, $g(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2 - x}$ стремятся к нулю, если точка (x, y) стремится к точке $(0, 0)$ вдоль любой прямой, проходящей через точку $(0, 0)$, но эти функции не имеют предела в точке $(0, 0)$.

Найти пределы:

8. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1 - \cos(xy)}{x^2y^2}$. **9.** $\lim\limits_{x\to 0}(1 + x_1^2 + \ldots + x_m^2)^{\frac{1}{x_1^2 + \cdots + x_m^2}}$, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2}}{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2)^\alpha}$, где $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $\alpha > 0$. **11.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x^\alpha y^\alpha e^{\frac{1}{xy^\alpha}}$.

С помощью "ε—δ" рассуждений доказать непрерывность следующих функций:

12. $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. **13.** $f(x, y) = \sqrt{1 + e^{xy}}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

14. Доказать, что если функция $(x, y) \mapsto f(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, непрерывна по каждой переменной x и y в отдельности и монотонна по одной из них, то она непрерывна по совокупности переменных.

15. Исследовать на равномерную непрерывность в $\mathbb{R}^2$ функцию

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad x^2 + y^2 \ne 0, \quad f(0, 0) = 0.$$

16. Доказать, что функция $f(x, y, z) = \sin(x^2 + y^2 + z^2)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, не является равномерно-непрерывной в пространстве $\mathbb{R}^3$.

§ 2. Частные производные и дифференциалы функции векторного аргумента

2.1. Частные производные.

Пусть функция $x \mapsto f(x)$ определена в области D пространства $\mathbb{R}^m$; $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ — стандартный базис этого пространства, а $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ — точка области D.

Определение 1. *Разность $f(x) - f(x_0)$ называется полным приращением функции f в точке x_0, а $f(x_0 + (x_j - x_j^0)e_j) - f(x_0)$, $j = \overline{1, m}$ — частным приращением функции f по переменной x_j в точке x_0.*

Определение 2. *Если существует конечный предел*

$$\lim_{x_j \to x_j^0} \frac{f(x_0 + (x_j - x_j^0)e_j) - f(x_0)}{x_j - x_j^0}, \quad j = \overline{1, m}, \tag{1}$$

то он называется частной производной функции f в точке x_0 по переменной x_j и обозначается

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0), \text{ или } f'_{x_j}(x_0), \text{ или } D_j f(x_0).$$

Функция f имеет в точке x_0 частную производиую f'_{x_j} тогда и только тогда, когда в этой точке справедливо равенство

$$f(x_0 + (x_j - x_j^0)e_j) - f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) + \alpha(x_j, x_0)\right)(x_j - x_j^0),$$

где $\alpha(x_j, x_0) \to 0$ при $x_j \to x_j^0$.

2.2. Дифференцируемые функции.

Определение. *Функция $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$, называется дифференцируемой в точке $x_0 \in D$, если полное приращение функции f в этой точке можно представить в виде*

$$f(x) - f(x_0) = L(x - x_0) + \alpha(x, x_0)\|x - x_0\|, \tag{1}$$

где $L(x - x_0) = L_1(x_1 - x_1^0) + L_2(x_2 - x_2^0) + \ldots + L_m(x_m - x_m^0)$ — линейное отображение пространства $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}$, а $\alpha(x, x_0) \to 0$ при $x \to x_0$.

При этом величина $Lh = L_1h_1 + L_2h_2 + \ldots + L_mh_m$, где $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}$ — произвольный вектор пространства $\mathbb{R}^m$, называется *дифференциалом функции* f в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$, а матрица линейного отображения $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ называется *производной* функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Полагая в (1) $x = x_0 + x_j^0 e_j$, получаем равенство

$$f(x_0 + (x_j - x_j^0)e_j) - f(x_0) = (L_j + \alpha(x_j, x_0))(x_j - x_j^0),$$

из которого, в силу пункта 2.1, следует, что $L_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$.

Следовательно, для дифференциала $df(x_0)$ получаем формулу

$$df(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)h_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0)h_m \tag{2}$$

или, если $h_j = x_j - x_j^0 = dx_j$,

$$df(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)\,dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)\,dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0)\,dx_m,$$

а для производной $f'(x_0)$ — равенство

$$f'(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) \ \ldots \ \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0)\right). \tag{3}$$

Теорема (достаточное условие дифференцируемости). *Если функция f имеет в окрестности точки x_0 частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$, $j=\overline{1,m}$, непрерывные в точке x_0, то она дифференцируема в этой точке.*

Если функция f дифференцируемая в каждой точке области D, то она называется *дифференцируемой в области D*.

2.3. Частные производные сложной функции.

Если функция $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$, дифференцируема в точке $x \in D$, а функции $\varphi_i : G \to D$, $G \subset \mathbb{R}^n$, $i = \overline{1, m}$, имеют частные производные в точке $t \in G$ и $x = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t))$, то

$$\frac{\partial (f\circ\varphi)}{\partial t_k}(t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_k}(t), \quad k=\overline{1,n}, \quad t=(t_1, t_2, \ldots, t_n). \tag{1}$$

2.4. Дифференцируемые отображения.

Определение. *Отображение $f: D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^m$, называется дифференцируемым в точке $x_0 \in D$, если приращение $f(x) - f(x_0)$ отображения f в точке x_0 представимо в виде*

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \alpha(x, x_0)\|x - x_0\|,$$

где

$$A(x-x_0) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_1^0 \\ x_2 - x_2^0 \\ \ldots \\ x_m - x_m^0 \end{pmatrix}$$

— линейное отображение пространства $\mathbb{R}^m$ в пространство $\mathbb{R}^n$, а $\alpha(x, x_0) \to 0$ при $x \to x_0$.

Если отображение f дифференцируемо в точке x_0, то $A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$ и

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

называется *производной отображения f* в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Если отображение $f: D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^m$, дифференцируемо в точке $x \in D$, а отображение $g: G \to D$, $G \subset \mathbb{R}^k$, дифференцируемо в точке $t \in G$ и $x = g(t)$, то

$$(f \circ g)'(t) = f'(x)\, g'(t)$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial (f_1\circ g)}{\partial t_1} & \frac{\partial (f_1\circ g)}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial (f_1\circ g)}{\partial t_k} \\ \frac{\partial (f_2\circ g)}{\partial t_1} & \frac{\partial (f_2\circ g)}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial (f_2\circ g)}{\partial t_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial (f_n\circ g)}{\partial t_1} & \frac{\partial (f_n\circ g)}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial (f_n\circ g)}{\partial t_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t_1} & \frac{\partial g_1}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial t_k} \\ \frac{\partial g_2}{\partial t_1} & \frac{\partial g_2}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial g_2}{\partial t_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial g_m}{\partial t_1} & \frac{\partial g_m}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial g_m}{\partial t_k} \end{pmatrix}.$$

2.5. Частные производные и дифференциалы высших порядков.

Пусть функция $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$, имеет частные производные в некоторой окрестности $S(x_0, \delta)$.

Определение 1. *Если функция* $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$, $x \in S(x_0, \delta)$, *имеет в точке* x_0 *частную производную по переменной* x_i, *то ее называют частной производной второго порядка или второй частной производной и обозначают*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \text{ или } f''_{x_j x_i}(x_0).$$

При этом, если $i \neq j$, то частная производная называется *смешанной*. Аналогично определяются производные порядка выше второго.

Определение 2. *Функция* f *называется* n *раз дифференцируемой в точке* $x_0 \in D$, *если она имеет в некоторой окрестности этой точки все частные производные* $(n-1)$*-го порядка, каждая из которых является дифференцируемой функцией в точке* x_0.

Теорема. *Если функция* f *дважды дифференцируема в точке* x_0, *то в этой точке выполняются равенства*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0), \quad i, j = \overline{1, m}. \tag{1}$$

Из этой теоремы получаем следующее утверждение: *смешанная производная* n*-го порядка*

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1}^{n_1} \partial x_{i_2}^{n_2} \ldots \partial x_{i_s}^{n_s}}, \quad n_1 + n_2 + \ldots + n_s = n,$$

не зависит от порядка, в котором производилось дифференцирование.

Определение 3. *Дифференциалом второго порядка (или вторым дифференциалом)* $d^2 f$ *дважды дифференцируемой функции* f *называется дифференциал от функции* $x \mapsto df(x)$, *т. е.* $d^2 f = d(df)$.

Аналогично определяются дифференциалы более высокого порядка. Дифференциал n-го порядка n раз дифференцируемой функции f вычисляется по формуле

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} h_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} h_m\right)^n f. \tag{2}$$

2.6. Производная по направлению. Градиент.

Пусть функция $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ дифференцируема в области $D \subset \mathbb{R}^3$ и $(x_0, y_0, z_0) \in D$. Если направление l задается направляющими косинусами $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, то производная по направлению l вычисляется по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma.$$

Определение. *Градиентом функции* f *в точке* (x_0, y_0, z_0) *называется вектор, обозначаемый символом* $\operatorname{grad} f$ *и имеющий координаты, соответственно равные производным* $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$, *вычисленным в точке* (x_0, y_0, z_0).

Таким образом,

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

причем в этом случае можем записать, что $\frac{\partial f}{\partial l} = (\boldsymbol{a}, \operatorname{grad} f)$, где $\boldsymbol{a} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Градиент функции f в точке (x_0, y_0, z_0) характеризует направление и величину максимального роста этой функции в точке (x_0, y_0, z_0). Следовательно,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)_{\max} = \|\operatorname{grad} f\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Вектор $\operatorname{grad} f$ в данной точке (x_0, y_0, z_0) ортогонален к той поверхности уровня функции f, которая проходит через точку (x_0, y_0, z_0).

30. Найти $f'_x(x, 1)$, если $f(x, y) = x + (y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$.

◀ Согласно определению частной производной, имеем

$$f'_x(x, 1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, 1) - f(x, 1)}{h}.$$

Так как $f(x+h, 1) = x + h$, $f(x, 1) = x$, то

$$f'_x(x, 1) = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1. \blacktriangleright$$

31. Найти $f'_x(0, 0)$ и $f'_y(0, 0)$, если $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$. Является ли эта функция дифференцируемой в точке $(0, 0)$?

◀ Исходя из определения частных производных, имеем

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x\cdot 0} - 0}{x} = 0,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt[3]{0\cdot y} - 0}{y} = 0.$$

Для исследования дифференцируемости данной функции в точке $(0, 0)$ запишем ее приращение в этой точке: $f(x, y) - f(0, 0) = \sqrt[3]{xy} = \alpha(x, y)\sqrt{x^2+y^2}$, где $\alpha(x, y) = \sqrt[3]{xy}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Поскольку $L_1 = \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0$, $L_2 = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$, то для дифференцируемости необходимо, чтобы функция $(x, y) \mapsto \alpha(x, y)$ была бесконечно малой при $\sqrt{x^2+y^2} \to 0$, т. е. при $x \to 0$ и $y \to 0$. Пусть $x = \frac{1}{n}$, $y = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$; очевидно, $x \to 0$ и $y \to 0$ при $n \to \infty$. Так как последовательность точек $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ при $n \to \infty$ стремится к точке $(0, 0)$, а соответствующая им последовательность значений функции $\left(\alpha\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{2}}\right)$ стремится к $+\infty$ при $n \to \infty$, то функция α не является бесконечно малой при $x \to 0$, $y \to 0$. Поэтому функция f недифференцируема в точке $(0, 0)$. ▶

32. Является ли дифференцируемой функция $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$ в точке $(0, 0)$?

◀ Находим производные

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1, \quad f'_y(0, 0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{y} = 1.$$

Представим приращение функции f в точке $(0, 0)$ в виде

$$f(x, y) - f(0, 0) = \sqrt[3]{x^3+y^3} = x + y + \left(\sqrt[3]{x^3+y^3} - x - y\right) = f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y + \alpha(x, y)\sqrt{x^2+y^2},$$

где $\alpha(x, y) = \frac{\sqrt[3]{x^3+y^3} - x - y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Поскольку последовательность

$$\left(\alpha\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt[3]{\frac{2}{n^3}} - \frac{2}{n}}{\frac{\sqrt{2}}{n}}\right) = \left(\frac{\sqrt[3]{2} - 2}{\sqrt{2}}\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

не является бесконечно малой при $n \to \infty$ (т. е. при $x \to 0$, $y \to 0$), то $\alpha(x, y)\sqrt{x^2+y^2} \ne o(\sqrt{x^2+y^2})$ при $x \to 0$, $y \to 0$ и функция f недифференцируема в точке $(0, 0)$. ▶

33. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию $f(x, y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$ при $x^2 + y^2 > 0$ и $f(0, 0) = 0$.

◀ Как и в предыдущем примере, находим частные производные

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y} e^{-\frac{1}{y^2}} = 0.$$

Из того, что приращение функции f в точке $(0, 0)$ представимо в виде $f(x, y) - f(0, 0) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} = \alpha(x, y)\sqrt{x^2+y^2}$, где $\alpha(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} = \frac{1}{\rho}e^{-\frac{1}{\rho^2}}$, а $\frac{1}{\rho}e^{-\frac{1}{\rho^2}} \to 0$ при $\rho = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$, непосредственно следует, что функция f дифференцируема в точке $(0,0)$. ►

34. Показать, что функция $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ непрерывна в точке $(0, 0)$, имеет в этой точке обе частные производные $f'_x(0, 0)$ и $f'_y(0, 0)$, однако не является дифференцируемой в точке $(0, 0)$. Выяснить поведение производных f'_x и f'_y в окрестности точки $(0, 0)$.

◄ Пользуясь определением частных производных, находим

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{|x\cdot 0|}}{x} = 0,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{|0\cdot y|}}{y} = 0.$$

Поскольку

$$\Delta f(0, 0) = \sqrt{|xy|} = \sqrt{x^2+y^2}\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \alpha(x, y)\sqrt{x^2+y^2},$$

где

$$\alpha(x, y) = \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{ и } \alpha\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}} \to \frac{1}{\sqrt{2}} \ne 0,$$

то функция $(x, y) \mapsto \alpha(x, y)$ не является бесконечно малой при $\sqrt{x^2+y^2} \to 0$. Отсюда следует, что функция f недифференцируема в точке $(0, 0)$. Из соотношения $\Delta f(0, 0) = \sqrt{|xy|} \to 0$ при $x \to 0$, $y \to 0$ следует непрерывность функции f в точке $(0, 0)$.

Из равенства $f'_x(x, y) = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\frac{y}{x}\right|}\operatorname{sgn} x$ при $x \ne 0$ и того, что $\lim\limits_{n\to\infty} f'_x\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{2} = +\infty$, следует, что производная f'_x неограничена в окрестности точки $(0, 0)$. Это заключение справедливо и для производной f'_y. ►

35. Доказать, что функция $f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^6+y^6}$, если $x^2+y^2 \ne 0$ и $f(0, 0) = 0$, терпит разрыв в точке $(0, 0)$, однако имеет частные производные в этой точке.

◄ Из соотношений $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^3}\right) \to (0, 0)$ (при $n \to \infty$)

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^3}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^6}}{\frac{1}{n^6}+\frac{1}{n^6}} = \frac{1}{2} \ne 0 = f(0, 0)$$

следует, что функция f терпит разрыв в точке $(0, 0)$.

Пользуясь определением частных производных, находим

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x} = 0, \quad f'_y(0, 0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y} = 0. \text{ ►}$$

36. Показать, что функция $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, если $x^2+y^2 \ne 0$ и $f(0, 0) = 0$, в окрестности точки $(0, 0)$ непрерывна и имеет ограниченные частные производные f'_x и f'_y, однако недифференцируема в точке $(0, 0)$.

◄ При $x^2+y^2 \ne 0$ функция f непрерывна как элементарная. Из очевидного неравенства $|f(x, y)| = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqslant \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{2}}$ и из того, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{2}} = 0$, получаем $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$.

Таким образом, функция f непрерывна в точке $(0, 0)$.

Имеем

$$f'_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2 y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, \quad x^2+y^2 \neq 0, \quad f'_x(0, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0,$$

$$f'_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y^2 x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, \quad x^2+y^2 \neq 0, \quad f'_y(0, 0) = 0.$$

Отсюда, пользуясь неравенством $\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \leqslant \frac{1}{2}$, убеждаемся, что

$$|f'_x(x, y)| \leqslant \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{|xy|}{x^2+y^2} \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \frac{3}{2}, \quad |f'_y(x, y)| \leqslant \frac{3}{2},$$

т. е. что указанные производные ограничены.

Запишем приращение функции f в точке $(0, 0)$ в виде $\Delta f(0, 0) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \alpha(x, y)\rho$, где $\alpha(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$. Легко убедиться, что функция α не является бесконечно малой при $x \to 0$, $y \to 0$, а поэтому функция f недифференцируема в точке $(0, 0)$. ►

37. Показать, что функция $f(x, y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$, если $x^2+y^2 \neq 0$ и $f(0, 0) = 0$, имеет в окрестности точки $(0, 0)$ производные f'_x и f'_y, которые разрывны в точке $(0, 0)$ и неограничены в любой окрестности ее; тем не менее эта функция дифференцируема в точке $(0, 0)$.

◄ Если $x^2+y^2 \neq 0$, то частные производные f'_x и f'_y находим, пользуясь формулами и правилами дифференцирования:

$$f'_x(x, y) = 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}, \quad f'_y(x, y) = 2y\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}.$$

Если же $x = 0$ и $y = 0$, то производные $f'_x(0, 0)$ и $f'_y(0, 0)$ находим, исходя из их следующего определения:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x^2}}{x} = 0,$$

аналогично находим, что $f'_y(0, 0) = 0$.

Покажем, что частные производные f'_x и f'_y разрывны в точке $(0, 0)$ и неограничены в любой ее окрестности. С этой целью выберем последовательность (x_n, y_n), сходящуюся к точке $(0, 0)$, и такую, что $\cos\frac{1}{x_n^2+y_n^2} = 1$, т. е. $\frac{1}{x_n^2+y_n^2} = 2n\pi$. Пусть, например,

$$x_n = \frac{1}{2\sqrt{n\pi}}, \quad y_n = \frac{1}{2\sqrt{n\pi}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку $x_n \to 0$ и $y_n \to 0$ при $n \to \infty$, то последовательность точек (x_n, y_n) попадает в любую окрестность точки $(0, 0)$. При этом соответствующая последовательность значений функции $f'_x(x_n, y_n) = -2\sqrt{n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$, стремится к $-\infty$. Следовательно, частная производная f'_x разрывна в точке $(0, 0)$ и неограничена в любой ее окрестности. Аналогичные выводы справедливы и относительно f'_y.

Поскольку $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$, а приращение $\Delta f(0, 0)$ представимо в виде $\Delta f(0, 0) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} = \rho\alpha(\rho)$, где $\alpha(\rho) = \rho\sin\frac{1}{\rho^2} \to 0$ при $\rho = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$, то функция f дифференцируема в точке $(0, 0)$. ►

38. Проверить равенство $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}$, если: а) $u = x^{y^2}$; б) $u = \arccos\sqrt{\frac{x}{y}}$.

◄ а) Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 x^{y^2-1}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x} = 2yx^{y^2-1}(1 + y^2 \ln x), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2yx^{y^2}\ln x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = 2yx^{y^2-1}(1 + y^2\ln x).$$

Отсюда непосредственно следует равенство $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$, справедливое для всех точек (x, y) в области определения смешанных производных: $0 < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$.

б) Аналогично предыдущему находим смешанные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2}(xy-x^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = \frac{x}{4}(xy-x^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{2}(xy^3-x^2y^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{x}{4}(xy-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

и убеждаемся, что они равны в области их определения: $0 < \frac{x}{y} < 1$.

Эти примеры иллюстрируют утверждение о равенстве непрерывных смешанных производных, отличающихся порядком их вычисления. ►

39. Пусть $f(x, y) = xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, если $x^2 + y^2 \neq 0$, и $f(0, 0) = 0$. Показать, что $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$.

◄ При $x^2 + y^2 \neq 0$ имеем

$$f'_x(x, y) = y\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f'_y(x, y) = x\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^3y^2}{(x^2 + y^2)^3}.$$

Если $x = y = 0$, то производные $f'_x(0, 0)$ и $f'_y(0, 0)$ находим непосредственно из их определения:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0, \quad f'_y(0, 0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0.$$

Пользуясь этими значениями, находим смешанные производные:

$$f''_{xy}(0, 0) = \lim_{y\to 0} \frac{f'_x(0, y) - f'_x(0, 0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{-y^3}{y^3} = -1,$$

$$f''_{yx}(0, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'_y(x, 0) - f'_y(0, 0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^3} = 1.$$

Отсюда убеждаемся, что $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$.

Заметим, что в точке $(0, 0)$ не выполняются достаточные условия равенства смешанных производных. В самом деле, при $x^2 + y^2 \neq 0$ находим

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\left(1 + \frac{8x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right).$$

Поскольку последовательность $\left(M_n = \left(\frac{a}{n}, \frac{1}{n}\right)\right)$ стремится к точке $(0, 0)$ при $n \to \infty$, и $\lim\limits_{n\to\infty} f''_{xy}(M_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f''_{yx}(M_n) = \frac{a^2-1}{a^2+1}\left(1 + \frac{8a^2}{(a^2+1)^2}\right)$, то смешанные производные терпят разрыв в точке $(0, 0)$. ►

40. Существует ли $f''_{xy}(0, 0)$, если $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ при $x^2 + y^2 \neq 0$ и $f(0, 0) = 0$?

◄ При $x^2 + y^2 \neq 0$ имеем $f'_x(x, y) = \frac{2y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$. Пользуясь определением производной, находим

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0.$$

Поскольку предел

$$\lim_{y\to 0} \frac{f'_x(0, y) - f'_x(0, 0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{2y^3}{y^4}}{y}$$

не существует, то производная f''_{xy} в точке $(0, 0)$ также не существует. ►

41. Доказать, что если дифференцируемая функция $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$, $(x, y, z) \in G$, удовлетворяет уравнению

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = pf, \tag{1}$$

то она является однородной функцией степени p.

◀ Рассмотрим функцию

$$F(t) = \frac{f(tx_0, ty_0, tz_0)}{t^p}. \qquad (2)$$

Она определена, непрерывна и дифференцируема для всех $t > 0$, для которых точка $(tx_0, ty_0, tz_0) \in G$. Вычисляя производную функции F, получаем выражение, числитель которого равен

$$t\left(x_0 f'_x(tx_0, ty_0, tz_0) + y_0 f'_y(tx_0, ty_0, tz_0) + z_0 f'_z(tx_0, ty_0, tz_0)\right) - pf(tx_0, ty_0, tz_0). \qquad (3)$$

Заменяя в равенстве (1) x, y, z на tx_0, ty_0, tz_0 соответственно, приходим к выводу, что выражение (3) равно нулю. Следовательно, $F'(t) = 0$ и $F(t) = C = \text{const}$. Для определения константы положим в (2) $t = 1$; таким образом, $C = f(x_0, y_0, z_0)$. Отсюда, пользуясь равенством (2), получаем

$$f(tx_0, ty_0, tz_0) = t^p f(x_0, y_0, z_0), \quad (x_0, y_0, z_0) \in G. \blacktriangleright$$

42. Доказать, что если f — дифференцируемая однородная функция степени p, то ее частные производные f'_x, f'_y, f'_z — однородные функции $(p-1)$-й степени.

◀ Поскольку f — однородная функция степени p, то справедливо равенство $f(tx, ty, tz) = t^p f(x, y, z)$, причем выражение в левой части дифференцируемо. Дифференцируя последнее равенство по x, получаем $f'_x(tx, ty, tz)t = t^p f'_x(x, y, z)$ или $f'_x(tx, ty, tz) = t^{p-1} f'_x(x, y, z)$. Из последнего равенства следует, что f'_x — однородная функция степени $p-1$. Для производных f'_y и f'_z доказательство аналогичное. ▶

43. Пусть $(x, y, z) \mapsto u(x, y, z)$ — дважды дифференцируемая однородная функция n-й степени. Доказать, что

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = n(n-1)u. \qquad (1)$$

◀ Поскольку u — однородная функция, то она удовлетворяет уравнению

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = nu. \qquad (2)$$

Заменяя в этом равенстве x, y, z на tx_0, ty_0, tz_0 и дифференцируя его по t, получаем

$$x_0u'_x + y_0u'_y + z_0u'_z + tx_0^2u''_{x^2} + ty_0^2u''_{y^2} + tz_0^2u''_{z^2} + t(2x_0y_0u''_{xy} + 2x_0z_0u''_{xz} + 2y_0z_0u''_{yz}) =$$
$$= n(x_0u'_x + y_0u'_y + z_0u'_z),$$

где производные вычислены в точке (tx_0, ty_0, tz_0). Полагая в последнем равенстве $t = 1$, имеем

$$x_0^2u''_{x^2} + y_0^2u''_{y^2} + z_0^2u''_{z^2} + 2(x_0y_0u''_{xy} + x_0z_0u''_{xz} + y_0z_0u''_{yz}) = (n-1)(x_0u'_x + y_0u'_y + z_0u'_z).$$

Отсюда и из равенства (2) непосредственно следует, что

$$\left(x_0\frac{\partial}{\partial x} + y_0\frac{\partial}{\partial y} + z_0\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = n(n-1)u.$$

Так как (x_0, y_0, z_0) — произвольная точка, то равенство (1) доказано. ▶

44. Доказать, что если $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, то $d^2u \geqslant 0$.

◀ Обозначая $\varphi = x^2 + y^2 + z^2$ и последовательно дифференцируя выражение $u = \sqrt{\varphi}$, находим

$$du = \frac{1}{\sqrt{\varphi}}(x\,dx + y\,dy + z\,dz),$$

$$d^2u = \frac{1}{\sqrt{\varphi}}(dx^2 + dy^2 + dz^2) - \frac{1}{(\sqrt{\varphi})^3}(x\,dx + y\,dy + z\,dz)^2 =$$

$$= \frac{(x^2+y^2+z^2)(dx^2+dy^2+dz^2)-(x\,dx+y\,dy+z\,dz)^2}{(\sqrt{\varphi})^3} =$$

$$= \frac{(x\,dy-y\,dx)^2+(x\,dz-z\,dx)^2+(y\,dz-z\,dy)^2}{(\sqrt{\varphi})^3} \geqslant 0. \blacktriangleright$$

45. Предполагая, что x, y малы по абсолютной величине, вывести приближенные формулы для следующих выражений:

а) $(1+x)^m(1+y)^m$; б) $\ln(1+x)\ln(1+y)$; в) $\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1+xy}$.

◀ Пусть функция $(x, y, \ldots, z) \mapsto f(x, y, \ldots, z)$ дифференцируема в окрестности точки $(0, 0, \ldots, 0)$. Тогда

$$f(x, y, \ldots, z)-f(0, 0, \ldots, 0) = f'_x(0, 0, \ldots, 0)x+f'_y(0, 0, \ldots, 0)y+\ldots+f'_z(0, 0, \ldots, 0)z+o(\rho),$$

где $o(\rho)$ — бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с $\rho = \sqrt{x^2+y^2+\ldots+z^2}$. Отбрасывая величину $o(\rho)$ и перенося $f(0, 0, \ldots, 0)$ в правую часть, получаем приближенное равенство

$$f(x, y, \ldots, z) \approx f(0, 0, \ldots, 0)+f'_x(0, 0, \ldots, 0)x+f'_y(0, 0, \ldots, 0)y+\ldots+f'_z(0, 0, \ldots, 0)z. \quad (1)$$

Поскольку предложенные функции дифференцируемы в окрестности точки $(0, 0)$, то соответствующие приближенные формулы принимают следующий вид:

а) $(1+x)^m(1+y)^m \approx 1+mx+my$;

б) $\ln(1+x)\ln(1+y) \approx xy$;

в) $\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1+xy} \approx x+y$. ▶

46. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно вычислить:

а) $1{,}002 \cdot 2{,}003^2 \cdot 3{,}004^3$; б) $\dfrac{1{,}03^2}{\sqrt[3]{0{,}98\sqrt[4]{1{,}05^3}}}$;

в) $\sqrt{1{,}02^3+1{,}97^3}$; г) $\sin 29^\circ \operatorname{tg} 46^\circ$; д) $0{,}97^{1{,}05}$.

◀ а) Записывая равенство (1) из предыдущего примера для функции $f(x, y, z) = (1+x)(2+y)^2(3+z)^3$, имеем

$$(1+x)(2+y)^2(3+z)^3 \approx 1\cdot 2^2\cdot 3^3+2^2\cdot 3^3 x+2^2\cdot 3^3 y+2^2\cdot 3^3 z.$$

Подставляя в это равенство $x = 0{,}002$, $y = 0{,}003$, $z = 0{,}004$, получаем $1{,}002\cdot 2{,}003^2\cdot 3{,}004^3 \approx 108+0{,}216+0{,}324+0{,}432 = 108{,}972$.

б) Записав для функции $f(x, y, z) = \frac{(1+x)^2}{\sqrt[3]{(1-y)\sqrt[4]{(1+z)^3}}}$ приближенное равенство $f(x, y, z) \approx 1+2x+\frac{y}{3}-\frac{z}{4}$ и полагая $x = 0{,}03$, $y = 0{,}02$, $z = 0{,}05$, получаем

$$\frac{1{,}03^2}{\sqrt[3]{0{,}98\sqrt[4]{1{,}05^3}}} \approx 1+0{,}06+0{,}0066-0{,}0125 \approx 1{,}054.$$

в) Имеем $\sqrt{(1+x)^3+(2-y)^3} \approx 3+\frac{x}{2}-2y$. Пусть $x = 0{,}02$, $y = 0{,}03$, тогда

$$\sqrt{1{,}02^3+1{,}97^3} \approx 3+0{,}01-0{,}06 = 2{,}95.$$

г) В приближенном равенстве (см. предыдущий пример)

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right) \approx \sin\frac{\pi}{6}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{6}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}x+\sin\frac{\pi}{6}\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}x$$

полагаем $x = 0{,}017$, тогда

$$\sin 29^\circ \operatorname{tg} 46^\circ \approx 0{,}5-0{,}866\cdot 0{,}017+0{,}017 \approx 0{,}502.$$

д) Записывая для функции $(1-x)^{1+y}$ приближенное равенство $(1-x)^{1+y} \approx 1-x$ и полагая в нем $x = 0{,}03$, $y = 0{,}05$, получаем $0{,}97^{1,05} \approx 1 - 0{,}03 = 0{,}97$. ►

47. Доказать, что функция f, имеющая ограниченные частные производные f'_x и f'_y в некоторой выпуклой области E, равномерно-непрерывна в этой области.

◄ Пусть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — две произвольные точки из области E. В силу выпуклости области E, точка $(x_2 + t(x_1 - x_2), y_2 + t(y_1 - y_2))$ принадлежит области E при $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Функция $\varphi(t) = f(x_2 + t(x_1 - x_2), y_2 + t(y_1 - y_2))$ имеет при $t \in]0, 1[$ ограниченную производную

$$\varphi'(t) = (x_1 - x_2) f'_x(x_2 + t(x_1 - x_2), \ y_2 + t(y_1 - y_2)) + (y_1 - y_2) f'_y(x_2 + t(x_1 - x_2), \ y_2 + t(y_1 - y_2)) \quad (1)$$

и $\varphi(0) = f(x_2, y_2)$, $\varphi(1) = f(x_1, y_1)$. Используя формулу Лагранжа и равенство (1), находим

$$\varphi(1) - \varphi(0) = f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) = \varphi'(\xi) =$$
$$= (x_1 - x_2) f'_x\big(x_2 + \xi(x_1 - x_2), y_2 + \xi(y_1 - y_2)\big) +$$
$$+ (y_1 - y_2) f'_y\big(x_2 + \xi(x_1 - x_2), y_2 + \xi(y_1 - y_2)\big), \quad 0 < \xi < 1. \quad (2)$$

Согласно условию, существуют такие постоянные L_1 и L_2, что

$$|f'_x| < L_1, \quad |f'_y| < L_2 \quad \forall (x, y) \in E. \quad (3)$$

Из соотношений (2) и (3) вытекает неравенство

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leqslant |x_1 - x_2| L_1 + |y_1 - y_2| L_2. \quad (4)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное. Тогда, выбирая $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{2L_1}, \frac{\varepsilon}{2L_2}\right)$, для любых точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) таких, что $|x_1 - x_2| < \delta$ и $|y_1 - y_2| < \delta$, из (4) получаем неравенство $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$, доказывающее равномерную непрерывность функции f в области E. ►

48. Доказать, что если функция $(x, y) \mapsto f(x, y)$ непрерывна по переменной x при каждом фиксированном значении y и имеет ограниченную производную по переменной y, то эта функция непрерывна по совокупности переменных x и y.

◄ Согласно условию, $\exists M > 0$ такое, что

$$|f'_y(x, y)| \leqslant M \quad (1)$$

для всех точек (x, y) из области G определения функции f.

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное, а (x_0, y_0) — любая точка из G. Тогда

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leqslant |f(x, y) - f(x, y_0)| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| \leqslant$$
$$\leqslant |f'_y(x, y_0 + \theta(y - y_0))|\,|y - y_0| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)|. \quad (2)$$

В силу непрерывности функции f по x, при $y = y_0$ $\exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon, y_0)$ такое, что

$$|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (3)$$

если $|x - x_0| < \delta_1$. Из (2), (1) и (3) получаем

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leqslant M|y - y_0| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

если $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$, где $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2M}, \delta_1\right\}$, что и требовалось доказать. ►

49. Пусть $(x, y, z) \mapsto P_n(x, y, z)$ — однородный многочлен степени n. Доказать, что $d^n P_n(x, y, z) = n!\, P_n(dx, dy, dz)$.

◄ Пусть (x, y, z) — произвольная точка из области определения функции P_n. Так как P_n — однородный многочлен степени n, то для него справедливо равенство

$$P_n(tx, ty, tz) = t^n P_n(x, y, z). \quad (1)$$

Вычислим n-ю производную от обеих частей этого равенства. Очевидно,

$$P_n^{(n)}(tx, ty, tz) = n!\, P_n(x, y, z). \quad (2)$$

Обозначая левую часть равенства (1) через $F(t)$ и последовательно дифференцируя, находим

$$F'(t) = \frac{\partial P_n}{\partial x}x + \frac{\partial P_n}{\partial y}y + \frac{\partial P_n}{\partial z}z = \left(\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial z}z\right)P_n,$$

$$F''(t) = \frac{\partial^2 P_n}{\partial x^2}x^2 + \frac{\partial^2 P_n}{\partial y^2}y^2 + \frac{\partial^2 P_n}{\partial z^2}z^2 + 2\frac{\partial^2 P_n}{\partial x\,\partial y}xy + 2\frac{\partial^2 P_n}{\partial x\,\partial z}xz + 2\frac{\partial^2 P_n}{\partial y\,\partial z}yz = \left(\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial z}z\right)^2 P_n.$$

Далее, методом математической индукции легко доказать, что

$$F^{(n)}(t) = \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^n P_n(tx,\, ty,\, tz).$$

Поскольку P_n — однородный многочлен степени n, то частные производные первого порядка — однородные многочлены степени $n-1$ (см. пример 42). Отсюда следует, что частные производные n-го порядка являются однородными многочленами нулевого порядка, а следовательно, являются постоянными, т. е. не зависят от t. Поэтому можно записать

$$F^{(n)}(t) = \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^n P_n(x,\, y,\, z). \tag{3}$$

Сравнив (2) и (3) и заменив x, y, z на dx, dy, dz, получим доказываемое равенство. ►

50. Пусть $Au = x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$. Найти Au и $A^2u = A(Au)$, если: а) $u = \frac{x}{x^2+y^2}$; б) $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$.

◄ а) Имеем $Au = x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = x\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + y\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x}{x^2+y^2} = -u$. В силу однородности операции A, $A^2u = A(Au) = A(-u) = -Au = -(-u) = u$.

б) Аналогично $Au = x\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right) + y\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} = 1$, $A^2u = A(Au) = A1 = 0$. ►

51. Пусть $\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$, $\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. Найти $\Delta_1 u$ и $\Delta_2 u$, если $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

◄ Вводя обозначение $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, находим

$$\Delta_1 u = \left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)^2 = \left(-\frac{x}{r^3}\right)^2 + \left(-\frac{y}{r^3}\right)^2 + \left(-\frac{z}{r^3}\right)^2 = \frac{1}{r^4},$$

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Поскольку $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{r^3}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}$, $\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}$, то $\Delta_2 u = -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0$, $r \neq 0$. ►

52. Доказать, что форма дифференциалов произвольного порядка функции $(\xi, \eta, \zeta) \mapsto f(\xi, \eta, \zeta)$ сохраняется при замене аргументов ξ, η, ζ линейными функциями: $\xi = a_1x + a_2y + a_3z$, $\eta = b_1x + b_2y + b_3z$, $\zeta = c_1x + c_2y + c_3z$.

◄ Вычисляя второй дифференциал функции: $d^2f = f''_{\xi^2}\,d\xi^2 + f''_{\eta^2}\,d\eta^2 + f''_{\zeta^2}\,d\zeta^2 + 2f''_{\xi\eta}\,d\xi\,d\eta + 2f''_{\xi\zeta}\,d\xi\,d\zeta + 2f''_{\eta\zeta}\,d\eta\,d\zeta + f'_\xi\,d^2\xi + f'_\eta\,d^2\eta + f'_\zeta\,d^2\zeta$ и замечая, что, в силу линейности функций ξ, η, ζ, имеют место равенства $d^2\xi = 0$, $d^2\eta = 0$, $d^2\zeta = 0$, получаем

$$d^2f = \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\,d\xi + \frac{\partial}{\partial\eta}\,d\eta + \frac{\partial}{\partial\zeta}\,d\zeta\right)^2 f.$$

Методом математической индукции легко доказать, что

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \, d\xi + \frac{\partial}{\partial \eta} \, d\eta + \frac{\partial}{\partial \zeta} \, d\zeta \right)^n f,$$

т. е. что форма дифференциалов произвольного порядка сохраняется при замене аргументов линейными функциями. ►

Найти полные дифференциалы первого и второго порядков от следующих сложных функций (x, y, z — независимые переменные):

53. $u = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

◄ Дифференцируя u как сложную функцию, получаем

$$du = f' \, d\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = f' \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad d^2u = d(f')\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} + f' \, d\left(\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Так как

$$d(f') = f'' \frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad d\left(\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{(y\,dx - x\,dy)^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}},$$

то окончательно находим

$$d^2u = f'' \frac{(x\,dx+y\,dy)^2}{x^2+y^2} + f' \frac{(y\,dx-x\,dy)^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, \quad x^2+y^2 \neq 0. \ ►$$

54. $u = f(\xi, \eta)$, где $\xi = x+y$, $\eta = x-y$.

◄ Поскольку аргументы ξ и η являются линейными функциями, то форма дифференциалов произвольного порядка сохраняется (см. пример 52).

Поэтому, вычисляя дифференциалы

$$du = f_1' \, d\xi + f_2' \, d\eta, \quad d^2u = f_{11}'' \, d\xi^2 + 2f_{12}'' \, d\xi \, d\eta + f_{22}'' \, d\eta^2,$$

где $f_1' = \frac{\partial f}{\partial \xi}$, $f_2' = \frac{\partial f}{\partial \eta}$, $f_{11}'' = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}$, $f_{12}'' = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \, \partial \eta}$, $f_{22}'' = \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}$, и вместо $d\xi$ и $d\eta$ подставляя их значения, найденные из равенств $\xi = x+y$, $\eta = x-y$, получаем

$$du = f_1'(dx+dy) + f_2'(dx-dy), \quad d^2u = f_{11}''(dx+dy)^2 + 2f_{12}''(dx^2-dy^2) + f_{22}''(dx-dy)^2. \ ►$$

55. $u = f(\xi, \eta)$, где $\xi = xy$, $\eta = \frac{x}{y}$.

◄ Дифференцируя u как сложную функцию, получаем

$$du = f_1'(y\,dx + x\,dy) + f_2' \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2},$$

$$d^2u = f_{11}''(y\,dx+x\,dy)^2 + 2f_{12}'' \frac{y^2\,dx^2 - x^2\,dy^2}{y^2} + f_{22}''\left(\frac{y\,dx-x\,dy}{y}\right)^2 + 2f_1' dx dy - 2f_2' \frac{(y\,dx - x\,dy)\,dy}{y^3}. \ ►$$

56. $u = f(x, y, z)$, где $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.

◄ Аналогично предыдущему

$$du = f_1' \, dt + f_2' 2t \, dt + f_3' 3t^2 \, dt = (f_1' + 2tf_2' + 3t^2 f_3') \, dt,$$

$$d^2u = f_{11}'' \, dt^2 + f_{22}'' 4t^2 \, dt^2 + f_{33}'' 9t^4 \, dt^2 + 4f_{12}'' t \, dt^2 + 6t^2 f_{13}'' \, dt^2 + 12t^3 f_{23}'' \, dt^2 + 2f_2' \, dt^2 + 6tf_3' \, dt^2 =$$
$$= (f_{11}'' + 4t^2 f_{22}'' + 9t^4 f_{33}'' + 4tf_{12}'' + 6t^2 f_{13}'' + 12t^3 f_{23}'' + 2f_2' + 6tf_3') \, dt^2. \ ►$$

57. $u = f(\xi, \eta, \zeta)$, где $\xi = x^2 + y^2$, $\eta = x^2 - y^2$, $\zeta = 2xy$.

◀ Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, имеем

$$du = f_1'(2x\,dx + 2y\,dy) + f_2'(2x\,dx - 2y\,dy) + f_3'(2y\,dx + 2x\,dy),$$

$$d^2u = 4f_{11}''(x\,dx + y\,dy)^2 + 4f_{22}''(x\,dx - y\,dy)^2 + 4f_{33}''(y\,dx + x\,dy)^2 + \\ + 8f_{12}''(x^2\,dx^2 - y^2\,dy^2) + 8f_{13}''(x\,dx + y\,dy)(y\,dx + x\,dy) + \\ + 8f_{23}''(x\,dx - y\,dy)(y\,dx + x\,dy) + 2f_1'(dx^2 + dy^2) + 2f_2'(dx^2 - dy^2) + 4f_3'\,dx\,dy. \ ▶$$

Найти d^nu, если:

58. $u = f(ax + by + cz)$.

◀ Поскольку в данном случае форма дифференциалов инвариантна (см. пример 52), то

$$d^nu = f^{(n)}(d(ax + by + cz))^n = f^{(n)}(a\,dx + b\,dy + c\,dz)^{(n)}. \ ▶$$

59. $u = f(ax,\ by,\ cz)$.

◀ В силу инвариантности формы дифференциалов n-го порядка (см. пример 52), имеем

$$d^nu = \left(\frac{\partial}{\partial s}a\,dx + \frac{\partial}{\partial t}b\,dy + \frac{\partial}{\partial r}c\,dz\right)^n f(s,\ t,\ r),$$

где $s = ax$, $t = by$, $r = cz$. ▶

60. $u = f(s,\ t,\ r)$, где $s = a_1x + b_1y + c_1z$, $t = a_2x + b_2y + c_2z$, $r = a_3x + b_3y + c_3z$.

◀ Используем инвариантность формы n-го дифференциала (см. пример 52). Имеем

$$d^nu = \left(\frac{\partial}{\partial s}ds + \frac{\partial}{\partial t}dt + \frac{\partial}{\partial r}dr\right)^n f(s,\ t,\ r) = \left((a_1\,dx + b_1\,dy + c_1\,dz)\frac{\partial}{\partial s} + \\ + (a_2\,dx + b_2\,dy + c_2\,dz)\frac{\partial}{\partial t} + (a_3\,dx + b_3\,dy + c_3\,dz)\frac{\partial}{\partial r}\right)^n f(s,\ t,\ r). \ ▶$$

61. Пусть $u = f(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и f — дважды дифференцируемая функция. Показать, что $\Delta u = F(r)$, где $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа, и найти функцию F.

◀ Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'\frac{x}{r}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''\frac{x^2}{r^2} + f'\frac{1}{r} - f'\frac{x^2}{r^3}.$$

Аналогично находим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''\frac{y^2}{r^2} + f'\frac{1}{r} - f'\frac{y^2}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f''\frac{z^2}{r^2} + f'\frac{1}{r} - f'\frac{z^2}{r^3}.$$

Таким образом,

$$\Delta u = f''\frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} + \frac{3}{r}f' - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^3}f' = f'' + \frac{3}{r}f' - \frac{1}{r}f' = f'' + \frac{2}{r}f' = F(r). \ ▶$$

62. Доказать, что если функция $u = u(x,\ y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, то функция $v = u\left(\frac{x}{x^2 + y^2},\ \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$ также удовлетворяет этому уравнению.

◀ Вводя для удобства обозначения $\varphi = \frac{x}{x^2+y^2}$, $\psi = \frac{y}{x^2+y^2}$, имеем

$$\frac{\partial v}{\partial x} = u_1'\frac{\partial \varphi}{\partial x} + u_2'\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = u_1'\frac{\partial \varphi}{\partial y} + u_2'\frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = u_{11}''\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + 2u_{12}''\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + u_{22}''\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + u_1'\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + u_2'\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = u_{11}''\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + 2u_{12}''\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} + u_{22}''\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + u_1'\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + u_2'\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2},$$

где $u_1' = \frac{\partial u}{\partial \varphi}$, $u_2' = \frac{\partial u}{\partial \psi}$, $u_{11}'' = \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$, $u_{12}'' = \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \, \partial \psi}$, $u_{22}'' = \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2}$.

Отсюда

$$\Delta v = u_{11}'' \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right) + u_{22}'' \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right) + \\ + 2u_{12}'' \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + u_1' \, \Delta \varphi + u_2' \, \Delta \psi. \qquad (1)$$

Вычисляя производные

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{2x(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{2x(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{2y(3x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{2y(y^2 - 3x^2)}{(x^2 + y^2)^3},$$

убеждаемся, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \Delta \varphi = 0, \quad \Delta \psi = 0. \qquad (2)$$

Таким образом, из (1) и (2) и из того, что $\Delta u = 0$, следует

$$\Delta v = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \Delta u = 0. \ ►$$

63. Доказать, что если функция $u = u(x, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, то функция $v = \frac{1}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} u\left(\frac{x}{a^2 t}, -\frac{1}{a^4 t}\right)$, $t > 0$, также удовлетворяет этому уравнению.

◄ Находим производные

$$v_t' = \left(-\frac{u}{2a\sqrt{t^3}} + \frac{x^2 u}{4a^3 \sqrt{t^5}} - \frac{x u_1'}{a^3 \sqrt{t^5}} + \frac{u_2'}{a^5 \sqrt{t^5}} \right) e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}},$$

$$v_{x^2}'' = \left(-\frac{u}{2a^3 \sqrt{t^3}} + \frac{x^2 u}{4a^5 \sqrt{t^5}} - \frac{x u_1'}{a^5 \sqrt{t^5}} + \frac{u_{11}''}{a^5 \sqrt{t^5}} \right) e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}},$$

где через u_1' и u_{11}'' обозначены частные производные функции u по первому аргументу, а через u_2' — по второму аргументу, и подставляем их в выражение $v_t' - a^2 v_{x^2}''$. После упрощений получаем

$$v_t' - a^2 v_{x^2}'' = \frac{1}{a^5 \sqrt{t^5}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \left(u_2' - a^2 u_{11}'' \right).$$

Согласно условию, $u_2' - a^2 u_{11}'' = 0$. Поэтому $v_t' - a^2 v_{x^2}'' = 0$. ►

64. Доказать, что функция $u = \frac{1}{r}$, где $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, при $r \neq 0$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

◄ Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \frac{x - a}{r} = -\frac{x - a}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x - a)}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x - a)^2}{r^5}.$$

Аналогично находим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(y - b)^2}{r^5}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(z - c)^2}{r^5}.$$

Складывая последние три равенства, получаем

$$\Delta u = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^5}\left((x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2\right) = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0. \blacktriangleright$$

65. Пусть функции $u_1 = u_1(x, y, z)$ и $u_2 = u_2(x, y, z)$ удовлетворяют уравнению Лапласа $\Delta u = 0$. Доказать, что функция $v = u_1(x, y, z) + (x^2 + y^2 + z^2)u_2(x, y, z)$ удовлетворяет бигармоническому уравнению $\Delta(\Delta v) = 0$.

◀ Последовательно дифференцируя, находим

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + 2xu_2 + \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + 2u_2 + 4x\frac{\partial u_2}{\partial x} + \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + 2u_2 + 4y\frac{\partial u_2}{\partial y} + \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + 2u_2 + 4z\frac{\partial u_2}{\partial z} + \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}.$$

Следовательно,

$$\Delta v = \Delta u_1 + 6u_2 + 4\left(x\frac{\partial u_2}{\partial x} + y\frac{\partial u_2}{\partial y} + z\frac{\partial u_2}{\partial z}\right) + \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\Delta u_2.$$

Учитывая, что функции u_1 и u_2 удовлетворяют уравнению Лапласа, т. е. что $\Delta u_1 = 0$ и $\Delta u_2 = 0$, получаем

$$\Delta v = 6u_2 + 4\left(x\frac{\partial u_2}{\partial x} + y\frac{\partial u_2}{\partial y} + z\frac{\partial u_2}{\partial z}\right).$$

Находя производные $\frac{\partial^2 \Delta v}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \Delta v}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 \Delta v}{\partial z^2}$ и складывая их, имеем

$$\Delta(\Delta v) = 14\,\Delta u_2 + 4\left(x\frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} + y\frac{\partial^3 u_2}{\partial x^2\,\partial y} + z\frac{\partial^3 u_2}{\partial x^2\,\partial z} + x\frac{\partial^3 u_2}{\partial y^2\,\partial x} + y\frac{\partial^3 u_2}{\partial y^3} + \right.$$
$$\left. + z\frac{\partial^3 u_2}{\partial y^2\,\partial z} + x\frac{\partial^3 u_2}{\partial z^2\,\partial x} + y\frac{\partial^3 u_2}{\partial z^2\,\partial y} + z\frac{\partial^3 u_2}{\partial z^3}\right).$$

Записывая последнее равенство в виде

$$\Delta(\Delta v) = 14\,\Delta u_2 + 4x\frac{\partial}{\partial x}(\Delta u_2) + 4y\frac{\partial}{\partial y}(\Delta u_2) + 4z\frac{\partial}{\partial z}(\Delta u_2)$$

и пользуясь тем, что $\Delta u_2 = 0$, убеждаемся в справедливости равенства $\Delta(\Delta v) = 0$. ▶

66. Пусть $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ есть m раз дифференцируемая однородная функция измерения n. Доказать, что

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(x, y, z) = n(n-1)\ldots(n-m+1)f(x, y, z).$$

◀ Пусть (x, y, z) — произвольная фиксированная точка из области определения функции f, а $m \leqslant n$. В силу однородности, справедливо равенство $t^n f(x, y, z) = f(tx, ty, tz)$. Последовательно дифференцируя его m раз по t

$$nt^{n-1}f(x, y, z) = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} \equiv \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)f(tx, ty, tz),$$

$$n(n-1)t^{n-2}f(x, y, z) = x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + z^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} +$$
$$+ 2xz\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} + 2yz\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} \equiv \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f(tx, ty, tz),$$

. . . .

$$n(n-1)\ldots(n-m+1)t^{n-m}f(x, y, z) = \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(tx, ty, tz)$$

и полагая $t = 1$, получаем требуемое равенство. ►

67. Пусть $x^2 = vw$, $y^2 = uw$, $z^2 = uv$ и $f(x, y, z) = F(u, v, w)$. Доказать, что $xf'_x + yf'_y + zf'_z = uF'_u + vF'_v + wF'_w$.

◄ Согласно условию, имеем
$$F(u, v, w) = f(\sqrt{vw}, \sqrt{uw}, \sqrt{uv}).$$
Дифференцируя это равенство по u, v и w, находим
$$F'_u = f'_y \frac{w}{2\sqrt{uw}} + f'_z \frac{v}{2\sqrt{uv}}, \quad F'_v = f'_x \frac{w}{2\sqrt{vw}} + f'_z \frac{u}{2\sqrt{uv}}, \quad F'_w = f'_x \frac{v}{2\sqrt{vw}} + f'_y \frac{u}{2\sqrt{uw}}. \qquad (1)$$
Умножая первое из равенств (1) на u, второе на v, а третье на w и складывая их, получаем
$$uF'_u + vF'_v + wF'_w = f'_y \frac{uw}{2\sqrt{uw}} + f'_z \frac{uv}{2\sqrt{uv}} + f'_x \frac{vw}{2\sqrt{vw}} + f'_z \frac{uv}{2\sqrt{uv}} +$$
$$+ f'_x \frac{vw}{2\sqrt{vw}} + f'_y \frac{uw}{2\sqrt{uw}} = \sqrt{vw} f'_x + \sqrt{uw} f'_y + \sqrt{uv} f'_z.$$
Отсюда, используя условие задачи, окончательно находим
$$uF'_u + vF'_v + wF'_w = xf'_x + yf'_y + zf'_z. \ ►$$

Путем последовательного дифференцирования исключить произвольные функции φ и ψ:

68. $z = x + \varphi(xy)$.

◄ Найдем частные производные по x и по y:
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + y\varphi', \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x\varphi'.$$
Сложим полученные равенства, умножив первое из них на x, а второе на $-y$. Тогда получим
$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = x. \ ►$$

69. $u = \varphi(x - y, y - z)$.

◄ Имеем $\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'_1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\varphi'_1 + \varphi'_2$, $\frac{\partial u}{\partial z} = -\varphi'_2$. Складывая эти равенства, получаем $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$. ►

70. $z = \varphi(x)\psi(y)$.

◄ Имеем $\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'\psi$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi\psi'$. Отсюда $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi\psi\varphi'\psi' = z\varphi'\psi'$.

С другой стороны, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \varphi'\psi'$. Следовательно, из последних двух равенств непосредственно вытекает, что $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = z\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$. ►

71. $z = \varphi(xy) + \psi\left(\frac{x}{y}\right)$.

◄ Используя равенства
$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\varphi' + \frac{1}{y}\psi', \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2\varphi'' + \frac{1}{y^2}\psi'', \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x\varphi' - \frac{x}{y^2}\psi', \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2\varphi'' + \frac{x^2}{y^4}\psi'' + \frac{2x}{y^3}\psi',$$
получаем следующие соотношения:
$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x}{y}\psi', \quad x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2x}{y}\psi',$$
из которых непосредственно вытекает, что
$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \ ►$$

72. Найти производную функции $z = x^2 - y^2$ в точке $M = (1, 1)$ в направлении l, составляющем угол $\alpha = 60°$ с положительным направлением оси Ox.

◀ Имеем $\frac{\partial z(M)}{\partial l} = \frac{\partial z(M)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z(M)}{\partial y}\cos\beta = 2\cos\alpha - 2\cos\beta$. Таким образом, $\frac{\partial z(M)}{\partial l} = 1 - \sqrt{3}$. ▶

73. Найти производную функции $z = \ln(x^2 + y^2)$ в точке $M = (x_0, y_0)$ в направлении l, перпендикулярном к линии уровня, проходящей через эту точку.

◀ Поскольку вектор $\operatorname{grad} u$ в точке M ортогонален к линии уровня $c = \ln(x^2 + y^2)$, проходящей через точку M, то направляющие косинусы вектора l равны направляющим косинусам $\operatorname{grad} u$ в точке M, т. е.

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial z(M)}{\partial x}}{\|\operatorname{grad} u(M)\|}, \quad \cos\beta = \frac{\frac{\partial z(M)}{\partial y}}{\|\operatorname{grad} u(M)\|}.$$

Но $\frac{\partial z(M)}{\partial x} = \frac{2x_0}{x_0^2+y_0^2}$, $\frac{\partial z(M)}{\partial y} = \frac{2y_0}{x_0^2+y_0^2}$,

$$\|\operatorname{grad} u(M)\| = \sqrt{\left(\frac{\partial z(M)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z(M)}{\partial y}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}},$$

поэтому $\cos\alpha = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$, $\cos\beta = \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$. Следовательно,

$$\frac{\partial z(M)}{\partial l} = \frac{\partial z(M)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z(M)}{\partial y}\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \quad (x_0^2 + y_0^2 \neq 0). ▶$$

74. Найти производную функции $z = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$ в точке $M = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ по направлению внутренней нормали в этой точке к кривой $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

◀ Тангенс угла наклона нормали к данной кривой определяется формулой $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{y'\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)}$, где $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Отсюда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, а направляющие косинусы внутренней нормали выражаются формулами $\cos\alpha = -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\beta = -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (мы берем знак минус, поскольку нормаль внутренняя). Воспользуемся формулой производной по направлению $n = (\cos\alpha, \cos\beta)$:

$$\frac{\partial z(M)}{\partial n} = \frac{\partial z(M)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z(M)}{\partial y}\cos\beta.$$

Вычисляя производные $\frac{\partial z(M)}{\partial x} = -\frac{\sqrt{2}}{a}$, $\frac{\partial z(M)}{\partial y} = -\frac{\sqrt{2}}{b}$, находим

$$\frac{\partial z(M)}{\partial n} = \frac{b\sqrt{2}}{a\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{a\sqrt{2}}{b\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2)}}{ab}. ▶$$

75. Найти производную функции $u = xyz$ в точке $M = (1, 1, 1)$ в направлении $l = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Чему равна величина градиента функции в этой точке?

◀ Очевидно, $\frac{\partial u(M)}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial u(M)}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial u(M)}{\partial z} = 1$. По формуле производной по направлению, получим

$$\frac{\partial u(M)}{\partial l} = \frac{\partial u(M)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(M)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u(M)}{\partial z}\cos\gamma = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma.$$

Величину градиента определим по формуле

$$\|\operatorname{grad} u(M)\| = \sqrt{\left(\frac{\partial u(M)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u(M)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u(M)}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{3}. ▶$$

76. Определить угол между градиентами функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точках $A = (\varepsilon, 0, 0)$ и $B = (0, \varepsilon, 0)$.

◀ Имеем

$$\operatorname{grad} u(A)=\left(\frac{\partial u(A)}{\partial x},\ \frac{\partial u(A)}{\partial y},\ \frac{\partial u(A)}{\partial z}\right)=(2\varepsilon,\ 0,\ 0),$$

$$\operatorname{grad} u(B)=\left(\frac{\partial u(B)}{\partial x},\ \frac{\partial u(B)}{\partial y},\ \frac{\partial u(B)}{\partial z}\right)=(0,\ 2\varepsilon,\ 0).$$

Отсюда $\|\operatorname{grad} u(A)\|=2|\varepsilon|$, $\|\operatorname{grad} u(B)\|=2|\varepsilon|$. Подставляя эти значения в равенство

$$(\operatorname{grad} u(A),\ \operatorname{grad} u(B))=\|\operatorname{grad} u(A)\|\,\|\operatorname{grad} u(B)\|\cos\varphi,$$

получаем $\cos\varphi=0$, т. е. $\varphi=\frac{\pi}{2}$. ▶

77. Показать, что в точке $M_0=(x_0,\ y_0,\ z_0)$ угол между градиентами функций $u=ax^2+by^2+cz^2$, $v=ax^2+by^2+cz^2+2mx+2ny+2pz$ (a, b, c, m, n, p — постоянные и $a^2+b^2+c^2\neq 0$) стремится к нулю, если точка M_0 удаляется в бесконечность.

◀ Имеем $\cos\varphi=\frac{(\operatorname{grad} u,\ \operatorname{grad} v)}{\|\operatorname{grad} u\|\,\|\operatorname{grad} v\|}$, где

$$\operatorname{grad} u=(2ax_0,\ 2by_0,\ 2cz_0),\quad \operatorname{grad} v=(2ax_0+2m,\ 2by_0+2n,\ 2cz_0+2p),$$

$$\|\operatorname{grad} u\|=2\sqrt{(ax_0)^2+(by_0)^2+(cz_0)^2},\quad \|\operatorname{grad} v\|=2\sqrt{(ax_0+m)^2+(by_0+n)^2+(cz_0+p)^2}.$$

Тогда угол φ определяется из равенства

$$\cos\varphi=\frac{ax_0(ax_0+m)+by_0(by_0+n)+cz_0(cz_0+p)}{\sqrt{((ax_0)^2+(by_0)^2+(cz_0)^2)((ax_0+m)^2+(by_0+n)^2+(cz_0+p)^2)}}.$$

Вычислим $\sin\varphi$ и покажем, что $\sin\varphi\to 0$, если $\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}\to\infty$:

$$|\sin\varphi|=\sqrt{1-\cos^2\varphi}=\sqrt{\frac{(ax_0n-by_0m)^2+(ax_0p-cz_0m)^2+(by_0p-cz_0n)^2}{((ax_0)^2+(by_0)^2+(cz_0)^2)((ax_0+m)^2+(by_0+n)^2+(cz_0+p)^2)}}.$$

Пользуясь неравенствами $2|x_0y_0|\leqslant x_0^2+y_0^2$, $2|x_0z_0|\leqslant x_0^2+z_0^2$, $2|y_0z_0|\leqslant y_0^2+z_0^2$ и обозначая наибольший по абсолютной величине из коэффициентов числителя при x_0^2, y_0^2 и z_0^2, через A^2, получаем оценку

$$(ax_0n-by_0m)^2+(ax_0p-cz_0m)^2+(by_0p-cz_0n)^2\leqslant A^2(x_0^2+y_0^2+z_0^2).$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$. Пусть $B=\min\{|a|,\ |b|,\ |c|\}$, тогда $a^2x_0^2+b^2y_0^2+c^2z_0^2\geqslant B^2(x_0^2+y_0^2+z_0^2)$.

Таким образом, имеем оценку

$$0\leqslant|\sin\varphi|\leqslant\frac{A\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}{B\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}\sqrt{(ax_0+m)^2+(by_0+n)^2+(cz_0+p)^2}}=$$

$$=\frac{A}{B\sqrt{(ax_0+m)^2+(by_0+n)^2+(cz_0+p)^2}}.\qquad(1)$$

Очевидно, если $\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}\to\infty$, то

$$\sqrt{(ax_0+m)^2+(by_0+n)^2+(cz_0+p)^2}\to\infty;$$

поэтому из неравенства (1) следует, что $\sin\varphi$, а вместе с ним и φ стремится к нулю, если точка M_0 удаляется в бесконечность. ▶

78. Пусть $u=f(x,\ y,\ z)$ — дважды дифференцируемая функция и $l_1=(\cos\alpha_1,\ \cos\beta_1,\ \cos\gamma_1)$, $l_2=(\cos\alpha_2,\ \cos\beta_2,\ \cos\gamma_2)$, $l_3=(\cos\alpha_3,\ \cos\beta_3,\ \cos\gamma_3)$ — три взаимно перпендикулярных направления. Доказать, что:

а) $\left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$;

б) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial l_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial l_2^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial l_3^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

◀ а) Находим производные функции u по направлениям l_1, l_2, l_3:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial l_1} &= \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha_1 + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta_1 + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma_1,\\
\frac{\partial u}{\partial l_2} &= \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha_2 + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta_2 + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma_2,\\
\frac{\partial u}{\partial l_3} &= \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha_3 + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta_3 + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma_3.
\end{aligned} \tag{1}$$

Отсюда непосредственно следует:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2 &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 (\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3) + \\
&+ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 (\cos^2\beta_1 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\beta_3) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 (\cos^2\gamma_1 + \cos^2\gamma_2 + \cos^2\gamma_3) + \\
&+ 2\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial y}(\cos\alpha_1\cos\beta_1 + \cos\alpha_2\cos\beta_2 + \cos\alpha_3\cos\beta_3) + \\
&+ 2\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial z}(\cos\alpha_1\cos\gamma_1 + \cos\alpha_2\cos\gamma_2 + \cos\alpha_3\cos\gamma_3) + \\
&+ 2\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial u}{\partial z}(\cos\beta_1\cos\gamma_1 + \cos\beta_2\cos\gamma_2 + \cos\beta_3\cos\gamma_3).
\end{aligned} \tag{2}$$

Поскольку матрица

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

является матрицей перехода от ортонормированного базиса $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ к ортонормированному базису $(\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2, \boldsymbol{l}_3)$, то она обладает тем свойством, что сумма квадратов элементов любой строки (столбца) равна единице, а сумма произведений соответствующих элементов двух различных строк (столбцов) равна нулю.

Таким образом, в равенстве (2) коэффициенты при квадратах производных $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$, $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$, $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$ равны единице, а при произведениях производных $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}$ равны нулю. Учитывая это, из равенств (2) непосредственно получаем равенство а).

б) Находим $\frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2} = \frac{\partial}{\partial l_1}\left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)$, где $\frac{\partial u}{\partial l_1}$ определено первым из равенств (1):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\alpha_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\beta_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cos^2\gamma_1 + \\
&+ 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\cos\alpha_1\cos\beta_1 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\cos\alpha_1\cos\gamma_1 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\cos\beta_1\cos\gamma_1.
\end{aligned}$$

Аналогично вычисляем $\frac{\partial^2 u}{\partial l_2^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial l_3^2}$. Складывая полученные равенства, находим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial l_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial l_3^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3) + \\
&+ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\cos^2\beta_1 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\beta_3) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(\cos^2\gamma_1 + \cos^2\gamma_2 + \cos^2\gamma_3) + \\
&+ 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(\cos\alpha_1\cos\beta_1 + \cos\alpha_2\cos\beta_2 + \cos\alpha_3\cos\beta_3) +
\end{aligned}$$

$$+ 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}(\cos\alpha_1\cos\gamma_1 + \cos\alpha_2\cos\gamma_2 + \cos\alpha_3\cos\gamma_3) +$$

$$+ 2\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}(\cos\beta_1\cos\gamma_1 + \cos\beta_2\cos\gamma_2 + \cos\beta_3\cos\gamma_3).$$

Отсюда, воспользовавшись свойством матрицы (3), получим равенство б). ►

79. Пусть $u = u(x, y)$ — дифференцируемая функция и при $y = x^2$ имеем $u(x, x^2) = 1$ и $\frac{\partial u}{\partial x} = x$. Найти $\frac{\partial u}{\partial y}$ при $y = x^2$.

◄ Поскольку, по условию, $u(x, x^2) = 1$, то отсюда, используя дифференцируемость функции u, получаем $\frac{\partial}{\partial x}u(x, x^2) = 0$, т. е.

$$\frac{\partial u(x, x^2)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, x^2)}{\partial y}2x = 0. \tag{1}$$

Но, по условию, $\frac{\partial u(x, x^2)}{\partial x} = x$, поэтому из (1) следует, что $\frac{\partial u(x, x^2)}{\partial y} = -\frac{1}{2}$. ►

80. Пусть функция $u = u(x, y)$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ и, кроме того, следующим условиям: $u(x, 2x) = x$, $u'_x(x, 2x) = x^2$. Найти $u''_{xx}(x, 2x)$, $u''_{xy}(x, 2x)$, $u''_{yy}(x, 2x)$.

◄ Дифференцируя обе части равенства $u(x, 2x) = x$ по x:

$$u'_x(x, 2x) + 2u'_y(x, 2x) = 1$$

и пользуясь равенством $u'_x(x, 2x) = x^2$, получаем $x^2 + 2u'_y(x, 2x) = 1$. Последнее равенство снова дифференцируем по x:

$$2x + 2u''_{yx}(x, 2x) + 4u''_{yy}(x, 2x) = 0.$$

Отсюда, учитывая уравнение $u''_{xx} = u''_{yy}$ и тождество $u''_{xy} = u''_{yx}$, получаем

$$2u''_{xx}(x, 2x) + u''_{xy}(x, 2x) = -x. \tag{1}$$

Далее, дифференцируя равенство $u'_x(x, 2x) = x^2$ по x, имеем

$$u''_{xx}(x, 2x) + 2u''_{xy}(x, 2x) = 2x. \tag{2}$$

Решая систему уравнений (1) и (2) относительно u''_{xx}, u''_{xy} и учитывая, что $u''_{xx} = u''_{yy}$, находим

$$u''_{xx}(x, 2x) = u''_{yy}(x, 2x) = -\frac{4x}{3}, \quad u''_{xy}(x, 2x) = \frac{5x}{3}. \;►$$

81. Найти решение $z = z(x, y)$ уравнения $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y$, удовлетворяющее условию $z(x, x^2) = 1$.

◄ Интегрируя уравнение по y, находим $z(x, y) = x^2y + y^2 + \varphi(x)$, где φ — пока неопределенная функция. Для нахождения неизвестной функции φ используем условие $z(x, x^2) = 1$: $z(x, x^2) \equiv x^2x^2 + x^4 + \varphi(x) = 1$. Отсюда $\varphi(x) = -2x^4 + 1$. Таким образом, $z(x, y) = x^2y + y^2 - 2x^4 + 1$. ►

82. Найти решение $z = z(x, y)$ уравнения $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = x + y$, удовлетворяющее условиям $z(x, 0) = x$, $z(0, y) = y^2$.

◄ Имеем

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = \int_0^x (x + y)\,dx + \varphi_0(y) \equiv \frac{x^2}{2} + xy + \varphi_0(y),$$

$$z(x, y) = \int_0^y \left(\frac{x^2}{2} + xy + \varphi_0(y)\right) dy \equiv \frac{x^2y}{2} + \frac{xy^2}{2} + \varphi(y) + \psi(x),$$

где $\varphi(y) = \int\limits_0^y \varphi_0(y)\,dy$.

Используя условие $z(x, 0) = x$, находим $z(x, 0) \equiv \psi(x) = x$; следовательно, $z(x, y) = \frac{x^2 y}{2} + \frac{xy^2}{2} + \varphi(y) + x$.

Далее, из условия $z(0, y) = y^2$ следует $z(0, y) \equiv \varphi(y) = y^2$. Таким образом, окончательно имеем $z(x, y) = \frac{x^2 y + xy^2}{2} + y^2 + x$. ►

83. Найти решение $z = z(x, y)$ уравнения $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$, удовлетворяющее условиям $z(x, 0) = 1$, $z'_y(x, 0) = x$.

◄ Аналогично предыдущему $\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = 2y + \varphi(x)$, $z(x, y) = y^2 + y\varphi(x) + \psi(x)$.

Принимая во внимание, что $z(x, 0) \equiv \psi(x) = 1$, $z'_y(x, 0) \equiv \varphi(x) = x$, окончательно находим $z(x, y) = y^2 + xy + 1$. ►

Найти производную следующих отображений $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$:

84. $\boldsymbol{f} : (r, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$, $\quad \boldsymbol{g} : (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} \end{pmatrix}$, если

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad (r, \varphi) \in D,$$
$$D = \{(r, \varphi) : 0 < \alpha \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \delta,\ 0 < \delta < 2\pi\}. \tag{1}$$

◄ По формуле дифференцирования сложного отображения находим

$$(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})' = \boldsymbol{f}' \cdot \boldsymbol{g}' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Поскольку $x^2 + y^2 = r^2$, то из (1) и (2) получаем

$$(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})' = \begin{pmatrix} \frac{x\cos\varphi}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{ry\sin\varphi}{x^2+y^2} & \frac{y\cos\varphi}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{rx\sin\varphi}{x^2+y^2} \\ \frac{x\sin\varphi}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{ry\cos\varphi}{x^2+y^2} & \frac{y\sin\varphi}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{rx\cos\varphi}{x^2+y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \ ►$$

85. $\boldsymbol{f} : (r, \varphi, z) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$, $\quad \boldsymbol{g} : (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} \\ z \end{pmatrix}$, если

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z,\ (r, \varphi, z) \in D, \tag{1}$$
$$D = \{(r, \varphi, z) : 0 < \alpha \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \delta,\ |z| \leqslant H,\ 0 < \delta < 2\pi\}.$$

◄ Имеем

$$(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})' = \boldsymbol{f}' \cdot \boldsymbol{g}' =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x\cos\varphi}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{ry\sin\varphi}{x^2+y^2} & \frac{y\cos\varphi}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{rx\sin\varphi}{x^2+y^2} & 0 \\ \frac{x\sin\varphi}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{ry\cos\varphi}{x^2+y^2} & \frac{y\sin\varphi}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{rx\cos\varphi}{x^2+y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Учитывая равенства (1), окончательно находим

$$(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \ ►$$

86. Пусть

$$g:(r,\varphi,\theta)\mapsto\begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\theta\\ r\sin\varphi\sin\theta\\ r\cos\theta\end{pmatrix},\quad f:(x\,y,\,z)\mapsto\begin{pmatrix}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\\ \arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\end{pmatrix},$$

$$(r,\varphi,\theta)\in D,\ D=\{(r,\varphi,\theta):0<\alpha\leqslant r\leqslant R,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi-\delta,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0<\delta<2\pi\},$$

$$x=r\cos\varphi\sin\theta,\quad y=\sin\varphi\sin\theta,\quad z=r\cos\theta. \tag{1}$$

Найти $(f\circ g)'$ и $(g\circ f)'$.

◀ По формуле дифференцирования сложного отображения, находим

$$(f\circ g)'=f'\cdot g'=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0\\ \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2+z^2)} & \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2+z^2)} & -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta\end{pmatrix}.$$

Умножив матрицы и подставив вместо x, y и z их значения из (1), получим

$$(f\circ g)'=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Аналогично находим, что

$$(g\circ f)'=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}. ▶$$

87. Найти F', если $F=(f\circ g\circ h)(s,\,t,\,u)$,

$$f:(x,\,y)\mapsto\begin{pmatrix}\sqrt{x^2+y^2}\\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\end{pmatrix},\quad g:(r,\varphi)\mapsto\begin{pmatrix}r\cos\varphi\\ r\sin\varphi\end{pmatrix},\quad h:(s,\,t,\,u)\mapsto\begin{pmatrix}s\,t\,u\\ s^2+t^2+u^2\end{pmatrix},$$

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad r=stu,\quad \varphi=s^2+t^2+u^2.$$

◀ Имеем

$$F'=f'\cdot g'\cdot h'.$$

В силу ассоциативности произведения матриц, справедливо равенство

$$F'=(f'\cdot g')\cdot h'.$$

А поскольку

$$f'\cdot g'=\begin{pmatrix}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix};\quad h'=\begin{pmatrix}tu & su & st\\ 2s & 2t & 2u\end{pmatrix},$$

то

$$F'=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}tu & su & st\\ 2s & 2t & 2u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}tu & su & st\\ 2s & 2t & 2u\end{pmatrix}. ▶$$

Упражнения для самостоятельной работы

Найти частные производные следующих функций:

17. $f(x,\,y)=\frac{\sin xy}{y}$. **18.** $f(x,\,y,\,z)=\ln(xy^2z^3)$. **19.** $f(x,\,y)=x^4y+2x^2y^2+xy^3+x-y$.

20. $f(x,\,y)=\frac{x+y^2}{x^2+y^2+1}$. **21.** $f(x,\,y)=\frac{x}{y}$. **22.** $f(x,\,y)=(2x^2y^2-x+1)^3$.

23. $f(x,\,y)=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. **24.** $f(x,\,y)=\sqrt{x^2+y^2-x+1}$. **25.** $f(x,\,y,\,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

26. $f(x, y) = 2^{x-y}$. **27.** $f(x, y) = \ln(x^3 + \sin xy)$. **28.** $f(x, y, z) = \ln(x^3 + 2^y + \operatorname{tg} 3z)$.
29. $f(x, y) = \cos(2x + 3y + 1)$. **30.** $f(x, y) = e^{-x^3 y}$. **31.** $f(x, y) = (x + 1)^{2y+1}$.
32. $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$. **33.** $f(x, y) = 2^{-\frac{x}{y}}$. **34.** $f(x, y) = \ln(e^x + 2e^y)$.
35. $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y^2}$. **36.** $f(x, y) = xy - \frac{3}{x} + \frac{5}{y}$.
37. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz + xyz$. **38.** $f(x, y, z) = (xy)^z$.
39. $f(x, y, z) = z^{xy}$. **40.** $f(x, y, z) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} z$.

Найти дифференциалы следующих функций:

41. $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$. **42.** $f(x, y) = \arccos(xy)$. **43.** $f(x, y) = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$.
44. $f(x, y) = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2)$. **45.** $f(x, y, z) = \ln(x + y - z)$. **46.** $f(x, y) = x^y$.
47. $f(x, y) = \cos(xy)$. **48.** $f(x, y) = x^3 + y^3 - xy$.
49. $f(x, y) = e^{-xy}$. **50.** $f(x, y, z) = x^3 y + y^3 x + z^3 y$.

Непосредственным вычислением производных проверить теорему Эйлера об однородных функциях:

51. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \ln \frac{x}{y}$ **52.** $f(x, y, z) = \frac{y}{x} e^{\frac{x}{z}}$. **53.** $f(x, y, z) = \sin \frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
54. $f(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **55.** $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. **56.** $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$.

Найти частные производные первого и второго порядков в следующих примерах:

57. $f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$. **58.** $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$.
59. $f(x, y) = x \sin(x + y) + y \cos(x + y)$. **60.** $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Найти производные первых двух порядков от функций:

61. $u = \varphi(\xi, \eta)$, $\xi = x + y$, $\eta = x - y$. **62.** $u = \varphi(\xi, \eta)$, $\xi = x^2 + y^2 + z^2$, $\eta = xyz$.
63. $u = \omega(\xi, \eta)$, $\xi = \frac{x}{y}$, $\eta = \frac{y}{x}$.

64. Показать, что если $x^2 = \eta\xi$, $y^2 = \zeta\xi$, $z^2 = \zeta\eta$, то $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = \xi\frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial u}{\partial \eta} + \zeta\frac{\partial u}{\partial \zeta}$.

65. Полагая $x = ar\cos^\alpha \varphi$, $y = br\sin^\alpha \varphi$, найти якобиан

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}.$$

66. Полагая $x = ar\cos^\alpha \varphi \sin^\alpha \theta$, $y = br\sin^\alpha \varphi \sin^\alpha \theta$, $z = cr\cos^\alpha \theta$, найти якобиан

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix}.$$

67. Полагая $x = \xi\eta\zeta$, $y = \xi\eta - \xi\eta\zeta$, $z = \eta - \xi\eta$, найти якобиан $\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)}$.

68. Доказать, что если $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi\cos\theta$, $z = \sin\varphi\sin\theta\cos\psi$, то якобиан равен $-\sin^3\varphi\sin^2\theta\sin\psi$.

69. Доказать, что при $u_1 = \frac{x_1}{\sqrt{1-r^2}}$, $u_2 = \frac{x_2}{\sqrt{1-r^2}}$, $u_3 = \frac{x_3}{\sqrt{1-r^2}}$, где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, справедливо равенство

$$\frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} = (1 - r^2)^{-\frac{5}{2}}.$$

70. Проверить, что $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$.

71. Проверить, что $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, если $u = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{z}{y}}$.

Вычислить выражения:

72. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, если $u = \varphi(x + y)$.
73. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2$, если $u = \varphi(xy)$.

Проверить следующие равенства:

74. $\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u=0,\ u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$

75. $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{3}{x+y+z},\ u=\ln(x^3+y^3+z^3-3xyz).$

76. $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2},\ z=y\varphi(x^2+y^2).$ **77.** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\alpha\frac{\partial u}{\partial y}=\alpha^2 u,\ u=e^{-\alpha x}\varphi(x-y).$

78. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2\varphi'',\ u=\varphi(y-z)-x\varphi'(y-z).$

79. $(x^2-y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xyz,\ z=e^y\varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right).$ **80.** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ u=\ln(x^2+y^2).$

81. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, , если $u=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

82. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=n(n-1)u$, где $u=x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+x^{1-n}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

83. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, если $u=x\varphi(x+y)+y\psi(x+y)$.

84. $a^2\left(u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)=b^2\left(u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)$, где $u=\varphi(ay+bx)\psi(bx-ay)$.

85. $\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u=f(x+\varphi(y))$. **86.** $\frac{\partial^2 \ln z}{\partial x\,\partial y}=2z,\ z=\frac{\varphi'(x)\psi'(y)}{(\varphi(x)+\psi(y))^2}$.

§ 3. Неявные функции

3.1. Принцип неподвижной точки.

Пусть X — метрическое пространство.

Определение 1. *Оператор (отображение) $A: X\to X$ называется сжимающим, если*

$$\exists\theta\in[0,\,1[\ \wedge\ \forall x,\,y\in X:\ \rho(Ax,\,Ay)\leqslant\theta\rho(x,\,y).$$

Из определения следует, что оператор A удовлетворяет условию Липшица и, следовательно, равномерно непрерывен.

Определение 2. *Точка $x\in A$ называется неподвижной точкой оператора A, если $Ax=x$ т. е. если она является решением операторного уравнения $Ax=x$.*

Теорема (Каччиополли—Пикара—Банаха). *Всякий сжимающий оператор A, отображающий полное метрическое пространство X в себя, имеет в этом пространстве единственную неподвижную точку.*

3.2. Определение неявной функции.

Пусть задано отображение $\boldsymbol{f}: X\times Y\to Z$, где $X\subset\mathbb{R}^m$, $Y\subset\mathbb{R}^n$, $Z\subset\mathbb{R}^n$, причем множество Z содержит нулевой элемент пространства $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим уравнение

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y})=\boldsymbol{0}. \tag{1}$$

Если существуют непустые множества $E\subset X$ и $F\subset Y$ такие, что $\forall\boldsymbol{x}\in E$ уравнение (1) имеет единственное решение $\boldsymbol{y}\in F$, то можно определить отображение $\varphi: E\to F$, поставив в соответствие каждому $\boldsymbol{x}\in E$ то значение $\boldsymbol{y}=\varphi(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{y}\in F$, которое при этом $\boldsymbol{x}$ является решением уравнения (1). В этом случае уравнение (1) определяет φ как неявное отображение $E\to F: \boldsymbol{x}\mapsto\varphi(\boldsymbol{x})$, которое называется *неявным отображением* (при $n=1$ — *функцией*), определяемым уравнением (1).

3.3. Теоремы о неявной функции.

Пусть задано уравнение

$$f(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_m,\,y)=0, \tag{1}$$

которое запишем в виде $f(\boldsymbol{x},\,y)=0$.

Здесь $\boldsymbol{x}=(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_m)$, $\boldsymbol{x}\in S(\boldsymbol{x}_0,\,a)$, $\boldsymbol{x}_0=(x_1^0,\,x_2^0,\,\ldots,\,x_m^0)$, $y\in S(y_0,\,b)$, $S(y_0,\,b)=\,]y_0-b,\,y_0+b[$. Обозначим $D=S(\boldsymbol{x}_0,\,a)\times S(y_0,\,b)$.